

## Олимпиада ЮМШ 2014-15 года

### Математический квадрат для 9-11 классов

*9 класс, 1 отбор*

#### АЛГЕБРА И МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

**10.** Расставьте в порядке возрастания числа  $x=(a+b)(c+d)$ ,  $y=(a+c)(b+d)$ ,  $z=(a+d)(b+c)$ , если известно, что  $a < b < c < d$ . Ответ дайте в виде слова из трёх букв, например, zху.

**20.** Найдите наименьшее и наибольшее значение выражения  $|x+3| - |2x+2| + |x-1|$  ( $x$  может быть любым действительным числом). В ответе укажите через пробел наименьшее и наибольшее значения.

**30.** Решите систему уравнений:  $x+y=4$ ,  $3xy-z^2=12$ . Ответ дайте в виде списка троек  $(x,y,z)$ .

**40.** Найдите 2014-й член последовательности 1, 2, 4, 5, 7, 9, 10, 12, ... (одно нечётное число, два чётных, три нечётных, четыре чётных и т.п.)

**50.** Сколько уравнений вида  $x^2 - px + q=0$ , где  $p$  и  $q$  – цифры, имеют хотя бы один натуральный корень?

## ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ

10. У каждого из пиратов есть целое количество пиастров, причём у всех разное. В сумме у них 100 пиастров. Каков минимально возможный суммарный капитал трёх самых богатых пиратов?

20. Трое братьев – Дима, Олег и Саша – произнесли следующие утверждения:

1. Дима старше Олега.
2. Олег старше Саши.
3. Саша старше Димы.
4. Саша – самый старший из нас.
5. Дима – самый младший из нас.
6. Возраст Олега больше, чем сумма возрастов Димы и Саши.

На самом деле из этих утверждений верны только четыре. Какие? Запишите номера этих утверждений в порядке возрастания без запятых и иных символов, как четырёхзначное число, например, 1236.

30. Двое играют в следующую игру. На столе лежат четыре мешка, а в них – 30, 32, 36 и 44 конфеты. Каждый из них выбирает по мешку, и они одновременно начинают есть конфеты из своего мешка. Каждый съедает ровно одну конфету за минуту. Когда у кого-то закончатся конфеты, он берёт себе ещё один мешок. Какое максимальное количество конфет может гарантировать себе тот, кто выбирает мешок первым?

40. В стране Семигородии семь городов, стоящих вдоль Семигородской железной дороги в таком порядке: А, Б, В, Г, Д, Е, Ж. Суммарной удалённостью города называется сумма расстояний от этого города до остальных городов, измеренных вдоль железной дороги. В атласе Семигородии указано, что суммарная удалённость для города А составляет 450 км, а для города В – 394 км. Найдите расстояние от А до В в километрах, если оно вдвое больше расстояния от В до В.

50. В Стране Дураков было три республики и ещё несколько областей. В лихую годину республики поочерёдно стали устраивать референдумы и отделяться. На каждом таком отделении Страна Дураков теряла по 20% от своей площади. Потом все эти республики поочерёдно (но в другом порядке) решили присоединиться к Стране Жуликов. На каждом таком присоединении площадь Страны Жуликов увеличивалась на один и тот же процент. Найдите отношение площадей Страны Жуликов и Страны Дураков до лихой години.

## ГЕОМЕТРИЯ

10. При каком наименьшем  $N$  существует диагональ правильного  $N$ -угольника, вдвое большая стороны этого  $N$ -угольника?

20. Три стороны описанного четырёхугольника равны 23, 26 и 53. Чему может быть равна длина четвёртой стороны?

30. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник, стороны которого 7, 65 и 68. Ответ округлите до ближайшего целого числа.

40. На окружности, описанной вокруг правильного треугольника  $ABC$ , взята точка  $D$ . Известно, что  $DA=10$ , а  $DB=40$ . Чему может быть равно  $DC$ ?

50. Какой может быть сторона  $AB$  треугольника  $ABC$ , если  $BC=25$ ,  $AC=30$ , и угол  $B$  вдвое больше угла  $A$ ?

## КОМБИНАТОРИКА

10. Звенья некоторой незамкнутой ломаной покрашены в три цвета: 200 звеньев жёлтые, 7 оранжевые, а все остальные красные. При этом любые два соседних звена разного цвета. Какое наибольшее количество может быть красных звеньев?

20. Найдите количество четырёхзначных чисел, среди любых трёх подряд идущих цифр которых есть хотя бы две различные.

30. В 9 классе учатся 24 человека. Никто из них не любит все дни недели, однако, 23 ученика любят понедельники, 22 – вторники, 22 среды, 20 четверги, 20 пятницы, 20 субботы и 19 воскресенья. Классный руководитель знает, что ленивы те, кто любит и субботу, и воскресенье. Сколько ленивых учеников в классе?

40. На каждую клетку доски размером  $4 \times 4$  поставили одного шахматного коня. Сколькими способами можно походить ими всеми одновременно так, чтобы снова в каждой клетке оказался один конь?

50. Назовём два слова аналогичными, если одно получается из другого перестановкой букв, и любые две буквы, стоящие рядом в одном слове, встречаются стоящими рядом (возможно, в другом порядке). Сколько существует слов, аналогичных слову КОРОМЫСЛО? В этой задаче словом считается любая последовательность букв русского алфавита.

## ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

10. Найдите наименьшее простое число, равное сумме трёх различных простых чисел.
20. Найдите три последних цифры числа  $5^{2014}$ .
30. Сумма 25 натуральных чисел равна 2013. Чему равно наибольшее возможное значение наибольшего общего делителя этих чисел?
40. Найдите наименьшее натуральное число, которое делится на количество своих натуральных делителей и на 5.
50. При каком наименьшем натуральном  $N$  справедлива следующая теорема: «если каждое из  $N$  натуральных чисел не делится на 5, то сумма  $N$ -х степеней этих чисел делится на 5»?

### 9 класс, 2 отбор

## АЛГЕБРА И МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

10. Расставьте в порядке убывания числа  $x=(a+b)(c+d)$ ,  $y=(a+c)(b+d)$ ,  $z=(a+d)(b+c)$ , если известно, что  $a>b>c>d$ . Ответ дайте в виде слова из трёх букв, например,  $zxy$ .
20. Найдите наименьшее и наибольшее значение выражения  $|x+1| - |2x-3| + |x+5|$  ( $x$  может быть любым действительным числом). В ответе укажите через пробел наименьшее и наибольшее значения.
30. Решите систему уравнений:  $x+y=6$ ,  $2xy-z^2=18$ . Ответ дайте в виде списка троек  $(x,y,z)$ .
40. Дана последовательность: 1, 2, 4, 5, 7, 9, 10, 12, ... (одно нечётное, два чётных, три нечётных, четыре чётных и т.д.). Найдите номер первого члена, большего 2014.
50. Сколько из уравнений вида  $x^2 + px - q=0$ , где  $p$  и  $q$  – цифры, имеют хотя бы один натуральный корень?

## ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ

10. У каждого из пиратов есть целое количество пиастров, причём у всех разное. В сумме у них 200 пиастров. Каков минимально возможный суммарный капитал трёх самых богатых пиратов?
20. Трое братьев – Дима, Олег и Саша – произнесли следующие утверждения:
1. Саша старше Олега.
  2. Олег старше Димы.
  3. Дима старше Саши.
  4. Возраст Димы больше, чем сумма возрастов Саши и Олега.
  5. Саша – самый старший из нас.
  6. Олег – самый младший из нас.
- На самом деле из этих утверждений верны только четыре. Какие? Запишите номера этих утверждений в порядке возрастания без запятых и иных символов, как четырёхзначное число, например, 1236.
30. Двое играют в следующую игру. На столе лежат четыре мешка, а в них – 30, 38, 42 и 44 конфеты. Каждый из них выбирает по мешку, и они одновременно начинают есть конфеты из своего мешка. Каждый съедает ровно одну конфету за минуту. Когда у кого-то закончатся конфеты, он берёт себе ещё один мешок. Какое максимальное количество конфет может гарантировать себе тот, кто выбирает мешок первым?
40. В стране Семигородии семь городов, стоящих вдоль Семигородской железной дороги в таком порядке: А, Б, В, Г, Д, Е, Ж. Суммарной удалённостью города называется сумма расстояний от этого города до остальных городов, измеренных вдоль железной дороги. В атласе Семигородии указано, что суммарная удалённость для города Г составляет 450 км, а для города Е – 520 км. Найдите расстояние от Г до Д в километрах, если оно втрое меньше расстояния от Д до Е.
50. В Стране Дураков было четыре республики и ещё несколько областей. В лихую годину республики поочерёдно стали устраивать референдумы и отделяться. На каждом таком отделении Страна Дураков теряла по 10% от своей площади. Потом все эти республики поочерёдно (но в другом порядке) решили присоединиться к Стране Жуликов. На каждом таком присоединении площадь Страны Жуликов увеличивалась на один и тот же процент. Найдите отношение площадей Страны Жуликов и Страны Дураков до лихой години.

## ГЕОМЕТРИЯ

10. При каком наименьшем  $N$  верна теорема «Если в шестиугольнике все углы равны и  $N$  сторон попарно равны, то он правильный»?
20. Три стороны описанного четырёхугольника равны 17, 21 и 40. Чему может быть равна длина четвёртой стороны?

30. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник, стороны которого 24, 35 и 53. Ответ округлите до ближайшего целого числа.

40. На окружности, описанной вокруг правильного треугольника  $ABC$ , взята точка  $D$ . Известно, что  $DC=15$ , а  $DB=48$ . Чему может быть равно  $DA$ ?

50. Какой может быть сторона  $AB$  треугольника  $ABC$ , если  $BC=25$ ,  $AC=40$ , и угол  $B$  вдвое больше угла  $A$ ?

## КОМБИНАТОРИКА

10. Звенья некоторой незамкнутой ломаной покрашены в три цвета: 125 звеньев белые, 4 серые, а все остальные чёрные. При этом любые два соседних звена разного цвета. Какое наименьшее количество может быть чёрных звеньев?

20. Найдите количество пятизначных чисел, среди любых четырёх подряд идущих цифр которых есть хотя бы две различные.

30. В 10 классе учатся 32 человека. Никто из них не любит все дни недели, однако 31 ученик любит понедельники, 30 – вторники, 29 среды, 28 четверги, 25 пятницы, 25 субботы и 24 воскресенья. Классный руководитель знает, что ленивы те, кто любит и субботу, и воскресенье. Сколько ленивых учеников в классе?

40. В центр доски  $101 \times 101$  поставили шахматного коня. Сколькими способами можно за 4 хода посетить этим конём три другие клетки поля и вернуться в изначальную клетку?

50. Назовём два слова аналогичными, если одно получается из другого перестановкой букв, и любые две буквы, стоящие рядом в одном слове, встречаются стоящими рядом (возможно, в другом порядке). Сколько существует слов, аналогичных слову ПЕРЕСЕЛЕНИЕ? В этой задаче словом считается любая последовательность букв русского алфавита.

## ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

10. Найдите наименьшее простое число, равное сумме пяти различных простых чисел.

20. Найдите две последних цифры числа  $24^{2014}$ .

30. Сумма 20 натуральных чисел равна 2015. Чему равно наибольшее возможное значение наибольшего общего делителя этих чисел?

40. Найдите наименьшее натуральное число, которое в 4 раза больше количества своих натуральных делителей.

50. При каком наименьшем натуральном  $N$  справедлива следующая теорема: «если каждое из  $N$  натуральных чисел не делится на 7, то сумма  $N$ -х степеней этих чисел делится на 7»?

## 10 класс, 1 отбор

## АЛГЕБРА И МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

10. Найдите наименьшее и наибольшее значение выражения  $|x+3| - |2x+2| + |x-1|$  ( $x$  может быть любым действительным числом). В ответе укажите через пробел наименьшее и наибольшее значения.

20. Известно, что уравнение  $x^2 + 3 = 7|x|$  имеет более двух корней. Найти сумму всевозможных попарных отношений этих корней (например, для корней 1,2,3 сумма равна  $1/2+2/3+3/1+1/3+3/2+2/1$ ).

30. Для положительных  $x$  и  $y$ , сумма которых равна 5, найдите наименьшее значение суммы  $1/(x+1) + 1/(y+2)$ .

40. Сколько положительных чисел есть среди первых ста членов последовательности  $\sin 1^\circ, \sin 10^\circ, \sin 100^\circ, \dots$ ?

50. Найти хотя бы одну определённую на  $\mathbf{R} \setminus \{0\}$  функцию, для которой  $f(f(X+Y-2)-f(X+Y+2))-f(f(X-Y-2)-f(X-Y+2)) = XY$  при всех  $X$  и  $Y$ , для которых левая часть определена.

## ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ

10. Волшебный эликсир растворяют в воде. Начинаящий маг смешал 30 литров 30%-ного, 40 литров 40%-ного и 50 литров 50%-ного раствора. Сколько литров воды нужно добавить к этой смеси, чтобы получился 20%-ный раствор эликсира?

20. На симпозиуме собрались 100 человек – рыцарей и хитрецов. Рыцари всегда говорят правду, а хитрецы могут как говорить правду, так и лгать. Один из собравшихся произнёс: «Среди нас не меньше двух хитрецов». Второй: «Среди нас не меньше четырёх хитрецов». И так далее до пятидесятого, сказавшего

«Среди нас не меньше ста хитрецов». Остальные промолчали. Каково максимально возможное количество рыцарей на симпозиуме?

**30.** Двое играют в следующую игру. На столе лежат четыре мешка, а в них – 30, 32, 36 и 44 конфеты. Каждый из них выбирает по мешку, и они одновременно начинают есть конфеты из своего мешка. Каждый съедает ровно одну конфету за минуту. Когда у кого-то закончатся конфеты, он берёт себе ещё один мешок. Какое максимальное количество конфет может гарантировать себе тот, кто выбирает мешок первым?

**40.** Буфетчица говорит Коле и Маше: «Вчера каждая девочка из вашего класса купила по пицце, а каждый мальчик – по пирожку. А сегодня – наоборот. В результате сегодня я получила на 114 рублей больше, чем вчера». Известно, что пицца, как и пирожок, стоят целое количество рублей, меньшее 20. Каково минимально возможное количество учеников в классе Коли и Маши?

**50.** Автомобили «Ахиллес» и «Черепаша» ездят по кольцевой дороге, вдоль которой расположены пункты А, Б и В (в порядке движения автомобилей). Стартовали они одновременно: «Ахиллес» из А, а «Черепаша» из Б. Когда «Ахиллес» добрался до Б, «Черепаша» доехала до В; когда «Ахиллес» достиг В, «Черепаша» оказалась в А; когда же «Ахиллес» вернулся в А, «Черепаша» опять была уже в В. Всякий раз, проезжая мимо своего места старта, каждый автомобиль издаёт сигнал. За первый час гонки прозвучали 30 сигналов. Сколько из них принадлежали «Ахиллесу»?

## ГЕОМЕТРИЯ

**10.** Найдите радиус окружности, вписанный в треугольник, стороны которого 7, 65 и 68. Ответ округлите до ближайшего целого числа.

**20.** На окружности, описанной вокруг правильного треугольника  $ABC$ , взята точка  $D$ . Известно, что  $DA=10$ , а  $DB=40$ . Чему может быть равно  $DC$ ?

**30.** Площадь треугольника  $ABC$  равна 1. Найдите наибольшее возможное значение величины  $a^2\sin(2B)+b^2\sin(2A)$ .

**40.** Найдите наибольший угол треугольника, две стороны которого видны из центра описанной окружности под углами  $122^\circ$  и  $104^\circ$ . Ответ запишите в градусах.

**50.** Площадь правильного 12-угольника  $ABCDEFGHIJKL$  равна квадрату диагонали, соединяющей вершину  $A\dots C$  с какой вершиной?

## КОМБИНАТОРИКА

**10.** Найдите количество четырёхзначных чисел, среди любых трёх подряд идущих цифр которых есть хотя бы две различные.

**20.** В 9 классе учатся 24 человека. Никто из них не любит все дни недели, однако, 23 ученика любят понедельник, 22 – вторник, 22 среды, 20 четверги, 20 пятницы, 20 субботы и 17 воскресенья. Классный руководитель знает, что ленивы те, кто любит и субботу, и воскресенье. Сколько ленивых учеников в классе?

**30.** Назовём два слова аналогичными, если одно получается из другого перестановкой букв, и любые две буквы, стоящие рядом в одном слове, встречаются стоящими рядом (возможно, в другом порядке). Сколько существует слов, аналогичных слову КОЛОВОРОТ? В этой задаче словом считается любая последовательность букв русского алфавита.

**40.** Сколько существует решений уравнения  $abc=1089$  в натуральных числах?

**50.** В кружке учатся 11 учеников. Руководитель кружка настолько хорошо знает своих учеников, что для любого набора учеников может подобрать задачу так, чтобы именно эти ученики её решили, а все остальные – нет. Он хочет составить командную олимпиаду таким образом, чтобы любая команда из шести человек могла решить все задачи, а никакая команда из пяти человек не могла. Из какого наименьшего числа задач руководитель кружка может составить такую олимпиаду?

## ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

**10.** Пусть  $N$  – наибольшее целое число, для которого оба числа  $N$  и  $7N$  являются 100-значными. Чему равна 50-я слева цифра числа  $N$ ?

**20.** Сколько существует таких натуральных  $n$ , при которых  $(n^3-12)$  делится нацело на  $(n-4)$ .

**30.** Решите уравнение  $p=q^2+r^2+2014$  в простых числах  $(p,q,r)$ . Ответ дайте в виде списка троек чисел.

**40.** При каком наименьшем натуральном  $N$  справедлива следующая теорема: «если каждое из  $N$  натуральных чисел не делится на 5, то сумма  $N$ -х степеней этих чисел делится на 5»?

**50.** Найдите наименьшее натуральное число, имеющее ровно 10 делителей, пятый из которых в 3 раза больше четвёртого.

## 10 класс, 2 отбор

### АЛГЕБРА И МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

10. Найдите наименьшее и наибольшее значение выражения  $|x+1| - |2x-3| + |x+5|$  ( $x$  может быть любым действительным числом). В ответе укажите через пробел наименьшее и наибольшее значения.

20. Известно, что уравнение  $x^2 + 2 = 5|x|$  имеет более двух корней. Найти сумму всевозможных попарных отношений корней (например, для корней 1,2,3 сумма равна  $1/2+2/3+3/1+1/3+3/2+2/1$ ).

30. Для положительных  $x$  и  $y$ , сумма которых равна 6, найдите наименьшее возможное значение суммы  $1/(x-1) + 1/(y+3)$ .

40. Сколько положительных чисел есть среди первых ста членов последовательности  $\cos 1^\circ, \cos 11^\circ, \cos 101^\circ, \cos 1001^\circ, \dots$  ?

50. Найти хотя бы одну определённую на  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  функцию, для которой  $f(f(X+Y-2)-f(X+Y+2))-f(f(X-Y-2)-f(X-Y+2)) = XY$  при всех  $X$  и  $Y$ , для которых левая часть определена.

### ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ

10. Волшебный эликсир растворяют в воде. Начинаящий маг смешал 50 литров 30%-ного, 40 литров 40%-ного и 30 литров 50%-ного раствора. Сколько литров воды нужно добавить к этой смеси, чтобы получился 20%-ный раствор эликсира?

20. На симпозиуме собрались 200 человек – рыцарей и хитрецов. Рыцари всегда говорят правду, а хитрецы могут как говорить правду, так и лгать. Один из собравшихся произнёс: «Среди нас не меньше двух хитрецов». Второй: «Среди нас не меньше четырёх хитрецов». И так далее до сотого, сказавшего «Среди нас не меньше 200 хитрецов». Остальные промолчали. Каково максимально возможное количество рыцарей на симпозиуме?

30. Двое играют в следующую игру. На столе лежат четыре мешка, а в них – 30, 38, 42 и 44 конфеты. Каждый из них выбирает по мешку, и они одновременно начинают есть конфеты из своего мешка. Каждый съедает ровно одну конфету за минуту. Когда у кого-то закончатся конфеты, он берёт себе ещё один мешок. Какое максимальное количество конфет может гарантировать себе тот, кто выбирает мешок первым?

40. Буфетчица говорит Коле и Маше: «Вчера каждая девочка из вашего класса купила по пицце, а каждый мальчик – по пирожку. А сегодня – наоборот. В результате сегодня я получила на 132 рубля больше, чем вчера». Известно, что пицца, как и пирожок, стоят целое количество рублей, большее 10 и меньшее 20. Каково минимально возможное количество учеников в классе Коли и Маши?

50. Автомобили «Ахиллес» и «Черепаша» ездят по кольцевой дороге, вдоль которой расположены пункты А, Б и В (в порядке движения автомобилей). Стартовали они одновременно: «Ахиллес» из А, а «Черепаша» из Б. Когда «Ахиллес» добрался до Б, «Черепаша» доехала до В; когда «Ахиллес» достиг В, «Черепаша» оказалась в А; когда же «Ахиллес» вернулся в А, «Черепаша» опять была уже в В. Всякий раз, проезжая мимо своего места старта, каждый автомобиль издаёт сигнал. За первый час гонки прозвучали 25 сигналов. Сколько из них принадлежали «Ахиллесу»?

### ГЕОМЕТРИЯ

10. Найдите радиус окружности, вписанный в треугольник, стороны которого 24, 35 и 53.

20. Сторона квадрата равна 12. Внутри него помещена ломаная длины 51. Какое наименьшее число звеньев она может иметь?

30. На окружности, описанной вокруг правильного треугольника  $ABC$ , взята точка  $D$ . Известно, что  $DA=15$ , а  $DB=48$ . Чему может быть равно  $DC$ ?

40. Найдите наибольший угол треугольника, две стороны которого видны из центра описанной окружности под углами  $112^\circ$  и  $98^\circ$ . Ответ запишите в градусах.

50. Площадь правильного 12-угольника  $ABCDEFGHIJKL$  равна утроенному произведению радиуса описанной окружности на диагональ, соединяющую вершину А... С какой вершиной?

### КОМБИНАТОРИКА

10. Найдите количество пятизначных чисел, среди любых четырёх подряд идущих цифр которых есть хотя бы две различные.

20. В 10 классе учатся 32 человека. Никто из них не любит все дни недели, однако 31 ученик любит понедельники, 30 – вторники, 29 среды, 28 четверги, 25 пятницы, 25 субботы и 24 воскресенья. Классный

руководитель знает, что ленивы те, кто любит и субботу, и воскресенье. Сколько ленивых учеников в классе?

**30.** Назовём два слова аналогичными, если одно получается из другого перестановкой букв, и любые две буквы, стоящие рядом в одном слове, встречаются стоящими рядом (возможно, в другом порядке). Сколько существует слов, аналогичных слову ПЕРЕЛЕТ? В этой задаче словом считается любая последовательность букв русского алфавита.

**40.** Сколько существует решений уравнения  $xуz=1000$  в натуральных числах?

**50.** В кружке учатся 13 учеников. Руководитель кружка настолько хорошо знает своих учеников, что для любого набора учеников может подобрать задачу так, чтобы именно эти ученики её решили, а все остальные – нет. Он хочет составить командную олимпиаду таким образом, чтобы любая команда из пяти человек могла решить все задачи, а никакая команда из четырёх человек не могла. Из какого наименьшего числа задач руководитель кружка может составить такую олимпиаду?

## ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

**10.** Пусть  $N$  – наибольшее целое число, квадрат которого является 100-значным. Напишите число, образованное 50-й и 51-й слева цифрами числа  $N^2$ .

**20.** Сколько существует таких натуральных  $n$ , при которых  $(n^2-190)$  делится нацело на  $(n-6)$ .

**30.** Решите уравнение  $2012=p+q^2+r^2$  в простых числах  $(p,q,r)$ . Ответ дайте в виде списка троек чисел.

**40.** При каком наименьшем натуральном  $N$  справедлива следующая теорема: «если каждое из  $N$  натуральных чисел не делится на 5, то сумма  $N$ -х степеней этих чисел делится на 5»?

**50.** Найдите наименьшее натуральное число, имеющее ровно 6 делителей, третий из которых в 5 раз больше второго.

## 11 класс, 1 отбор

## АЛГЕБРА И МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

**10.** Составьте квадратное уравнение с целыми коэффициентами, одним из корней которого является  $\operatorname{ctg} 67,5^\circ$ . В ответе через пробел укажите коэффициенты составленного уравнения.

**20.** Найдите наибольшее значение выражения  $(x+2)^{0,5} + (y+4)^{0,5} + (z+8)^{0,5}$ , если  $x+y+z = 2014$ .

**30.** Известно, что уравнение  $|x| = (17x^2-6) / (3x^2-5)$  имеет больше двух корней. Найти сумму всевозможных попарных отношений этих корней (например, для корней 1,2,3 сумма равна  $1/2+2/3+3/1+1/3+3/2+2/1$ ).

**40.** Найдите 2014-й член последовательности 1, 2, 4, 5, 7, 9, 10, 12, ... (одно нечётное число, два чётных, три нечётных, четыре чётных и т.п.)

**50.** Найти хотя бы одну определённую на  $\mathbf{R}\setminus\{0\}$  функцию, для которой  $f(f(X+Y-2)-f(X+Y+2))-f(f(X-Y-2)-f(X-Y+2)) = XY$  при всех  $X$  и  $Y$ , для которых левая часть определена.

## ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ

**10.** Волшебный эликсир растворяют в воде. Начинаящий маг смешал 30 литров 30%-ного, 40 литров 40%-ного и 50 литров 50%-ного раствора. Сколько литров воды нужно добавить к этой смеси, чтобы получился 20%-ный раствор эликсира?

**20.** На симпозиуме собрались 100 человек – рыцарей и хитрецов. Рыцари всегда говорят правду, а хитрецы могут как говорить правду, так и лгать. Один из собравшихся произнёс: «Среди нас не меньше двух хитрецов». Второй: «Среди нас не меньше четырёх хитрецов». И так далее до пятидесятого, сказавшего «Среди нас не меньше ста хитрецов». Остальные промолчали. Каково максимально возможное количество рыцарей на симпозиуме?

**30.** Двое играют в следующую игру. На столе лежат четыре мешка, а в них – 30, 32, 36 и 44 конфеты. Каждый из них выбирает по мешку, и они одновременно начинают есть конфеты из своего мешка. Каждый съедает ровно одну конфету за минуту. Когда у кого-то закончатся конфеты, он берёт себе ещё один мешок. Какое максимальное количество конфет может гарантировать себе тот, кто выбирает мешок первым?

**40.** Буфетчица говорит Коле и Маше: «Вчера каждая девочка из вашего класса купила по пицце, а каждый мальчик – по пирожку. А сегодня – наоборот. В результате сегодня я получила на 114 рублей больше, чем вчера». Известно, что пицца, как и пирожок, стоят целое количество рублей, меньшее 20. Каково минимально возможное количество учеников в классе Коли и Маши?

**50.** Автомобили «Ахиллес» и «Черепаша» ездят по кольцевой дороге, вдоль которой расположены пункты А, Б и В (в порядке движения автомобилей). Стартовали они одновременно: «Ахиллес» из А, а «Черепаша» из

Б. Когда «Ахиллес» добрался до Б, «Черепашка» доехала до В; когда «Ахиллес» достиг В, «Черепашка» оказалась в А; когда же «Ахиллес» вернулся в А, «Черепашка» опять была уже в В. Всякий раз, проезжая мимо своего места старта, каждый автомобиль издаёт сигнал. За первый час гонки прозвучали 30 сигналов. Сколько из них принадлежали «Ахиллесу»?

## ГЕОМЕТРИЯ

10. Какую фигуру образуют середины диагоналей всех осевых сечений усечённого конуса?
20. Боковые ребра треугольной пирамиды попарно перпендикулярны, их длины равны 2, 4 и 16. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.
30. Площадь треугольника  $ABC$  равна 1. Найдите наибольшее возможное значение величины  $a^2\sin(2B)+b^2\sin(2A)$ .
40. Диаметр барабана лебёдки 316 мм, его длина 680 мм. За время работы на барабан наматывается 130 м троса диаметра 17 мм. Во сколько слоёв наматывается трос? (Неполный слой тоже учитывается: например, если часть барабана покрыта в один слой, а часть в два слоя, то ответом будет 2)
50. Площадь правильного 12-угольника  $ABCDEFGHIJKL$  равна квадрату диагонали, соединяющей вершину  $A$ ... С какой вершиной?

## КОМБИНАТОРИКА

10. Найдите количество четырёхзначных чисел, среди любых трёх подряд идущих цифр которых есть хотя бы две различные.
20. В 9 классе учатся 24 человека. Никто из них не любит все дни недели, однако 23 ученика любят понедельники, 22 – вторники, 22 среды, 20 четверги, 20 пятницы, 20 субботы и 17 воскресенья. Классный руководитель знает, что ленивы те, кто любит и субботу, и воскресенье. Сколько ленивых учеников в классе?
30. Назовём два слова аналогичными, если одно получается из другого перестановкой букв, и любые две буквы, стоящие рядом в одном слове, встречаются стоящими рядом и в другом слове (возможно, в другом порядке). Сколько существует слов, аналогичных слову КОЛОВОРОТ? В этой задаче словом считается любая последовательность букв русского алфавита.
40. Сколько существует решений уравнения  $abc=1089$  в натуральных числах?
50. В кружке учатся 11 учеников. Руководитель кружка настолько хорошо знает своих учеников, что для любого набора учеников может подобрать задачу так, чтобы именно эти ученики её решили, а все остальные – нет. Он хочет составить командную олимпиаду таким образом, чтобы любая команда из шести человек могла решить все задачи, а никакая команда из пяти человек не могла. Из какого наименьшего числа задач руководитель кружка может составить такую олимпиаду?

## ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

10. Пусть  $N$  – наибольшее целое число, для которого оба числа  $N$  и  $7N$  являются 100-значными. Чему равна 50-я слева цифра числа  $N$ ?
20. Сколько существует таких натуральных  $n$ , при которых  $(n^3-12)$  делится нацело на  $(n-4)$  ?
30. Решите уравнение  $p=q^2+r^2+2014$  в простых числах  $(p,q,r)$ . Ответ дайте в виде списка троек чисел  $(p,q,r)$ .
40. При каком наименьшем натуральном  $N$  справедлива следующая теорема: «если каждое из  $N$  натуральных чисел не делится на 5, то сумма  $N$ -х степеней этих чисел делится на 5»?
50. Найдите наименьшее натуральное число, имеющее ровно 10 делителей, пятый из которых в 3 раза больше четвёртого.

## 11 класс, 2 отбор

## АЛГЕБРА И МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

10. Составьте квадратное уравнение с целыми коэффициентами, одним из корней которого является  $\operatorname{tg} 112,5^\circ$ . В ответе через пробел укажите коэффициенты составленного уравнения.
20. Найдите наибольшее значение выражения  $(x+3)^{0,5} + (y+4)^{0,5} + (z+5)^{0,5}$ , если  $x+y+z = 2016$ .
30. Известно, что уравнение  $|x| = (24x^2+2) / (4x^2+13)$  имеет более двух корней. Найти сумму всевозможных попарных отношений корней (например, для корней 1,2,3 эта сумма равна  $1/2+2/3+3/1+1/3+3/2+2/1$ ).
40. Дана последовательность: 1, 2, 4, 5, 7, 9, 10, 12, ... (одно нечётное, два чётных, три нечётных, четыре чётных и т.д.). Найдите номер первого члена, большего 2014.



50. Найти хотя бы одну определённую на  $\mathbf{R} \setminus \{0\}$  функцию, для которой  $f(f(X+Y-2)-f(X+Y+2))-f(f(X-Y-2)-f(X-Y+2)) = XY$  при всех  $X$  и  $Y$ , для которых левая часть определена.

## ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ

10. Волшебный эликсир растворяют в воде. Начинаящий маг смешал 50 литров 30%-ного, 40 литров 40%-ного и 30 литров 50%-ного раствора. Сколько литров воды нужно добавить к этой смеси, чтобы получился 20%-ный раствор эликсира?

20. На симпозиуме собрались 200 человек – рыцарей и хитрецов. Рыцари всегда говорят правду, а хитрецы могут как говорить правду, так и лгать. Один из собравшихся произнёс: «Среди нас не меньше двух хитрецов». Второй: «Среди нас не меньше четырёх хитрецов». И так далее до сотого, сказавшего «Среди нас не меньше 200 хитрецов». Остальные промолчали. Каково максимально возможное количество рыцарей на симпозиуме?

30. Двое играют в следующую игру. На столе лежат четыре мешка, а в них – 30, 38, 42 и 44 конфеты. Каждый из них выбирает по мешку, и они одновременно начинают есть конфеты из своего мешка. Каждый съедает ровно одну конфету за минуту. Когда у кого-то закончатся конфеты, он берёт себе ещё один мешок. Какое максимальное количество конфет может гарантировать себе тот, кто выбирает мешок первым?

40. Буфетчица говорит Коле и Маше: «Вчера каждая девочка из вашего класса купила по пицце, а каждый мальчик – по пирожку. А сегодня – наоборот. В результате сегодня я получила на 132 рубля больше, чем вчера». Известно, что пицца, как и пирожок, стоят целое количество рублей, большее 10 и меньшее 20. Каково минимально возможное количество учеников в классе Коли и Маши?

50. Автомобили «Ахиллес» и «Черепаша» ездят по кольцевой дороге, вдоль которой расположены пункты А, Б и В (в порядке движения автомобилей). Стартовали они одновременно: «Ахиллес» из А, а «Черепаша» из Б. Когда «Ахиллес» добрался до Б, «Черепаша» доехала до В; когда «Ахиллес» достиг В, «Черепаша» оказалась в А; когда же «Ахиллес» вернулся в А, «Черепаша» опять была уже в В. Всякий раз, проезжая мимо своего места старта, каждый автомобиль издаёт сигнал. За первый час гонки прозвучали 25 сигналов. Сколько из них принадлежали «Ахиллесу»?

## ГЕОМЕТРИЯ

10. Какую фигуру образуют середины всех отрезков, концы которых находятся на окружностях оснований усечённого конуса, у которого нижний радиус вдвое больше верхнего?

20. Сторона квадрата равна 12. Внутри него помещена ломаная длины 51. Какое наименьшее число звеньев она может иметь?

30. Боковые ребра треугольной пирамиды попарно перпендикулярны, их длины равны 3, 12 и 18. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

40. Диаметр барабана лебёдки 262 мм, его длина 660 мм. За время работы на барабан наматывается 164 м троса диаметра 22 мм. Во сколько слоёв наматывается трос? (Неполный слой тоже учитывается: например, если часть барабана покрыта в один слой, а часть в два слоя, то ответом будет 2)

50. Площадь правильного 12-угольника  $ABCDEFGHIJKL$  равна утроенному произведению радиуса описанной окружности на диагональ, соединяющую вершину  $A$ ... С какой вершиной?

## КОМБИНАТОРИКА

10. Найдите количество пятизначных чисел, среди любых четырёх подряд идущих цифр которых есть хотя бы две различные.

20. В 10 классе учатся 32 человека. Никто из них не любит все дни недели, однако 31 ученик любит понедельник, 30 – вторник, 29 среды, 28 четверги, 25 пятницы, 25 субботы и 24 воскресенья. Классный руководитель знает, что ленивы те, кто любит и субботу, и воскресенье. Сколько ленивых учеников в классе?

30. Назовём два слова аналогичными, если одно получается из другого перестановкой букв, и любые две буквы, стоящие рядом в одном слове, встречаются стоящими рядом и в другом слове (возможно, в другом порядке). Сколько существует слов, аналогичных слову ПЕРЕЛЕТ? В этой задаче словом считается любая последовательность букв русского алфавита.

40. Сколько существует решений уравнения  $xuz=1000$  в натуральных числах?

50. В кружке учатся 13 учеников. Руководитель кружка настолько хорошо знает своих учеников, что для любого набора учеников может подобрать задачу так, чтобы именно эти ученики её решили, а все остальные – нет. Он хочет составить командную олимпиаду таким образом, чтобы любая команда из пяти человек

могла решить все задачи, а никакая команда из четырёх человек не могла. Из какого наименьшего числа задач руководитель кружка может составить такую олимпиаду?

## ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

**10.** Пусть  $N$  – наибольшее целое число, квадрат которого является 100-значным. Напишите число, образованное 50-й и 51-й слева цифрами числа  $N^2$ .

**20.** Сколько существует таких натуральных  $n$ , при которых  $(n^3-190)$  делится нацело на  $(n-6)$ ?

**30.** Решите уравнение  $2012=p+q^2+r^2$  в простых числах  $(p,q,r)$ . Ответ дайте в виде списка троек чисел.

**40.** При каком наименьшем натуральном  $N$  справедлива следующая теорема: «если каждое из  $N$  натуральных чисел не делится на 5, то сумма  $N$ -х степеней этих чисел делится на 5»?

**50.** Найдите наименьшее натуральное число, имеющее ровно 6 делителей, третий из которых в 5 раз больше второго.