(Антипов М.А.)

9-10 классы

Сюжет 1.

В этом сюжете рассматривается треугольник ABC, на сторонах которого выбраны точки X, Y и Z (по одной точке на каждой стороне). При этом известно, что центры вписанных окружностей треугольников ABC и XYZ совпадают.

1.1. Пусть точки X, Y и Z — середины сторон треугольника ABC. Докажите, что треугольники ABC и XYZ правильные.

1.2. Пусть радиус вписанной окружности ΔXYZ вдвое меньше радиуса вписанной окружности ΔABC. Докажите, что если треугольник XYZ правильный, то и ABC правильный.

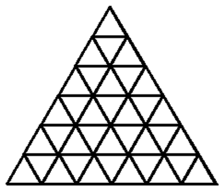
1.3. Пусть радиус вписанной окружности ΔXYZ вдвое меньше радиуса вписанной окружности ΔABC. Докажите, что ΔXYZ правильный.

1.4. Пусть отношение радиуса вписанной окружности ΔABC к радиусу вписанной окружности ΔXYZ равно t. Докажите, что $t^2 \le xy/(p-x)(p-y)$, где $x=YZ$, $y=XZ$, p – полупериметр ΔXYZ.

(Глевинская А.С.)

Сюжет 2.

В этом сюжете рассматривается правильный треугольник со стороной n, разбитый на правильные треугольники со стороной 1. Будем называть эти треугольники разбиения «клетками». Из клеток можно составлять различные связные фигуры. Множество клеток называется связной фигурой, если для любого разбиения этого множества на два меньших какие-то два треугольника из разных множеств имеют общую сторону.



2.1. Какое максимальное количество прямых тетрамино (см. рисунок) можно поместить без пересечений в треугольнике со стороной 6?

2.2. Существует ли такая связная фигура, состоящая из 9 клеток, что в треугольнике со стороной 100 нельзя поместить 1000 её непересекающихся копий?

2.3. Какое максимальное количество прямых тетрамино можно поместить без пересечений в треугольнике со стороной n?

2.4. Докажите, что для всякой связной фигуры из 100 клеток можно разместить две её непересекающиеся копии в треугольнике со стороной 85.

(Самойлов В.С., Теслер А.А.)

Сюжет 3.

3.1. Дано выражение $\pm f(x+1) \pm f(x+2) \pm \ldots \pm f(x+8)$, где $f(x) = x^3$. Расставьте в нём знаки так, чтобы это выражение было константой (т. е. чтобы его значение не зависело от x).

3.2. Пусть в выражении $\pm f(x+1) \pm f(x+2) \pm \ldots \pm f(x+n)$ расставили знаки так, что для $f(x)=x^3$ выражение обращается в константу. Докажите, что это выражение будет константой, если $f(x)$ заменить на любой кубический многочлен.

3.3. Пусть f — кубический многочлен. В выражении $\pm f(x+1) \pm f(x+2) \pm\ldots\pm f(x+n)$ расставили знаки так, что получилась константа. Докажите, что n делится на 4.

3.4. Докажите, что для любого $n>4$, кратного 4, можно расставить знаки в выражении $\pm f(x+1) \pm f(x+2) \pm \ldots \pm f(x+n)$ так, чтобы его значение становилось константой при подстановке любого кубического многочлена f.

(Солынин А.А.)