# 11 класс

**Сюжет 1.**

Пусть $L$ — натуральное число, большее 3. На складе лежат $L$ различных отрезков длины 1, 2, ..., $L$. Пифагор и Архимед по очереди (первым делает ход Пифагор) берут отрезки со склада. Тот, после чьего хода среди всех взятых (кем-либо из них) отрезков можно выбрать три, образующие невырожденный треугольник (т.е. удовлетворяющие неравенству треугольника), проигрывает.

**1.1.** Докажите, что при $L = 4$ и $L = 5$ Пифагор может обеспечить себе победу.

**1.2.** Докажите, что при $L = 6$ и $L = 7$ Архимед может обеспечить себе победу.

Пифагор и Архимед играют в такую игру. Они по очереди рисуют отрезки длины от 1 до L ($L$ — вещественное число, большее 1). Тот, после чьего хода среди всех нарисованных отрезков можно выбрать три, образующие невырожденный треугольник (удовлетворяющих неравенству треугольника), проигрывает. Первым снова ходит Пифагор.

**1.3.** Кто из игроков может обеспечить себе победу при $L = 4$?

**1.4.** Кто из игроков может обеспечить себе победу при $L = 5$?

*(Кноп К.А., Фирдман И.А.)*

**Сюжет 2.**

Пусть $a, b, c$ — действительные числа из отрезка [3;6]. Докажите (или аргументировано опровергните) следующие неравенства:

**2.1.** $a^2+b^2+c^2 \le 1{,}2(ab+ac+ca)$

**2.2.** $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \le \frac{7}{2}$

**2.3.** $\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a} \le \frac{3}{2}$

**2.4.** $\frac{a^2+b}{a^2+c}+\frac{b^2+c}{b^2+a}+\frac{c^2+a}{c^2+b} \le \frac{61}{20}$

*(Кноп К.А.)*

**Сюжет 3.**

**3.1.** Пусть в выражении $\pm f(x+1) \pm f(x+2) \pm \ldots \pm f(x+n)$ расставили знаки так, что для $f(x)=x^3$ выражение обращается в константу. Докажите, что это выражение будет константой, если $f(x)$ заменить на любой кубический многочлен.

**3.2.** Пусть $f$ — кубический многочлен. В выражении $\pm f(x+1) \pm f(x+2) \pm\ldots\pm f(x+n)$ расставили знаки так, что получилась константа. Докажите, что $n$ делится на 4.

**3.3.** Пусть коэффициенты у кубического многочлена целые, а знаки в выражении длины $n$ расставлены так, что получилась константа $d$. Докажите, что $d$ делится на 6.

**3.4.** Докажите, что для любого $n>4$, кратного 4, можно расставить знаки в выражении $\pm f(x+1) \pm f(x+2) \pm \ldots \pm f(x+n)$ так, чтобы его значение становилось константой при подстановке любого кубического многочлена $f$.

*(Солынин А.А.)*