8 класс

1 Графики функций $g(x) = c - ax^2$ и $f(x) = ||x| - b|$ пересекаются так, как показано на рисунке. Найдите ac.

Решение: Рассмотрим (общие) точки пересечения графиков с координатными осями. При $x=0$ имеем $y=c$ и $y=|b|$, откуда $c=|b|$. При $y=0$ имеем $b=|x|$ и $c-ax^2=0$, т.е. $0=c-ax^2=c-a|b|^2=c-ac^2=$ $=c(1-ac)$. Поскольку ИЗ РИСУНКА ВИДНО, что c - не 0, получаем $ac=1$.

2 Вася смотрит на равенство 202 * __ + 212 * __ + 222 * __ = 2014 и хочет вписать на подчёркнутые места цифры так, чтобы сделать равенство верным.
Объясните, почему у Васи не получится.

Решение: Можно рассматривать цель Васи как "взять несколько слагаемых, равных 202, 212, 222, чтобы в сумме набрать 2014". Сколько слагаемых может быть взято? Если их 10, то это уже много, поскольку даже 202*10 = 2020 -больше, чем нужно. А если 9 или еще меньше, то этого мало, поскольку 222*9 = 1998 - меньше, чем нужно.

3 Есть пять городов, любые два соединены дорогой с односторонним движением. Аня устанавливает регламент: выбирает для каждой дороги направление движения. Миша после этого пытается пронумеровать города числами 1, 2, 3, 4, 5 так, чтобы все дороги вели из города с меньшим городом в город с большим номером. Регламент Ани назовём блокирующим, если у Миши нет шансов справиться с задачей. Сколько существует блокирующих регламентов?

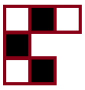
Решение: Что значит, что регламент норм, не блокирующий? Это значит, что можно так расставить числа 1,2,3,4,5 что всё будет как в условии. Заметим, что каждой расстановке чисел соответствует свой норм регламент и по норм регламенту расстановка чисел восстанавливается однозначно (вершина 1= вершина с 0 входящих стрелочек, вершина 2 = вершина с 1 входящей стрелочкой и т.п.) Значит, норм регламентов столько же, сколько и расстановок чисел от 1 до 5 в вершинах, т.е. 5!=120. Блокирующие -это все остальные, значит их $2^{10}-120=904$.
ОТВЕТ: 904.

4 Некоторые натуральные числа покрашены в красный цвет. Известно, что каждое натуральное число либо само красное, либо равно удвоенному красному, либо равно сумме двух различных красных. Может ли среди чисел от 1 до 2013 быть менее 90 красных?

Решение: да. Например, объявим красными числа кратные 50 и все числа от 1 до 49. Поскольку каждое число равно сумме числа кратного 50 и остатка от деления на 50, то условие задачи соблюдается. При этом всего 40+49 красных чисел, не превосходящих 2013.

Комментарий: можно обойтись 88 числами, если вместо кратных 50 взять кратные 44 или 45.

5 На шахматную доску 100x100 положили 10200 несовпадающих доминошек. Докажите, что какие-то три образуют гексамино вида(фигурку можно поворачивать но нельзя переворачивать).



Решение: Рассмотрим произвольную из положенных доминошек. Развернув, если нужно, доску так, чтобы эта доминошка встала вертикально чёрной клеткой вниз, отметим левого соседа этой клетки, если он есть (т.е, если слева – не край доски). Легко видеть, что мы сделали более 10000=10200-200 отметок (неотмеченность может дать только каждая вторая из доминошек, идущих по периметру доски,а таких 199). Поскольку отмечались только белые клетки, а их 10000/2=5000, то какая-то из белых клеток отмечена минимум три раза. Три соответствующие ей доминошки и образуют нужную фигуру.

6 ABCDEFGHIJK и GIMNOPQRSTU – два правильных 11-угольника (порядок вершин указан против часовой стрелки). Докажите, что AP=BQ=IC. (Правильным многоугольником называется многоугольник, у которого все стороны и углы равны).

Решение:
Докажем сначала, что Q, B и I на одной прямой. Обозначим за a угол правильного 11-угольника. Тогда угол QIH = IGH = 90 – a/2. Посчитаем угол QIH = RQI. IGUTSRQ – 7-угольник, значит сумма его углов равна 5*180. QIH = (5*180 – 5a)/2 + (90 – a/2) =540 – 3a. Теперь найдём угол BIH. ABCDEFGH – 8 угольник, т.е. сумма его углов равна 6*180. Угол BIH равен (6*180 – 6a)/2 = 540 – 3a = QIH. Значит, точки что Q, B и I на одной прямой. Аналогично, R, C и I на одной прямой. Теперь докажем, что треугольник QCI равнобедренный, т.е. QC = CI. Найдём угол BIC. BIC = a – CIH – BIJ = a – ((5*180 – 5a)/2) – ((3*180 – 3a)/2) = 5a - 720.
Теперь найдём угол IQC. IQC = a – GQR – IQP = a – 2*((4*180 – 4a)/2) = 5a - 720 = BIC. Следовательно, QC = CI. Картинка симметрична относительно QH, значит CI = QC = QB. Докажем, что QP параллельно CA. Для этого докажем, что угол PAC + угол APQ= 180. APQ = a - (3*180 – 3a)/2 = 5*a/2 - 270 . PAC = 180 – CAI = 180 – (a – (BAC + IAK)) = 180 – (a – (90 – a/2) - (180 – a)) = 180 – (5*a/2 – 270). APQ + PAC = 180, следовательно QP параллельно CA. Также, QP = CA по построению. Следовательно, по признаку параллелограмма, QPAC – параллелограмм, значит QC =QB = CI = PA.

Всего этого адского подсчёта можно избежать, если использовать разные знания об углах, вписанных в окружности. Кроме того, возможны изящные использования гомоворота.

7 Дано натуральное число X<2309. За ход можно либо прибавить 2309, либо разделить на любое натуральное число. Докажите, что можно, сделав менее 30 ходов, вернуться к числу X.
Решение:
Рассмотрим вначале пару чисел (X,2310) и будем выполнять операции не над отдельным числом, а над парой. А именно, если к первому числу прибавляется 2309, то второе число в паре не меняем, а при делении первого числа на K второе также будем делить на K. Заметим, что 2310=2*3*5*7*11.
Рассмотрим произвольное простое число P из этого множества. Если текущее «первое число» Y даёт остаток r при делении на P (где r<P), то после Y+r*2309 делится на P. Выполнив эти r прибавлений и поделив на P , мы уменьшим второе число в паре в P раз, потратив не более
(P-1)+1=P операций. Проделав этот фокус с каждым из множителей 2,3,5,7,11, мы превратим второе число в паре в единицу, потратив не более 2+3+5+7+11=28 операций.

Теперь заметим что если (A,B) -- наша пара в произвольный момент времени,то A-BX делится на 2309. Действительно, для исходной пары это верно, и ни прибавление к A числа 2309, ни одновременное деление A и B на 2,3,5,7 или 11 не способны обрушить эту делимость.
Так что в конце имеем A-X делится на 2309. Несложно видеть, что после каждого деления имеем A<2309, так что из того, что A-X делится на 2309 следует, что A=X, И МЫ ПОБЕДИЛИ.

Решение 2:
Запишем число X вот в таком виде:
X = 2*3*5*7*a + 2*3*5*b + 2*3*c + 2*d + e
где числа a-e мы хотим сделать как можно меньшими (это такая смешанная система счисления).
Очевидно, что e - это просто остаток от деления X на 2, затем d - это остаток от деления
(X-e)/2 на 3, и так далее. Поэтому e<=1, d<=2, c<=4, b<=6, ну и a<=10 в силу ограничения X<2310.
А теперь последовательно проделаем с X следующие операции:

1) прибавим e раз по 2309
2) разделим на 2
3) прибавим d раз 2309
4) разделим на 3
5) прибавим c раз 2309
6) разделим на 5
7) прибавим b раз 2309

8) разделим на 7
9) прибавим a раз 2309
10) разделим на 11.

Сейчас прямой проверкой убедимся, что все операции деления выполнимы (дают целые результаты), а в конце получается число X.

1) X+2309e = 2*3*5*7*a + 2*3*5*b + 2*3*c + 2*d + 2*3*5*7*11*e
2) результат деления на 2 равен 3*5*7*11*e + 3*5*7*a + 3*5*b + 3*c + d
3) после сложения получаем 3*5*7*11*e + 3*5*7*a + 3*5*b + 3*c + 2*3*5*7*11*d
4) результат деления на 3: 2*5*7*11*d + 5*7*11*e + 5*7*a + 5*b + c
5) после сложения: 2*5*7*11*d + 5*7*11*e + 5*7*a + 5*b + 2*3*5*7*11*c
6) после деления на 5: 2*3*7*11*c + 2*7*11*d + 7*11*e + 7*a + b
7) после сложения: 2*3*7*11*c + 2*7*11*d + 7*11*e + 7*a + 2*3*5*7*11*b
8) после деления на 7: 2*3*5*11*b + 2*3*11*c + 2*11*d + 11*e + a
9) после сложения: 2*3*5*11*b + 2*3*11*c + 2*11*d + 11*e + 2*3*5*7*11*a
10) после деления на 11: 2*3*5*7*a + 2*3*5*b + 2*3*c + 2*d + e = X

Общее число операций - не более 1+2+4+6+10 = 23 сложений и 5 делений,
итого 28. "Мы победили" (c) М.А.