6 класс

1) Можно ли расставить в квадратике 3х3 числа от 1 до 4 так, чтобы в каждой строке, каждом столбце и обеих диагоналях было по три различных числа?

Решение: Посмотрим на угловые и центральную клетку. В любой паре таких клеток не может стоять одинаковых чисел. Следовательно, различных чисел хотя бы 5.

2) Однажды, в последний день месяца рассматривая настенный календарь, Костя с удивлением произнёс: “Смотри-ка, а в этом месяце количества В-дней (так Костя называл вторники и воскресенья), С-дней (среды и субботы) и П-дней (понедельники и пятницы) одинаковы!”. “Ничего удивительного, - откликнулся его друг Андрей, - в следующем месяце будет то же самое”. После этого Андрей с Костей посмотрели календарь за два предыдущих месяца и удивились еще больше: в каждом из них тоже В-, С- и П-дней было поровну. Кстати, в какой именно день (укажите точно число, месяц и день недели) состоялся этот разговор?

Решение: Назовём хорошим месяц, где В=П=С.
Заметим, что в течение недели (неважно, с какого дня она начинается) В=С=П=2.
Поэтому любой 28-дневный месяц - хороший (в нём 4 недели, В=П=С=8).
В 29-дневном месяце 4 недели и ещё один день, т.к. для четырёх недель В=П=С, то лишний день (29-е число) должен быть не В-, не П- и не С-днём, т.е. четвергом. (Т.е. 1-е число - тоже четверг)
В 30-дневном месяце два лишних дня (29-ое и 30-ое число); поскольку и В, и П, и С среди них одновременно не встретятся, то они оба должны быть четвергами, что невозможно.
В 31-дневном месяце три лишних дня (29-ое, 30-ое, 31-ое), поэтому среди них должен быть один В, один П и один С. Это возможно, если первый из них - пятница, суббота или понедельник. (Т.е. первый день месяца - тоже пятница, суббота или понедельник)

Теперь поймём, когда среди четырёх подряд идущих месяцев нет ни одного 30-дневного. Это только декабрь, январь, февраль и март.
1 декабря - пятница => 1 января - понедельник => 1 февраля - четверг => 1 марта - четверг (обычный год) или пятница (високосный). Походит только вариант для високосного года.
1 декабря - суббота => 1 января - вторник - плохо.
1 декабря - понедельник => 1 января - четверг - плохо.

Итак, годится только вариант с високосным февралём, где 1 декабря - пятница. Тогда разговор произошёл в четверг, 29 февраля.

3) Найдите наибольшее трехзначное число такое, что если взять какие-то две его цифры (возможно равные, но стоящие на разных местах) и сложить, то результат сложения также будет записан в этом числе (либо цифрой, либо двумя идущими подряд цифрами).

Решение: пример- 910. Больше нельзя, потому-что 1) на втором месте обязана стоять единица, потому-что 9+x>=10. После этого понимаем, что в числе должно присутствовать 10.

4) Имеется 8 золотых монет, среди которых одна фальшивая, и 8 серебряных, среди которых тоже одна фальшивая. Золотые монеты весят по 20 г, серебряные — по 10 г, а фальшивые монеты на 1 г легче настоящих. И есть двухчашечные весы без гирь. На левую чашу разрешается класть только золотые, на правую — только серебряные монеты. Как за шесть взвешиваний гарантированно выявить обе фальшивые монеты?

Решение: 8 серебряных весят 79. Четверка золотых - либо 79, либо 80. Поэтому первым взвешиванием можно сравнить 8с v 4з, в результате найти четверку настоящих золотых.
Тремя следующими взвешиваниями последовательно сравниваем 2з v 4с, 1з v 2с, 1з v 2с - определяем фальшивую серебряную (в последнем взвешивании нужно заменить одну из взвешенных монет на одну заведомо настоящую).

Наконец, имея 4 настоящих серебряных и 4 золотых, среди которых есть фальшивая, сравниваем 2з v 4с и з v 2с - за два этих сравнения находим фальшивую среди золотых.

5) 100 целых чисел стоят по кругу. Сначала между каждыми двумя числами вписали их сумму, а затем вписали сумме между каждыми 200 получившихся чисел. Какое наибольшее количество нечётных чисел может оказаться среди выписанных 400 чисел?

Решение: среди чисел A, 2A+B, A+B и A+2B очевидно не может быть 4 нечетных чисел. Теперь разобьем 400 чисел на четверки такого типа и получим оценку в 300. Пример- берем 100 изначальных нечетных чисел.

6) Мальчик Петя попал в сказочный зверинец волшебника Мерлина, в котором содержатся 100 зверей, каждый из которых на год старше предыдущего. Петя может спрашивать Мерлина, какова разница в возрасте двух выбранных им зверей. Сможет ли он за 100 вопросов найти пару зверей, один из которых самый молодой, а другой самый старый?

Решение: Возьмем произвольного зверя и узнаем разницу в возрасте между ним и всеми остальными зверьми. Если ни одна разница не равна 99 значит наш зверь не крайний. Максимальная разница в возрасте возникает с крайним зверем, пусть она равна X. Значит второй крайний зверь тот, разница с которым равна 99-X. Таких зверей не больше двух, поэтому за оставшийся вопрос мы находим искомого.

7) Имеется 9 городов. Некоторые из них соединены дорогами. Правительство может взять какой-нибудь город под наблюдение. При этом разрушаются все дороги, соединяющие данный город с остальными, зато строятся все дороги между наблюдаемым городом и теми городами, с которыми он не был соединён. Докажите, что такими наблюдениями правительство сможет добиться того, что в стране останется не более 16 дорог.

Решение: Если какой-то город соединён не менее чем с пятью городами, то возьмём его под наблюдение, и количество дорог уменьшится. Если есть два города степени 4, не соединённые между собой, то возьмём один под наблюдение - количество дорог не изменилось, а степень другого стала равна 5. Наконец, если все города степени 4 соединены между собой (тогда их 5 штук), а степень остальных городов меньше 4, то всего дорог не более 16.