Решения задач заключительного этапа

(оценивалось только количество решённых задач)

5 класс

1. Тимур задумал трехзначное число и сказал его Антону, а тот выписал на доску три числа, которые получаются, если вместо одной из цифр исходного числа написать 1 (например, если бы было задумано число 215, Антон выписал бы 115, 215, 211). Сумма всех чисел, выписанных Антоном, оказалась равной 1243. Какое число мог задумать Тимур? Приведите все варианты, и докажите, что других нет

Решение: заметим, что из числа abc получается сумма 1bc+a1c+ab1=111+2*abc. Из уравнения 1243=111+2*abc следует, что abc=566.

2. Можно ли расставить в квадратике 3×3 числа от 1 до 4 так, чтобы в каждой строке, каждом столбце и обеих диагоналях было по три различных числа?

Решение: нет, нельзя. Заметим, что если на клетках одной из диагоналей стоят, например, числа 1,2,3, то в обеих угловых клетках не с этой диагонали могут стоять только четверки – а эти две клетки одновременно лежат на второй диагонали

3. Однажды, в последний день месяца рассматривая настенный календарь, Костя с удивлением произнёс: “Смотри-ка, а в этом месяце количества В-дней (так Костя называл вторники и воскресенья), С-дней (среды и субботы) и П-дней (понедельники и пятницы) одинаковы!”. “Ничего удивительного, - откликнулся его друг Андрей, - в следующем месяце будет то же самое”. После этого Андрей с Костей посмотрели календарь за два предыдущих месяца и удивились еще больше: в каждом из них тоже В-, С- и П-дней было поровну. Кстати, в какой именно день (укажите точно число, месяц и день недели) состоялся этот разговор?

Решение: Назовём хорошим месяц, где В=П=С.
Заметим, что в течение недели (неважно, с какого дня она начинается) В=С=П=2.
Поэтому любой 28-дневный месяц - хороший (в нём 4 недели, В=П=С=8).
В 29-дневном месяце 4 недели и ещё один день, т.к. для четырёх недель В=П=С, то лишний день (29-е число) должен быть не В-, не П- и не С-днём, т.е. четвергом. (Т.е. 1-е число - тоже

четверг)
В 30-дневном месяце два лишних дня (29-ое и 30-ое число); поскольку и В, и П, и С среди них одновременно не встретятся, то они оба должны быть четвергами, что невозможно.
В 31-дневном месяце три лишних дня (29-ое, 30-ое, 31-ое), поэтому среди них должен быть один В, один П и один С. Это возможно, если первый из них - пятница, суббота или понедельник. (Т.е. первый день месяца - тоже пятница, суббота или понедельник)

4. Равносторонний треугольник со стороной 1536 поделен на равносторонние треугольники со стороной 1 (показать рисунок для треугольника со стороной 4). Можно ли разрезать его на фигурки, состоящие из трёх треугольников (показать рисунок)?

Решение: да, можно.
Например, наш треугольник режется на 4 треугольника со стороной 729(вырезается треугольник с вершинами в серединах сторон), а каждый из них – на малые треугольники со стороной 3. Каждый из них режется на три тримино.

5. Имеется 8 золотых монет, среди которых одна фальшивая, и 8 серебряных, среди которых тоже одна фальшивая. Золотые монеты весят по 20 г, серебряные — по 10 г, а фальшивые монеты на 1 г легче настоящих. И есть двухчашечные весы без гирь. На левую чашу разрешается класть только золотые, на правую — только серебряные монеты. Как за шесть взвешиваний гарантированно выявить обе фальшивые монеты?

Решение:
Первое: ЗЗЗЗ vs СССССССС, находим четыре настоящие золотые(«>» - значит монеты с левой чашки, «=» значит те, которые не принимали участие во взвешивании)
Второе:ЗЗ(настоящие) vs СССС(находим 4 настоящие серебряные)
Третье: З(настоящая) vs СС(из числа подозрительных на фальшивость) (находим +2 настоящих серебряных)
Четвертое: З(настоящая) vs СС(одна подозрительная, одна настоящая, находим фальшивую серебряную)
Пятое: ЗЗ(подозрительные) vs СССС(настоящие) (находим +2 настоящих золотых)
Шестое: З(подозрительная) vs СС(настоящие) – находим фальшивую золотую.

6. За круглым столом сидят рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда говорят ложь. Контрразведка сообщила, что один из сидящих за столом может также оказаться шпионом, которого все считают рыцарем, хотя он всегда лжёт. При опросе 12 из сидящих за столом заявили «Мой сосед справа лжец», а остальные — «Мой сосед справа рыцарь». Может ли за столом сидеть шпион?

Решение: Если шпиона нет, то заявление “мой сосед лжец” означает соседство рыцаря со лжецом или лжеца с рыцарем, то есть “чередование”. Поскольку стол круглый, то число таких чередований чётно. Если шпион есть, то последовательность “ЛШР” даст два ответа “мой сосед лжец” вместо одного (который был бы, если бы между Л и Р не было Ш), “ЛШЛ” и “РШР” - по одному такому ответу вместо нуля, а “РШЛ” - 0 ответов вместо 1. Таким образом, если шпион есть, то общее число чередований будет нечетным. Поскольку 12 - чётное число, то шпиона за столом нет.

7. По кругу расположены сто точек, рядом с которыми синей ручкой написаны числа 1, 4, 9, 16, …, 10 000 (квадраты первых 100 натуральных чисел). Каждые две точки соединены отрезком, на котором красной ручкой написана сумма двух чисел, стоящих на концах отрезка. Что больше: сумма чётных красных чисел или сумма нечётных красных чисел?

Решение: Каждое из синих чисел входит в 50 нечётных красных сумм (при сложении с 50 числами иной чётности) и в 49 чётных красных сумм (при сложении с 49 остальными числами, имеющими ту же чётность). Поэтому его вклад в нечётные суммы больше. Значит, сумма нечётных красных чисел больше суммы чётных.