11 класс

Сюжет 1.

Пусть L - натуральное число, большее 3. На складе лежат L различных отрезков длины 1, 2, ..., L. Пифагор и Архимед по очереди (первым делает ход Пифагор) берут отрезки со склада. Тот, после чьего хода среди всех взятых (кем-либо из них) отрезков можно выбрать три, образующие невырожденный треугольник (т.е. удовлетворяющие неравенству треугольника), проигрывает.
1) Докажите, что L=4 и L=5 Пифагор имеет выигрышную стратегию.
2) Докажите, что при L=6 и L=7 выигрышную стратегию имеет Архимед.

Пифагор и Архимед играют в такую игру. Они по очереди рисуют отрезки длины от 1 до L (L - вещественное число, большее 1). Тот, после чьего хода среди всех нарисованных отрезков можно выбрать три, образующие невырожденный треугольник (удовлетворяющих неравенству треугольника), проигрывает. Первым снова ходит Пифагор.
3) Кто имеет выигрышную стратегию при L=4?
4) Кто имеет выигрышную стратегию при L=5?

1) для L=4
так как единственный возможный треугольник имеет стороны 2,3,4, то П. берет со склада отрезок 1 и ждет, пока отрезки закончатся, а это случится после четвёртого хода, который делает А.
для L=5.
Проигрывают треугольники - 2-3-4, 2-4-5, 3-4-5. П. берет со склада 4. Далее если А. берет 1, то П. забирает 2 и выигрывает (потому что ни 3, ни 5 брать нельзя), а если А. берет что-либо еще, то П. забирает 1 и снова выигрывает (легкий перебор случаев).

2) (одна из возможных стратегий!)
L=6. А. (второй) разбивает отрезки на такие пары: 1-2, 3-5, 4-6. В ответ на любой ход П. он забирает парный отрезок. Если были взяты 3-5 или 4-6, то другую из этих пар больше трогать нельзя, поэтому осталась только пара 1-2, и А. "разыгрывает" ее. Если же была взята пара 1-2, то А. продолжает играть дальше по своей парной стратегии.

L=7. По-прежнему ходы 1 и 2 у А. объединены в одну пару, а вот с остальными числами он разбирается не совсем так, как при L=6: на ходы x=5,6 и 7 отвечает x-2, а на ходы x=3 и 4 отвечает x+2. После этого все отрезки, кроме 1 и 2, трогать больше нельзя.

3. Выигрывает А.
Если П. рисует отрезок длины >2, А. строит такой же отрезок, и выигрывает, потому что любой третий отрезок даст треугольник.
Если П. рисует отрезок длины 1.5<a<=2, то А. строит отрезок длины 2,5. Теперь любой следующий отрезок даст треугольник.
Если же П. ходит a<=1,5, то А. всё равно отвечает отрезком длины 2.5.У П. теперь есть ходы длины b в интервале [1, 2,5-a] (<=1,5) или в интервале [2,5+a,4] (>=3,5).

В первом случае второй строит отрезок длины 4 и выигрывает – если отметить длины уже построенных отрезков как точки на интервале [1,4], то расстояние между любыми двумя точками <2, и любое новое число будет образовывать треугольник вместе с ближайшим к нему и числом a>1 (либо с числами a и 2,5-a, если оно <=1,5). Во втором случае второй строит отрезок длины 1 и снова выигрывает.

4. Выигрывает П.
Первый ход A1=2 (это единственный выигрышный ход, все остальное, кажется, проигрывает). Если ответ A2 принадлежит интервалу (1,3) (не включая концы этого интервала), то следующий ход A3 = A2+2 (и все, больше ни одного отрезка, не образовывающего треугольник, отметить уже нельзя). Если ответ A2 принадлежит (3,5) (также не включая концы), то A3=A2-2 (с аналогичным результатом). Наконец, на ходы A2=1 и A2=5 можно отвечать A3=3, после чего всегда остается ровно два хода -

A4=1 и еще одно из чисел 1 и 5. На ход A2=3 можно ответить как A3=5, так и A3=1, с аналогичным результатом.

Сюжет 2.

Пусть a,b,c - действительные числа из отрезка [3;6]. Докажите (или аргументировано опровергните) следующие неравенства:

1. (a^2+b^2+c^2) <= 1.2*(ab+ac+bc).
2. a/b + b/c + c/a <= 7/2
3. a/(a+b)+b/(b+c)+c/(c+a) <= 3/2
4. (a^2+b)/(a^2+c) + (b^2+c)/(b^2+a) + (c^2+a)/(c^2+b) <= 61/20

1) пусть числа упорядочены, b - среднее по величине число, делим все на b^2 и получаем
x^2 + y^2 + 1 <= 1.2 (x+y+xy)
где x= a/b, y=c/b и выполнены ограничения: 1/2 <= x <= 1 <= y <= 2, 1/2 <= x/y <=2
переписав последнее получим, что y/2 <= x <= 1
т.к. неравенство соответствует кв. трехчлену с положительным старшим коэффициентом, то надо проверить его выполнение в концах промежутка. Подставляем y/2 и 1, после чего в получившиеся y^2 - 2.4y + 0.8 <=0 и 0.65y^2 - 1.8y + 1 <=0 подставляем уже 1 и 2.

2) Стандартная лемма. Если положительные числа x и y находятся на числовой прямой по одну сторону от 1, то x+y < 1+xy.
Стандартная "однородная" замена. Пусть a/b=x, b/c=y, c/a=z.
Заметим, что каждая из трех новых величин принадлежит отрезку [0.5;2].
Нас интересует максимум их суммы. Без ограничения общности, x - наименьшее из трех, а z - наибольшее. (Второй случай – когда наибольшее не ПЕРЕД наименьшим, а после него - рассматривается аналогично). Если y>1, то вместо пары (y,z) берем пару (1,yz), что по лемме увеличивает сумму. (yz - допустимое число, потому что оно равно 1/x). Аналогично, если y<1, то вместо пары (x,y) берем пару (xy,

Получаем большую сумму - 1+x+1/x или 1+z+1/z соответственно. Максимумы этих сумм очевидно достигаются при x=1/2 и z=2 соответственно и равны 3.5

3) a/(a+b)+b/(b+c)+c/(c+a) <= 3/2
Это неправда. Если положить a=3, b=6, то получится функция одной переменной
3/9 + 6/(6+c)+c/(c+3), которая легко исследуется и имеет максимум во внутренней точке c=3sqrt(2), а вовсе не на краях отрезка [3;6]. Этот максимум равен 13/3 - 2sqrt(2), и это чуть больше 3/2, потому что sqrt(2) чуть меньше, чем 17/12: 17^2/12^2 = 289/144 > 2.

4) (a^2+b)/(a^2+c) + (b^2+c)/(b^2+a) + (c^2+a)/(c^2+b) <= 61/20
Это тоже неправда, и здесь тоже помогает сразу положить a=3 и b=6, но дальнейшее исследование - технически труднее, и ТОЧНОЕ значение максимума нам пока найти не удалось. Однако доказать, что он больше, чем 61/20 (а это значение достигается при a=b=3, c=6), вполне возможно.

Сюжет 3.

3.1. Тот факт, что x^3 обнуляется, говорит о том, что при раскрытии скобок обнуляются коэффициенты при x^3, x^2 и x. Обнуления их достаточно для обращения выражения в константу при подстановке любого кубического многочлена.

3.2. Поскольку куб должен сократится, то количество + и – одинаково. Далее посмотрим на коэффициент конечной разности при x^2. Он равен 3(+-1+-2+-...+-n)=3n(n+1)/2, так что либо n делится на 4, либо n+1 делится на 4. Последнее невозможно, т.к. n чётно.

3.3. Из обнуления коэффициентов при x и x^2 следует, что сумма ±1 ±2±...±n =0 и такая же сумма с квадратами обнуляется. Поэтому полученная константа это знакопеременная сумма кубов с такими же коэффициентами. (До этого места только выписывание коэффициентов, которое уже отчасти встречалось и раньше). Ну а теперь лишь заметим, что по модулю 6 каждое чимло сравнимо со своим кубом. А значит, знакопеременная сумма кубов сравнима с знакопеременной линейной суммой, а она 0.

3.4. Надо привести пример для 8, для 12, а затем сказать, что можно прибавить 8 к любой расстановке.

Пример для 8: +--+-++-. Пример для 12 придумать непросто: +-+---+++-+-.

Критерии определения победителей и призёров заключительного этапа олимпиады Юношеской математической школы, 2014-15 гг.

По 4 классу:
Победителем считается участник, решивший 5 задач.
Призёром считается участник, решивший не менее 3 задач.

По 5 классу:
Победителем считается участник, решивший не менее 6 задач.
Призёром считается участник, решивший не менее 4 задач.

По 6 классу:
Победителем считается участник, решивший 7 задач.
Призёром считается участник, решивший не менее 4 задач.

По 7 классу:
Победителем считается участник, решивший 7 задач.
Призёром считается участник, решивший не менее 5 задач.

По 8 классу:
Победителем считается участник, решивший 5 задач.
Призёром считается участник, решивший 4 задачи.

По 9 классу:
Победителем считается участник, решивший 10 задач.
Призёром считается участник, решивший от 6 до 9 задач.

По 10 классу:
Победителем считается участник, решивший 10 задач.
Призёром считается участник, решивший не менее 6 задач.

По 11 классу:
Победителем считается участник, решивший 9 задач.
Призёром считается участник, решивший от 5 до 8 задач.