Объединенная межвузовская математическая олимпиада **03.02.2019**

I вариант

Задача 1. Что больше: 1 или $\frac{21}{64}+\frac{51}{154}+\frac{71}{214}$?

Задача 2. В футбольном турнире играли семь команд: каждая команда по одному разу сыграла с каждой. В следующий круг отбираются команды, набравшие тринадцать и более очков. За победу даётся 3 очка, за ничью — 1 очко, за поражение — 0 очков. Какое наибольшее количество команд может выйти в следующий круг?

Задача 3. При каком наименьшем натуральном k выражение $2017\cdot 2018\cdot 2019\cdot 2020+k$ является квадратом натурального числа?

Задача 4. Точка O лежит внутри равнобедренного прямоугольного треугольника ABC. Расстояние от неё до вершины A прямого угла равно 6, до вершины B равно 4, до вершины C равно 8. Найти площадь треугольника ABC.

Задача 5. Обозначим $f(x)=9x^2+8x-2$. Решите уравнение $f(f(x))=x$.

Задача 6. Найдите все значения, которые может принимать выражение

$$3\arcsin x-2\arccos y$$

при условии $x^2+y^2=1$.

Задача 7. Дан треугольник ABC. На отрезках AB и BC выбраны точки X и Y соответственно так, что $AX=BY$. Оказалось, что точки A, X, Y и C лежат на одной окружности. Пусть BL — биссектриса треугольника ABC (L на отрезке AC). Докажите, что $XL\parallel BC$.

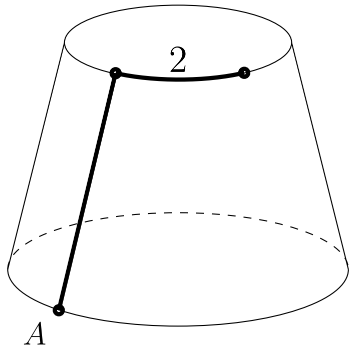
Задача 8. При каких значениях параметра a уравнение

$$\log_2(2x^2+(2a+1)x-2a)-2\log_4(x^2+3ax+2a^2)=0$$

имеет два различных корня, сумма квадратов которых больше 4?

Задача 9. В школе имеется три кружка: по математике, по физике и по информатике. Директор как-то заметил, что среди участников кружка по математике ровно 1/6 часть ходит ещё и на кружок по физике, а 1/8 часть — на кружок по информатике; среди участников кружка по физике ровно 1/3 часть ходит ещё и на кружок по математике, а ровно 1/5 — на кружок по информатике; наконец, среди участников кружка по информатике ровно 1/7 часть ходит на кружок по математике. А какая часть участников кружка по информатике ходит на кружок по физике?

Задача 10. Назовём *горой* усечённый прямой круговой конус с длиной окружности нижнего основания 8, а верхнего основания — 6. Склон горы наклонён под углом 60° к плоскости основания. На окружности нижнего основания лежит точка A. Турист начинает подъём по склону из точки A к ближайшей точке верхнего основания, а затем продолжает свой путь по краю верхнего основания, и проходит расстояние 2 (см. рис). После этого он возвращается в точку A кратчайшим маршрутом. Чему равна длина обратного пути?



II вариант

Задача 1. Что больше: 1 или $\dfrac{27}{80}+\dfrac{46}{137}+\dfrac{63}{188}$?

Задача 2. В футбольном турнире играли семь команд: каждая команда по одному разу сыграла с каждой. В следующий круг отбираются команды, набравшие двенадцать и более очков. За победу даётся 3 очка, за ничью — 1 очко, за поражение — 0 очков. Какое наибольшее количество команд может выйти в следующий круг?

Задача 3. При каком наименьшем натуральном k выражение $2019 \cdot 2020 \cdot 2021 \cdot 2022 + k$ является квадратом натурального числа?

Задача 4. Точка O лежит внутри равнобедренного прямоугольного треугольника ABC. Расстояние от неё до вершины A прямого угла равно 5, до вершины B равно 6, до вершины C равно 4. Найти площадь треугольника ABC.

Задача 5. Обозначим $f(x) = 3x^2 - 7x - 11$. Решите уравнение $f(f(x)) = x$.

Задача 6. Найдите все значения, которые может принимать выражение

$$4 \arcsin x - \arccos y$$

при условии $x^2 + y^2 = 1$.

Задача 7. Дан треугольник ABC. На отрезках AB и BC выбраны точки X и Y соответственно так, что $AX = BY$. Оказалось, что точки A, X, Y и C лежат на одной окружности. Пусть L — такая точка на отрезке AC, что $XL \parallel BC$. Докажите, что BL — биссектриса треугольника ABC.

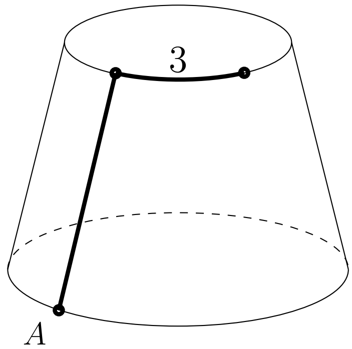
Задача 8. При каких значениях параметра a уравнение

$$2\log_{16}(2x^2 - x - 2a - 4a^2) - \log_4(x^2 - ax - 2a^2) = 0$$

имеет два различных корня, сумма квадратов которых принадлежит интервалу $(0; 4)$?

Задача 9. В лагерь приехали школьники, среди которых были Петя, Вася и Тимофей, не знакомые друг с другом, однако у каждого из которых были знакомые среди приехавших детей. Петя заметил, что ровно 1/2 его знакомых знакома с Васей, а ровно 1/7 – с Тимофеем; Вася заметил, что 1/3 его знакомых знакомы с Петей, а 1/6 — с Тимофеем; наконец, Тимофей заметил, что ровно 1/5 его знакомых знакомы с Петей. А какую часть среди знакомых Тимофея составляют знакомые Васи?

Задача 10. Назовём *горой* усечённый прямой круговой конус с длиной окружности нижнего основания 10, а верхнего основания — 9. Склон горы наклонён под углом 60° к плоскости основания. На окружности нижнего основания лежит точка A. Турист начинает подъём по склону из точки A к ближайшей точке верхнего основания, а затем продолжает свой путь по краю верхнего основания, и проходит расстояние 3 (см. рис). После этого он возвращается в точку A кратчайшим маршрутом. Чему равна длина обратного пути?



Объединенная межвузовская математическая олимпиада **03.02.2019**

III вариант

Задача 1. Что больше: 1 или $\frac{23}{93}+\frac{41}{165}+\frac{71}{143}$?

Задача 2. В футбольном турнире играли восемь команд: каждая команда по одному разу сыграла с каждой. В следующий круг отбираются команды, набравшие пятнадцать и более очков. За победу даётся 3 очка, за ничью — 1 очко, за поражение — 0 очков. Какое наибольшее количество команд может выйти в следующий круг?

Задача 3. При каком наименьшем натуральном k выражение $2018 \cdot 2019 \cdot 2020 \cdot 2021 + k$ является квадратом натурального числа?

Задача 4. Точка O лежит внутри равнобедренного прямоугольного треугольника ABC. Расстояние от неё до вершины A прямого угла равно 5, до вершины B равно 7, до вершины C равно 3. Найти площадь треугольника ABC.

Задача 5. Обозначим $f(x) = 7x^2 + 6x - 2$. Решите уравнение $f(f(x)) = x$.

Задача 6. Найдите все значения, которые может принимать выражение

$$2\arcsin x - \arccos y$$

при условии $x^2 + y^2 = 1$.

Задача 7. Дан треугольник ABC. Пусть BL — биссектриса треугольника ABC (L на отрезке AC), X — такая точка на отрезке AB, что $XL \parallel BC$. На отрезке BC нашлась точка Y такая, что $AX = BY$. Докажите, что точки A, X, Y и C лежат на одной окружности.

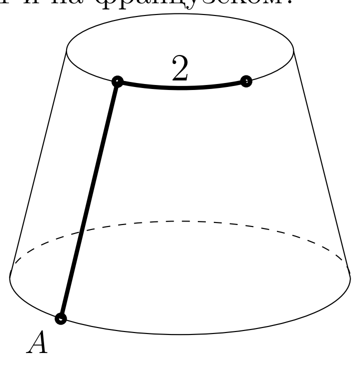
Задача 8. При каких значениях параметра a уравнение

$$\log_3(2x^2 - x + 2a - 4a^2) + \log_{1/3}(x^2 + ax - 2a^2) = 0$$

имеет два различных корня, сумма квадратов которых меньше 1?

Задача 9. На конференции присутствовали несколько учёных, некоторые из которых говорят на английском языке, некоторые на французском, а некоторые – на немецком. Устроители конференции заметили, что среди тех, кто говорит на английском ровно 1/5 говорит на французском, а ровно 1/3 — на немецком; среди тех, кто говорит на французском ровно 1/8 говорит на английском, а ровно 1/2 — на немецком; наконец, среди тех, кто говорит на немецком, ровно 1/6 говорит и на английском. А какую часть среди тех, кто говорит на немецком составляют те, кто говорит и на французском?

Задача 10. Назовём *горой* усечённый прямой круговой конус с длиной окружности нижнего основания 8, а верхнего основания — 6. Склон горы наклонён под углом 60° к плоскости основания. На окружности нижнего основания лежит точка A. Турист начинает подъём по склону из точки A к ближайшей точке верхнего основания, а затем продолжает свой путь по краю верхнего основания, и проходит расстояние 2 (см. рис). После этого он возвращается в точку A кратчайшим маршрутом. Чему равна длина обратного пути?



Объединенная межвузовская математическая олимпиада **03.02.2019**

IV вариант

Задача 1. Что больше: 1 или $\dfrac{18}{71}+\dfrac{47}{187}+\dfrac{59}{117}$?

Задача 2. В футбольном турнире играли шесть команд: каждая команда по одному разу сыграла с каждой. В следующий круг отбираются команды, набравшие двенадцать и более очков. За победу даётся 3 очка, за ничью — 1 очко, за поражение — 0 очков. Какое наибольшее количество команд может выйти в следующий круг?

Задача 3. При каком наименьшем натуральном k выражение $2016\cdot 2017\cdot 2018\cdot 2019+k$ является квадратом натурального числа?

Задача 4. Точка O лежит внутри равнобедренного прямоугольного треугольника ABC. Расстояние от неё до вершины A прямого угла равно 6, до вершины B равно 9, до вершины C равно 3. Найти площадь треугольника ABC.

Задача 5. Обозначим $f(x)=4x^2+7x-10$. Решите уравнение $f(f(x))=x$.

Задача 6. Найдите все значения, которые может принимать выражение

$$5\arcsin x-2\arccos y$$

при условии $x^2+y^2=1$.

Задача 7. Дан треугольник ABC. Пусть BL — биссектриса треугольника ABC (L на отрезке AC), X — такая точка на отрезке AB, что $XL\parallel BC$. Описанная окружность треугольника AXC пересекает отрезок BC в точках C и Y. Докажите, что $AX=BY$.

Задача 8. При каких значениях параметра a уравнение

$$\log_2(2x^2-x-2a-4a^2)+3\log_{1/8}(x^2-ax-2a^2)=0$$

имеет два различных корня, сумма квадратов которых принадлежит интервалу $(4;8)$?

Задача 9. На детский праздник дети приносили из дома угощенья: печенье, конфеты и вафли. Классный руководитель заметила, что среди тех, кто принёс печенье ровно $1/3$ принесли и конфеты, а ровно $1/4$ — принесли и вафли; среди тех, кто принёс конфеты ровно $1/7$ часть принесли и печенье, а ровно $1/8$ — и вафли; наконец, среди тех, кто принёс вафли, ровно $1/2$ принесли и печенье. А какую часть среди тех, кто принёс вафли, составляют те, кто принёс ещё и конфеты?

Задача 10. Назовём *горой* усечённый прямой круговой конус с длиной окружности нижнего основания 10, а верхнего основания — 9. Склон горы наклонён под углом 60° к плоскости основания. На окружности нижнего основания лежит точка A. Турист начинает подъём по склону из точки A к ближайшей точке верхнего основания, а затем продолжает свой путь по краю верхнего основания, и проходит расстояние 3 (см. рис). После этого он возвращается в точку A кратчайшим маршрутом. Чему равна длина обратного пути?