Объединенная межвузовская математическая олимпиада **04.02.2018**

I вариант

Задача 1. Докажите неравенство

$$\log_{2015} 2017 > \frac{\log_{2015} 1 + \log_{2015} 2 + \ldots + \log_{2015} 2016}{2016}.$$

Задача 2. n грибников ходили в лес и принесли суммарно 200 грибов (возможно, некоторые из грибников не принесли домой ни одного гриба). Мальчик Петя, узнав об этом, заявил: «Какие-то двое из них обязательно принесли одинаковое количество грибов!» При каком наименьшем n мальчик Петя наверняка окажется прав? Не забудьте обосновать свой ответ.

Задача 3. Вася хочет найти все целые числа a такие, что выражение $10n^3 - 3n^5 + 7an$ делится на 15 для всех целых n. Какие остатки может давать число a при делении на 15? Укажите все возможные ответы или докажите, что таких целых чисел a нет.

Задача 4. В трапецию $ABCD$ вписана окружность, касающаяся боковой стороны AD в точке K. Найдите площадь трапеции, если $AK = 16$, $DK = 4$ и $CD = 6$.

Задача 5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 &= (y-z)^2 - 3 \\ y^2 &= (z-x)^2 - 7 \\ z^2 &= (x-y)^2 + 21 \end{cases}.$$

Задача 6. Изобразите (с обоснованием) на координатной плоскости Oxy множество решений неравенства

$$(y^2 - \arcsin^2(\sin x)) \cdot (y^2 - \arcsin^2(\sin(x + \pi/3))) \cdot (y^2 - \arcsin^2(\sin(x - \pi/3))) < 0.$$

Задача 7. Точки A_1, B_1, C_1 — точки пересечения продолжений высот остроугольного треугольника ABC с описанной вокруг ABC окружностью. Окружность, вписанная в треугольник $A_1B_1C_1$, касается одной из сторон ABC, а один из углов треугольника ABC равен $40°$. Найдите два других угла треугольника ABC.

Задача 8. При каких значениях параметра a уравнение

$$3^{x^2-2ax+a^2} = ax^2 - 2a^2x + a^3 + a^2 - 4a + 4$$

имеет ровно одно решение?

Задача 9. В десятичной записи чётного числа M участвуют только цифры 0, 2, 4, 5, 7 и 9, цифры могут повторяться. Известно, что сумма цифр числа $2M$ равняется 35, а сумма цифр числа $M/2$ равняется 29. Какие значения может принимать сумма цифр числа M? Укажите все возможные ответы.

Задача 10. Точки M, N и K расположены на боковых рёбрах AA_1, BB_1 и CC_1 треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ так, что $AM : AA_1 = 1 : 2$, $BN : BB_1 = 1 : 3$, $CK : CC_1 = 1 : 4$. Точка P принадлежит призме. Найдите наибольшее возможное значение объема пирамиды $MNKP$, если объём призмы равен 16.

Объединенная межвузовская математическая олимпиада **04.02.2018**

II вариант

Задача 1. Докажите неравенство

$$\log_{2017} 2019 > \frac{\log_{2017} 1 + \log_{2017} 2 + \ldots + \log_{2017} 2018}{2018}.$$

Задача 2. n грибников ходили в лес и принесли суммарно 338 грибов (возможно, некоторые из грибников не принесли домой ни одного гриба). Мальчик Петя, узнав об этом, заявил: «Какие-то двое из них обязательно принесли одинаковое количество грибов!» При каком наименьшем n мальчик Петя наверняка окажется прав? Не забудьте обосновать свой ответ.

Задача 3. Вася хочет найти все целые числа a такие, что выражение $5n^3 + 6n^5 + 4an$ делится на 15 для всех целых n. Какие остатки может давать число a при делении на 15? Укажите все возможные ответы или докажите, что таких целых чисел a нет.

Задача 4. В трапецию $ABCD$ вписана окружность радиуса 4, касающаяся основания AB в точке M. Найдите площадь трапеции, если $BM = 16$ и $CD = 3$.

Задача 5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 &= (y-z)^2 - 3 \\ y^2 &= (z-x)^2 - 9 \\ z^2 &= (x-y)^2 + 27 \end{cases}.$$

Задача 6. Изобразите (с обоснованием) на координатной плоскости Oxy множество решений неравенства

$$(y^2 - \arccos^2(\cos x)) \cdot (y^2 - \arccos^2(\cos(x + \pi/3))) \cdot (y^2 - \arccos^2(\cos(x - \pi/3))) < 0.$$

Задача 7. Точки A_1, B_1, C_1 — точки пересечения продолжений высот остроугольного треугольника ABC с описанной вокруг ABC окружностью. Окружность, вписанная в треугольник $A_1B_1C_1$, касается одной из сторон ABC, а один из углов треугольника ABC равен $50°$. Найдите два других угла треугольника ABC.

Задача 8. При каких значениях параметра a уравнение

$$3^{x^2+6ax+9a^2} = ax^2 + 6a^2x + 9a^3 + a^2 - 4a + 4$$

имеет ровно одно решение?

Задача 9. В десятичной записи чётного числа M участвуют только цифры 0, 2, 4, 5, 7 и 9, цифры могут повторяться. Известно, что сумма цифр числа $2M$ равняется 31, а сумма цифр числа $M/2$ равняется 28. Какие значения может принимать сумма цифр числа M? Укажите все возможные ответы.

Задача 10. Точки M, N и K расположены на боковых рёбрах AA_1, BB_1 и CC_1 треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ так, что $AM : AA_1 = 2 : 3$, $BN : BB_1 = 3 : 5$, $CK : CC_1 = 4 : 7$. Точка P принадлежит призме. Найдите наибольшее возможное значение объема пирамиды $MNKP$, если объём призмы равен 27.

Объединенная межвузовская математическая олимпиада **04.02.2018**

III вариант

Задача 1. Докажите неравенство

$$\log_{2016} 2018 > \frac{\log_{2016} 1 + \log_{2016} 2 + \ldots + \log_{2016} 2017}{2017}.$$

Задача 2. n грибников ходили в лес и принесли суммарно 450 грибов (каждый принёс домой хотя бы по одному грибу). Мальчик Петя, узнав об этом, заявил: «Какие-то двое из них обязательно принесли одинаковое количество грибов!» При каком наименьшем n мальчик Петя наверняка окажется прав? Не забудьте обосновать свой ответ.

Задача 3. Вася хочет найти все целые числа a такие, что выражение $10n^3 + 3n^5 + 7an$ делится на 15 для всех целых n. Какие остатки может давать число a при делении на 15? Укажите все возможные ответы или докажите, что таких целых чисел a нет.

Задача 4. В трапецию $ABCD$ вписана окружность, касающаяся боковой стороны BC в точке L. Найдите площадь трапеции, если $BL = 4$, $CL = \frac{1}{4}$ и $AB = 6$.

Задача 5. Решите систему уравнений

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x^2 & = & (y-z)^2 - 8 \\ y^2 & = & (z-x)^2 - 16 \\ z^2 & = & (x-y)^2 + 32 \end{array} \right. .$$

Задача 6. Изобразите (с обоснованием) на координатной плоскости Oxy множество решений неравенства

$$(y^2 - \arcsin^2(\sin x)) \cdot (y^2 - \arcsin^2(\sin(x + \pi/6))) \cdot (y^2 - \arcsin^2(\sin(x - \pi/6))) < 0.$$

Задача 7. Точки A_1, B_1, C_1 — точки пересечения продолжений высот остроугольного треугольника ABC с описанной вокруг ABC окружностью. Окружность, вписанная в треугольник $A_1B_1C_1$, касается одной из сторон ABC, а один из углов треугольника ABC равен 70°. Найдите два других угла треугольника ABC.

Задача 8. При каких значениях параметра a уравнение

$$5^{x^2-6ax+9a^2} = ax^2 - 6a^2x + 9a^3 + a^2 - 6a + 6$$

имеет ровно одно решение?

Задача 9. В десятичной записи чётного числа M участвуют только цифры 0, 2, 4, 5, 7 и 9, цифры могут повторяться. Известно, что сумма цифр числа $2M$ равняется 43, а сумма цифр числа $M/2$ равняется 31. Какие значения может принимать сумма цифр числа M? Укажите все возможные ответы.

Задача 10. Точки M, N и K расположены на боковых рёбрах AA_1, BB_1 и CC_1 треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ так, что $AM : AA_1 = 3 : 7$, $BN : BB_1 = 2 : 5$, $CK : CC_1 = 4 : 9$. Точка P принадлежит призме. Найдите наибольшее возможное значение объема пирамиды $MNKP$, если объём призмы равен 40.

Объединенная межвузовская математическая олимпиада **04.02.2018**

IV вариант

Задача 1. Докажите неравенство

$$\log_{2018} 2020 > \frac{\log_{2018} 1 + \log_{2018} 2 + \ldots + \log_{2018} 2019}{2019}.$$

Задача 2. n грибников ходили в лес и принесли суммарно 162 грибов (каждый принёс домой хотя бы по одному грибу). Мальчик Петя, узнав об этом, заявил: «Какие-то двое из них обязательно принесли одинаковое количество грибов!» При каком наименьшем n мальчик Петя наверняка окажется прав? Не забудьте обосновать свой ответ.

Задача 3. Вася хочет найти все целые числа a такие, что выражение $5n^3 + 9n^5 + 8an$ делится на 15 для всех целых n. Какие остатки может давать число a при делении на 15? Укажите все возможные ответы или докажите, что таких целых чисел a нет.

Задача 4. В трапецию $ABCD$ вписана окружность радиуса 2, касающаяся основания CD в точке N. Найдите площадь трапеции, если $DN = 1$ и $AB = 12$.

Задача 5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 & = & (y-z)^2 - 8 \\ y^2 & = & (z-x)^2 - 20 \\ z^2 & = & (x-y)^2 + 40 \end{cases}.$$

Задача 6. Изобразите (с обоснованием) на координатной плоскости Oxy множество решений неравенства

$$(y^2 - \arccos^2(\cos x)) \cdot (y^2 - \arccos^2(\cos(x + \pi/6))) \cdot (y^2 - \arccos^2(\cos(x - \pi/6))) < 0.$$

Задача 7. Точки A_1, B_1, C_1 — точки пересечения продолжений высот остроугольного треугольника ABC с описанной вокруг ABC окружностью. Окружность, вписанная в треугольник $A_1B_1C_1$, касается одной из сторон ABC, а один из углов треугольника ABC равен $80°$. Найдите два других угла треугольника ABC.

Задача 8. При каких значениях параметра a уравнение

$$5^{x^2+2ax+a^2} = ax^2 + 2a^2x + a^3 + a^2 - 6a + 6$$

имеет ровно одно решение?

Задача 9. В десятичной записи чётного числа M участвуют только цифры 0, 2, 4, 5, 7 и 9, цифры могут повторяться. Известно, что сумма цифр числа $2M$ равняется 39, а сумма цифр числа $M/2$ равняется 30. Какие значения может принимать сумма цифр числа M? Укажите все возможные ответы.

Задача 10. Точки M, N и K расположены на боковых рёбрах AA_1, BB_1 и CC_1 треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ так, что $AM : AA_1 = 5 : 6$, $BN : BB_1 = 6 : 7$, $CK : CC_1 = 2 : 3$. Точка P принадлежит призме. Найдите наибольшее возможное значение объема пирамиды $MNKP$, если объём призмы равен 35.