Вариант I

Задача 1. Докажите неравенство

$$\log_{2015} 2017 > \frac{\log_{2015} 1 + \log_{2015} 2 + \ldots + \log_{2015} 2016}{2016}.$$

Решение. После умножения обеих частей на 2016 и некоторых преобразований, получаем, что нам достаточно доказать неравенство

$$\log_{2015} 2017^{2016} > \log_{2015}(1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2016).$$

Указанное неравенство следует из того, что $2017^{2016} > 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2016$, а последнее получается перемножением 2016 неравенств $2017 > 1$, $2017 > 2$, $\ldots$, $2017 > 2016$.

Задача 2. n грибников ходили в лес и принесли суммарно 200 грибов (возможно, некоторые из грибников не принесли домой ни одного гриба). Мальчик Петя, узнав об этом, заявил: «Какие-то двое из них обязательно принесли одинаковое количество грибов!» При каком наименьшем n мальчик Петя наверняка окажется прав? Не забудьте обосновать свой ответ.

Ответ: 21.

Решение. Для начала докажем, что при $n \leqslant 20$ Петя может ошибиться. Предположим, что первые $n-1$ грибников собрали соответственно $0, 1, \ldots, n-2$ гриба, а n-й — все остальные. Поскольку

$$0 + 1 + \ldots + (n-2) \leqslant 0 + 1 + \ldots + 18 = 171 = 200 - 29,$$

то последний грибник собрал не менее 29 грибов, т.е. больше, чем каждый из остальных. Итак, при $n \leqslant 20$ существует пример, когда Петя мог быть не прав.

Покажем, что при $n = 21$ Петя всегда окажется прав. Предположим, что он не прав и пусть грибники собрали $a_0 < a_1 < \ldots < a_{20}$ грибов. Несложно видеть, что $a_i \geqslant i$, откуда

$$200 = a_0 + a_1 + \ldots + a_{20} \geqslant 0 + 1 + \ldots + 20 = 210,$$

противоречие.

Задача 3. Вася хочет найти все целые числа a такие, что выражение $10n^3 - 3n^5 + 7an$ делится на 15 для всех целых n. Какие остатки может давать число a при делении на 15? Укажите все возможные ответы или докажите, что таких целых чисел a нет.

Ответ: 14.

Решение. Для начала покажем, что $n^3 \equiv n \pmod 3$ и $n^5 \equiv n \pmod 5$ для любого натурального n. Это можно сделать несколькими способами. Приведём лишь три из них.

Первый способ. Разобьём все натуральные числа на группы по их остаткам при делении на 3 и 5:

n	n^3	$n^3 \bmod 3$
0	0	0
1	1	1
2	8	2

n	n^5	$n^5 \bmod 5$
0	0	0
1	1	1
2	32	2
3	243	3
4	1024	4

Из таблицы видно, что доказываемое утверждение верно.

Второй способ. Заметим, что $n^3 - n = (n-1)n(n+1)$ — произведение трёх последовательных целых чисел, а

$$n^5 - n = (n-1)n(n+1)(n^2+1) \equiv (n-1)n(n+1)(n^2-4) = (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2) \pmod 5$$

— произведение пяти последовательных целых чисел. В первом случае выражение всегда делится на 3, а во втором — на 5, что и требовалось.

Третий способ состоит в том, чтобы сказать, что эти утверждения являются частными случаями малой теоремы Ферма[1].

Теперь взглянем на исходное выражение по модулю 3:

$$10n^3 - 3n^5 + 7an \equiv 10n + 7an \equiv (a+1) \cdot n \pmod{3}.$$

Это выражение делится на 3 при любом целом n тогда и только тогда, когда $a+1$ кратно 3, т.е. когда a даёт остаток 2 при делении на 3. Аналогично, $10n^3 - 3n^5 + 7an \equiv (2a+2) \cdot n \pmod{5}$, т.е. $2a+2$ делится на 5, a даёт остаток 4 при делении на 5.

Итак, $a \equiv 2 \pmod{3}$ и $a \equiv 4 \pmod{5}$, т.е. $a \equiv 14 \pmod{15}$.

Другое решение. Подставим $n = 1$ и получим, что если такое a и существует, то $7 + 7a$ должно делится на 15, т.е. a должно давать остаток 14 при делении на 15. Осталось проверить, что если $a \equiv 14 \pmod{15}$, то указанное выражение делится на 15 для любого натурального n. Это можно сделать многими способами (см., например, первое решение). Приведём здесь ещё один.

Докажем это утверждение индукцией по n (для $n = 0$ делимость очевидна, для отрицательных n доказывается аналогично или сводится к случаю положительного n заменой $n \to -n$). Если $n = 1$, утверждение уже проверено. Предположим теперь, что мы уже доказали, что $10n^3 - 3n^5 + 7an$ делится на 15 и докажем, что $10(n+1)^3 - 3(n+1)^5 + 7a(n+1)$ также делится на 15. Посмотрим на разность этих двух выражений:

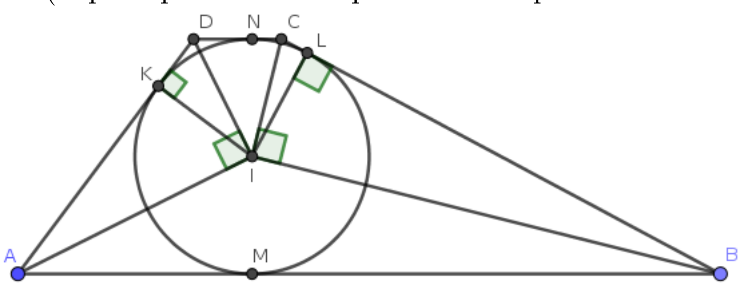
$$10\left((n+1)^3 - n^3\right) - 3\left((n+1)^5 - n^5\right) + 7a\left((n+1) - n\right) = 10(3n^2+3n+1) - 3(5n^4+10n^3+10n^2+5n+1) + 7a.$$

После раскрытия скобок все слагаемые в правой части, кроме $10 - 3 + 7a$, делятся на 15, но $10 - 3 + 7a$ делится на 15, поскольку $a \equiv 14 \pmod{15}$.

Задача 4. В трапецию $ABCD$ вписана окружность, касающаяся боковой стороны AD в точке K. Найдите площадь трапеции, если $AK = 16$, $DK = 4$ и $CD = 6$.

Ответ: 432.

Решение. Пусть L, M, N — точки касания вписанной окружности со сторонами BC, AB, CD соответственно; пусть I — центр вписанной окружности. Радиус окружности обозначим через r. Сразу заметим, что $DN = DK = 4$ (первое равенство из равенства отрезков касательных), откуда $CL = CN = CD - DN = 2$ (первое равенство из равенства отрезков касательных, второе очевидно).



Поскольку I является точкой пересечения биссектрис внутренних углов трапеции, то $\angle IAD + \angle IDA = (\angle DAB + \angle ADC)/2 = 180^\circ/2 = 90^\circ$, где предпоследнее равенство следует из параллельности прямых AB и CD. Следовательно, треугольник AID прямоугольный и $\angle AID = 90^\circ$. Аналогично, прямоугольным является и треугольник BIC.

Далее, поскольку IK и IL являются радиусами, проведёнными к точкам касания, то $\angle IKD = 90^\circ$ и $\angle ILB = 90^\circ$. Следовательно, IK и IL — высоты в треугольниках AID и BIC соответственно. Воспользуемся известным фактом, что в прямоугольном треугольнике квадрат высоты, опущенной на гипотенузу, равняется произведению отрезков, на которые она делит гипотенузу. Тогда

$$IK^2 = AK \cdot KD = 16 \cdot 4 = 64 = 8^2,$$

т.е. $r = IK = 8$, а также $8^2 = IL^2 = CL \cdot LB = 2 \cdot LB$, т.е. $LB = 32$.

[1] см. https://ru.wikipedia.org/wiki/Малая_теорема_Ферма#Альтернативная_формулировка

Теперь у нас есть всё для нахождения площади. Заметим, что MN является высотой трапеции и $MN = 2r = 16$, $AB + CD = (AM + MB) + 6 = (AK + BL) + 6 = 16 + 32 + 6 = 54$, откуда ответ $\frac{16\cdot 54}{2} = 432$.

Задача 5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 &= (y-z)^2 - 3 \\ y^2 &= (z-x)^2 - 7 \\ z^2 &= (x-y)^2 + 21 \end{cases}.$$

Ответ: $(-1,-3,-5)$, $(1,3,5)$.

Решение. Перенесём в каждом уравнении квадрат разности в левую части и применим формулу для разности квадратов:

$$\begin{cases} (x-y+z)(x+y-z) &= -3 \\ (y-z+x)(y+z-x) &= -7 \\ (z-x+y)(z+x-y) &= 21 \end{cases}.$$

Обозначим $X = -x+y+z$, $Y = x-y+z$, $Z = x+y-z$. Тогда

$$\begin{cases} YZ &= -3 \\ ZX &= -7 \\ XY &= 21 \end{cases}.$$

Перемножая все получившиеся равенства, имеем $(XYZ)^2 = 3\cdot 7\cdot 21$, откуда $XYZ = 21$ или $XYZ = -21$. Разберём случай $XYZ = 21$. В нём $X = (XYZ)/(YZ) = -7$, $Y = -3$, $Z = 1$; тогда $x = \frac{Y+Z}{2} = -1$, $y = -3$, $z = -5$. Второй случай разбирается аналогично и в нём $x = 1$, $y = 3$, $z = 5$.

Задача 6. Изобразите (с обоснованием) на координатной плоскости Oxy множество решений неравенства

$$(y^2 - \arcsin^2(\sin x))\cdot(y^2 - \arcsin^2(\sin(x+\pi/3)))\cdot(y^2 - \arcsin^2(\sin(x-\pi/3))) < 0.$$

Решение. Заметим, что при увеличении или уменьшении x на 2π значение выражения слева не меняется, поэтому достаточно построить решение для какого-то промежутка длины 2π.

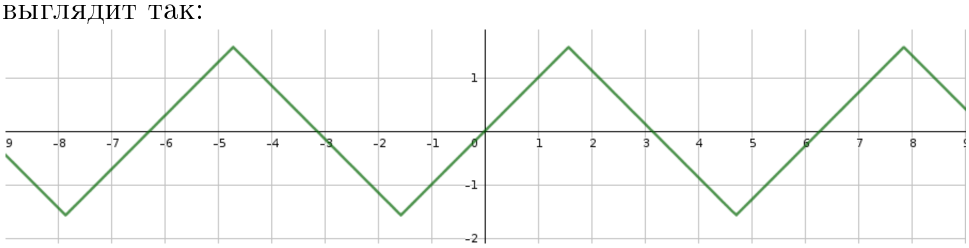
Для начала посмотрим множество точек, удовлетворяющих равенству

$$(y^2 - \arcsin^2(\sin x))\cdot(y^2 - \arcsin^2(\sin(x+\pi/3)))\cdot(y^2 - \arcsin^2(\sin(x-\pi/3))) = 0.$$

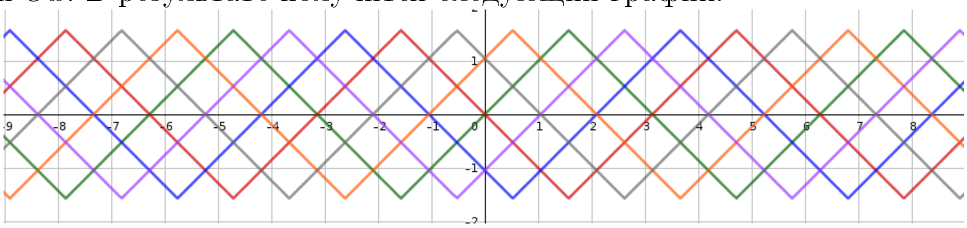
Если разложить каждую из скобок как разность квадратов, то получится произведение шести множителей. Данное равенство эквивалентно следующей совокупности:

$$\left[\begin{array}{lcl} y &=& \arcsin(\sin x) \\ y &=& -\arcsin(\sin x) \\ y &=& \arcsin(\sin(x+\pi/3)) \\ y &=& -\arcsin(\sin(x+\pi/3)) \\ y &=& \arcsin(\sin(x-\pi/3)) \\ y &=& -\arcsin(\sin(x-\pi/3)) \end{array}\right..$$

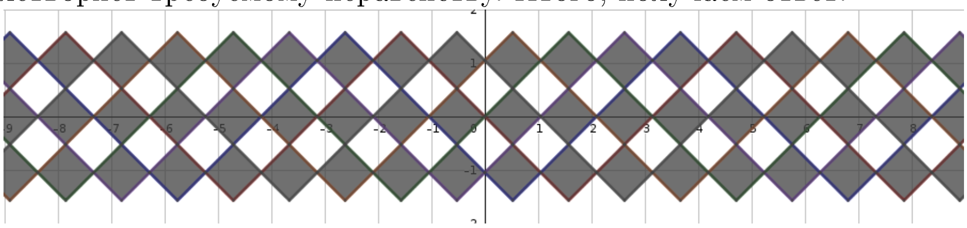
Построим график $y = \arcsin(\sin x)$. При $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ по определению $\arcsin(\sin x) = x$. При $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$, если $\sin x = a$, то $\sin(\pi - x) = a$ и $-\frac{\pi}{2} < \pi - x < \frac{\pi}{2}$, т.е. $\arcsin(\sin x) = \pi - x$. Итого, график $y = \arcsin(\sin x)$ выглядит так:



Оставшиеся пять графиков получаются параллельными переносами вдоль оси Ox и отражениями относительно оси Ox. В результате получится следующий график:



Заметим теперь, что при $y = 100$ выражение в левой части, очевидно, положительно, поэтому область «выше всего» не удовлетворяет требуемому неравенству. При пересечении же графика некоторой функции ровно один из шести сомножителей меняет знак, поэтому из двух «соседних» областей ровно один удовлетворяет требуемому неравенству. Итого, получаем ответ:



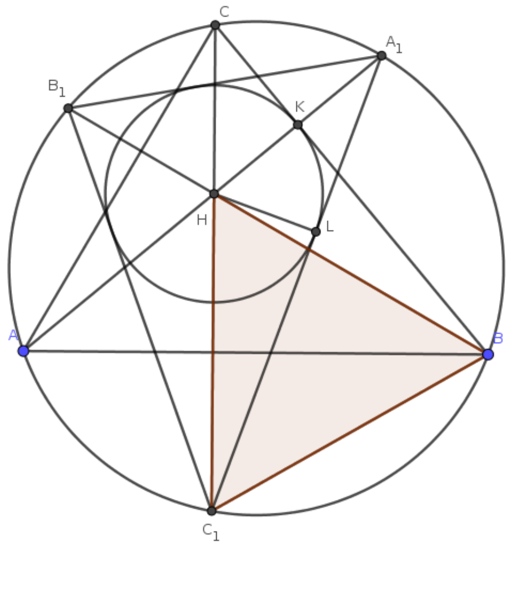
Задача 7. Точки A_1, B_1, C_1 — точки пересечения продолжений высот остроугольного треугольника ABC с описанной вокруг ABC окружностью. Окружность, вписанная в треугольник $A_1B_1C_1$, касается одной из сторон ABC, а один из углов треугольника ABC равен $40°$. Найдите два других угла треугольника ABC.

Ответ: $60°$ и $80°$.

Решение. Не умаляя общности, пусть окружность ω, вписанная в $A_1B_1C_1$, касается стороны BC. Пусть H — точка пересечения высот треугольника ABC, K — точка касания ω и BC, L — точка касания ω и A_1C_1. Мы собираем доказать, что треугольник HBC_1 — равносторонний. Тогда $\angle BAC = \angle BC_1C = 60°$, откуда с учётом условия и будет следовать ответ.

Для начала заметим, что H есть точка пересечения биссектрис треугольника $A_1B_1C_1$. Действительно, например, $\angle B_1C_1C = \angle B_1BC = 90° - \angle C = \angle CAA_1 = \angle CC_1A_1$, т.е C_1H — биссектриса угла $A_1C_1B_1$; аналогично проверяются и то, что A_1H и B_1H также являются биссектрисами соответствующих углов. Следовательно, H — центр вписанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$ и $HK = HL$. Кроме того, выше доказано, что $\angle HC_1L = \angle HBK$, т.е. прямоугольные треугольники HC_1L и HBK равны по катету и острому углу. Поэтому $HC_1 = HB$.

Осталось заметить, что $HB = BC_1$. Этот факт хорошо известен и может быть доказан различными способами. Приведём здесь лишь один из них. Заметим, что треугольники AHB и AC_1B равны по стороне (общая сторона AB) и двум углам ($\angle HAB = \angle A_1B_1B = \angle C_1B_1B = \angle C_1AB$; аналогично доказываем, что $\angle HBA = \angle C_1BA$).



Задача 8. При каких значениях параметра a уравнение

$$3^{x^2-2ax+a^2} = ax^2 - 2a^2x + a^3 + a^2 - 4a + 4$$

имеет ровно одно решение?

Ответ: Только при $a = 1$.

Решение. Обозначим $x - a$ через t. Заметим, что количество решений уравнения от такой замены не меняется. Тогда исходное уравнение приобретёт вид

$$3^{t^2} = at^2 + a^2 - 4a + 4.$$

Заметим, что выражения в обеих частях не меняются при замене t на $-t$, поэтому нечётное число решений (в частности, ровно одно решение), это уравнение может иметь только если $t = 0$ является его корнем:

$$3^0 = a \cdot 0 + a^2 - 4a + 4,$$

т.е. $a^2 - 4a + 3 = 0$, откуда $a = 3$ или $a = 1$. Итак, кроме этих двух чисел, никакие другие значения параметра a не могут удовлетворять условию.

Пусть $a = 1$. Тогда уравнение примет вид $3^{t^2} = t^2 + 1$. Заметим, что $3^x > x\ln 3 + 1$ при $x > 0$ (что можно доказать, например, взяв производные обеих частей). Тогда при $t \neq 0$ получаем $3^{t^2} > t^2 \ln 3 + 1 > t^2 + 1$. Итак, при $a = 1$ уравнение имеет единственное решение.

Пусть $a = 3$. Тогда уравнение примет вид $3^{t^2} = 3t^2 + 1$. Заметим, что $3^1 = 3$, $3 \cdot 1 + 1 = 4$, но $3^{2^2} = 81$, $3 \cdot 2^2 + 1 = 13$, т.е. при $t = 1$ левая часть меньше правой, а при $t = 2$ — наоборот. Следовательно, по теореме о промежуточном значении, уравнение имеет ещё хотя бы корень на интервале $(1, 2)$. Следовательно, $a = 3$ не удовлетворяет условию.

Задача 9. В десятичной записи чётного числа M участвуют только цифры 0, 2, 4, 5, 7 и 9, цифры могут повторяться. Известно, что сумма цифр числа $2M$ равняется 35, а сумма цифр числа $M/2$ равняется 29. Какие значения может принимать сумма цифр числа M? Укажите все возможные ответы.

Ответ: 31.

Решение. Обозначим сумму цифр натурального числа n через $S(n)$. Заметим следующие факты, каждый из которых легко проверить, если складывать числа в столбик.

Лемма 1. Пусть n — натуральное число. Тогда количество нечётных цифр в числе $2n$ равняется количеству переносов при сложении n и n.

Лемма 2. Пусть n — натуральное число. Тогда количество цифр в числе n, больше или равных 5, равняется количеству переносов при сложении n и n.

Лемма 3. Пусть n и m — натуральные числа. Тогда $S(n+m) = S(n) + S(m) - 9k$, где k равняется количеству переносов при сложении n и m.

Пусть N — количество нечётных цифр в числе M; учитывая условие, N — это количество цифр в числе M, больше или равных 5. Заметим, что тогда по лемме 1 при сложении $M/2$ и $M/2$ было ровно N переносов, откуда по лемме 3 имеем $S(M) = 2S(M/2) - 9N = 58 - 9N$. По лемме 2 при сложении M и M также было N переносов, откуда опять же по лемме 3 имеем $35 = S(2M) = 2S(M) - 9N$.

Итак, $S(M) = 58 - 9N$, $2S(M) = 35 + 9N$, откуда $3S(M) = 93$, $S(M) = 31$.

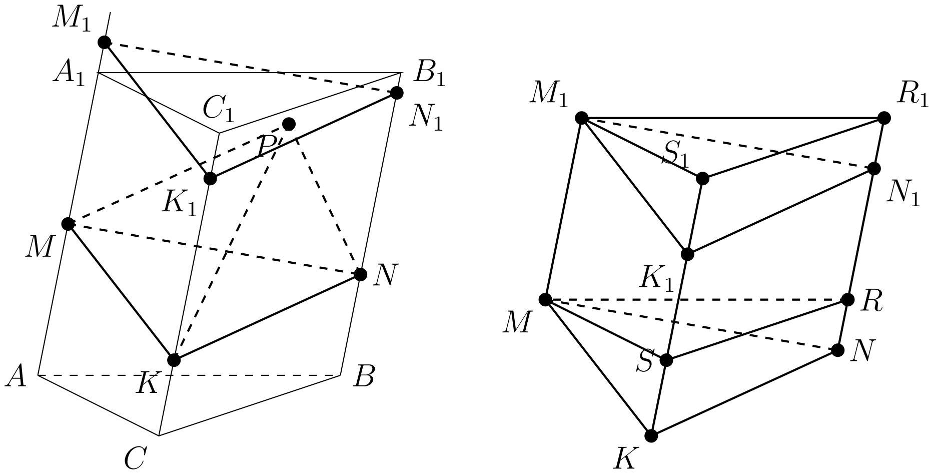
Задача 10. Точки M, N и K расположены на боковых рёбрах AA_1, BB_1 и CC_1 треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ так, что $AM : AA_1 = 1 : 2$, $BN : BB_1 = 1 : 3$, $CK : CC_1 = 1 : 4$. Точка P принадлежит призме. Найдите наибольшее возможное значение объема пирамиды $MNKP$, если объём призмы равен 16.

Ответ: 4.

Решение. Предположим, что мы нашли положение точки P, при котором объём пирамиды $MNKP$ максимален. Проведём через неё плоскость α, параллельную плоскости MNK, назовём M_1, N_1 и K_1 точки пересечения этой плоскости с рёбрами AA_1, BB_1 и CC_1 соответственно. Заметим, что

$V_{MNKP}=\dfrac{1}{3}V_{MNKM_1N_1K_1}$. Проведём через точки M и M_1 плоскости β и β_1, параллельные плоскости ABC, назовём R и R_1 точки пересечения с ребром BB_1, а S и S_1 с ребром CC_1. Заметим, что фигуры $MNKRS$ и $M_1N_1K_1R_1S_1$ получаются друг из друга параллельным переносом, и следовательно равны, а значит равны и их объёмы. Тогда объёмы призм $MNKM_1N_1K_1$ и $MRSM_1R_1S_1$ тоже равны. Но $V_{MRSM_1R_1S_1}=\frac{MM_1}{AA_1}V_{ABCA_1B_1C_1}$, откуда получаем, что $V_{MNKP}=\frac{1}{3}\frac{MM_1}{AA_1}V_{ABCA_1B_1C_1}$.

Нам осталось найти такое положение плоскости α, при котором MM_1 максимально. Заметим, что из точек M_1,N_1,K_1 хотя бы одна лежит в исходной призме, откуда $MM_1=NN_1=KK_1\leq\max\{AM,A_1M,BN,B_1N,CK,C_1K\}$. Подставляя данные в задаче отношения, окончательно получаем, что $MM_1=NN_1=KK_1=C_1K=\frac{3}{4}CC_1$, откуда $V_{MNKP}=\frac{1}{3}\frac{MM_1}{AA_1}V_{ABCA_1B_1C_1}=\frac{1}{3}\frac{3}{4}16=4$.



Вариант II

Задача 1. Докажите неравенство

$$\log_{2017} 2019 > \frac{\log_{2017} 1 + \log_{2017} 2 + \ldots + \log_{2017} 2018}{2018}.$$

Решение. После умножения обеих частей на 2018 и некоторых преобразований, получаем, что нам достаточно доказать неравенство

$$\log_{2017} 2019^{2018} > \log_{2017}(1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2018).$$

Указанное неравенство следует из того, что $2019^{2018} > 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2018$, а последнее получается перемножением 2018 неравенств $2019 > 1$, $2019 > 2$, …, $2019 > 2018$.

Задача 2. n грибников ходили в лес и принесли суммарно 338 грибов (возможно, некоторые из грибников не принесли домой ни одного гриба). Мальчик Петя, узнав об этом, заявил: «Какие-то двое из них обязательно принесли одинаковое количество грибов!» При каком наименьшем n мальчик Петя наверняка окажется прав? Не забудьте обосновать свой ответ.

Ответ: 27.

Решение. Для начала докажем, что при $n \leqslant 26$ Петя может ошибиться. Предположим, что первые $n-1$ грибников собрали соответственно $0, 1, \ldots, n-2$ гриба, а n-й — все остальные. Поскольку

$$0 + 1 + \ldots + (n-2) \leqslant 0 + 1 + \ldots + 24 = 300 = 338 - 38,$$

то последний грибник собрал не менее 38 грибов, т.е. больше, чем каждый из остальных. Итак, при $n \leqslant 26$ существует пример, когда Петя мог быть не прав.

Покажем, что при $n = 27$ Петя всегда окажется прав. Предположим, что он не прав и пусть грибники собрали $a_0 < a_1 < \ldots < a_{26}$ грибов. Несложно видеть, что $a_i \geqslant i$, откуда

$$338 = a_0 + a_1 + \ldots + a_{25} \geqslant 0 + 1 + \ldots + 25 = 351,$$

противоречие.

Задача 3. Вася хочет найти все целые числа a такие, что выражение $5n^3 + 6n^5 + 4an$ делится на 15 для всех целых n. Какие остатки может давать число a при делении на 15? Укажите все возможные ответы или докажите, что таких целых чисел a нет.

Ответ: 1.

Решение. Для начала покажем, что $n^3 \equiv n \pmod 3$ и $n^5 \equiv n \pmod 5$ для любого натурального n. Это можно сделать несколькими способами. Приведём лишь три из них.

Первый способ. Разобьём все натуральные числа на группы по их остаткам при делении на 3 и 5:

n	n^3	$n^3 \bmod 3$
0	0	0
1	1	1
2	8	2

n	n^5	$n^5 \bmod 5$
0	0	0
1	1	1
2	32	2
3	243	3
4	1024	4

Из таблицы видно, что доказываемое утверждение верно.

Второй способ. Заметим, что $n^3 - n = (n-1)n(n+1)$ — произведение трёх последовательных целых чисел, а

$$n^5 - n = (n-1)n(n+1)(n^2+1) \equiv (n-1)n(n+1)(n^2-4) = (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2) \pmod 5$$

— произведение пяти последовательных целых чисел. В первом случае выражение всегда делится на 3, а во втором — на 5, что и требовалось.

Третий способ состоит в том, чтобы сказать, что эти утверждения являются частными случаями малой теоремы Ферма[2].

Теперь взглянем на исходное выражение по модулю 3:

$$5n^3 + 6n^5 + 4an \equiv 5n + 4an \equiv (a+2)\cdot n \pmod 3.$$

Это выражение делится на 3 при любом целом n тогда и только тогда, когда $a+2$ кратно 3, т.е. когда a даёт остаток 1 при делении на 3. Аналогично, $5n^3+6n^5+4an \equiv (a+4)\cdot n \pmod 5$, т.е. $a+4$ делится на 5, a даёт остаток 1 при делении на 5.

Итак, $a \equiv 1 \pmod 3$ и $a \equiv 1 \pmod 5$, т.е. $a \equiv 1 \pmod{15}$.

Другое решение. Подставим $n = 1$ и получим, что если такое a и существует, то $11 + 4a$ должно делится на 15, т.е. a должно давать остаток 1 при делении на 15. Осталось проверить, что если $a \equiv 1 \pmod{15}$, то указанное выражение делится на 15 для любого натурального n. Это можно сделать многими способами (см., например, первое решение). Приведём здесь ещё один.

Докажем это утверждение индукцией по n (для $n = 0$ делимость очевидна, для отрицательных n доказывается аналогично или сводится к случаю положительного n заменой $n \to -n$). Если $n = 1$, утверждение уже проверено. Предположим теперь, что мы уже доказали, что $5n^3+6n^5+4an$ делится на 15 и докажем, что $5(n+1)^3 + 6(n+1)^5 + 4a(n+1)$ также делится на 15. Посмотрим на разность этих двух выражений:

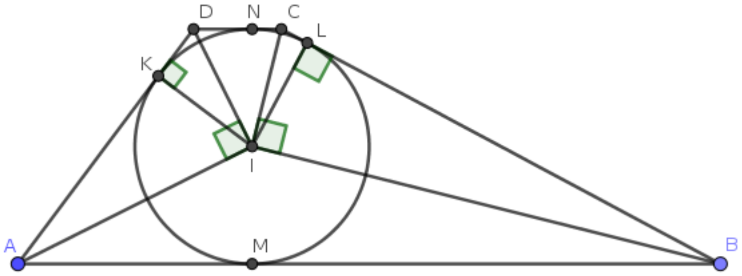
$$5\left((n+1)^3 - n^3\right)+6\left((n+1)^5 - n^5\right)+4a\left((n+1) - n\right) = 5(3n^2+3n+1)+6(5n^4+10n^3+10n^2+5n+1)+4a.$$

После раскрытия скобок все слагаемые в правой части, кроме $5 + 6 + 4a$, делятся на 15, но $11 + 4a$ делится на 15, поскольку $a \equiv 1 \pmod{15}$.

Задача 4. В трапецию $ABCD$ вписана окружность радиуса 4, касающаяся основания AB в точке M. Найдите площадь трапеции, если $BM = 16$ и $CD = 3$.

Ответ: 108.

Решение. Пусть K, L, N — точки касания вписанной окружности со сторонами AD, BC, CD соответственно; пусть I — центр вписанной окружности. Сразу заметим, что $BL = BM = 16$.



Поскольку I является точкой пересечения биссектрис внутренних углов трапеции, то $\angle IAD + \angle IDA = (\angle DAB+\angle ADC)/2 = 180°/2 = 90°$, где предпоследнее равенство следует из параллельности прямых AB и CD. Следовательно, треугольник AID прямоугольный и $\angle AID = 90°$. Аналогично, прямоугольным является и треугольник BIC.

Далее, поскольку IK и IL являются радиусами, проведёнными к точкам касания, то $\angle IKD = 90°$ и $\angle ILB = 90°$. Следовательно, IK и IL — высоты в треугольниках AID и BIC соответственно. Воспользуемся известным фактом, что в прямоугольном треугольнике квадрат высоты, опущенной на гипотенузу, равняется произведению отрезков, на которые она делит гипотенузу. Тогда

$$4^2 = IL^2 = CL \cdot LB = CL \cdot 16,$$

т.е. $CL = 1$. По равенству отрезков касательных имеем $CN = CL = 1$, откуда $DK = DN = CD - CN = 3 - 1 = 2$. В прямоугольном треугольнике AID получаем $4^2 = IK^2 = AK \cdot KD = AK \cdot 2$, т.е. $AK = 8$.

[2]см. https://ru.wikipedia.org/wiki/Малая_теорема_Ферма#Альтернативная_формулировка

Теперь у нас есть всё для нахождения площади. Заметим, что LM является высотой трапеции и $LM = 2r = 8$, $AB + CD = AM + MB + CD = 8 + 16 + 3 = 27$, откуда ответ $\frac{8 \cdot 27}{2} = 108$.

Задача 5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 &= (y-z)^2 - 3 \\ y^2 &= (z-x)^2 - 9 \\ z^2 &= (x-y)^2 + 27 \end{cases}.$$

Ответ: $(-1, -4, -6)$, $(1, 4, 6)$.

Решение. Перенесём в каждом уравнении квадрат разности в левую части и применим формулу для разности квадратов:

$$\begin{cases} (x-y+z)(x+y-z) &= -3 \\ (y-z+x)(y+z-x) &= -9 \\ (z-x+y)(z+x-y) &= 27 \end{cases}.$$

Обозначим $X = -x + y + z$, $Y = x - y + z$, $Z = x + y - z$. Тогда

$$\begin{cases} YZ &= -3 \\ ZX &= -9 \\ XY &= 27 \end{cases}.$$

Перемножая все получившиеся равенства, имеем $(XYZ)^2 = 3 \cdot 9 \cdot 27$, откуда $XYZ = 27$ или $XYZ = -27$. Разберём случай $XYZ = 27$. В нём $X = (XYZ)/(YZ) = -9$, $Y = -3$, $Z = 1$; тогда $x = \frac{Y+Z}{2} = -1$, $y = -4$, $z = -6$. Второй случай разбирается аналогично и в нём $x = 1$, $y = 4$, $z = 6$.

Задача 6. Изобразите (с обоснованием) на координатной плоскости Oxy множество решений неравенства

$$(y^2 - \arccos^2(\cos x)) \cdot (y^2 - \arccos^2(\cos(x + \pi/3))) \cdot (y^2 - \arccos^2(\cos(x - \pi/3))) < 0.$$

Решение. Заметим, что при увеличении или уменьшении x на 2π значение выражения слева не меняется, поэтому достаточно построить решение для какого-то промежутка длины 2π.

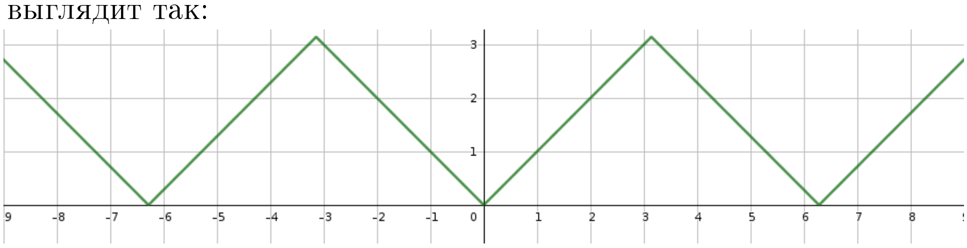
Для начала посмотрим множество точек, удовлетворяющих равенству

$$(y^2 - \arccos^2(\cos x)) \cdot (y^2 - \arccos^2(\cos(x + \pi/3))) \cdot (y^2 - \arccos^2(\cos(x - \pi/3))) = 0.$$

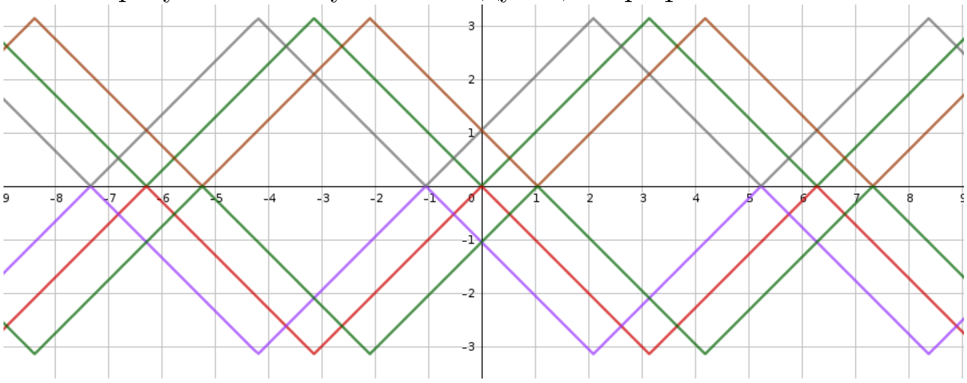
Если разложить каждую из скобок как разность квадратов, то получится произведение шести множителей. Данное равенство эквивалентно следующей совокупности:

$$\left[\begin{array}{lcl} y &=& \arccos(\cos x) \\ y &=& -\arccos(\cos x) \\ y &=& \arccos(\cos(x+\pi/3)) \\ y &=& -\arccos(\cos(x+\pi/3)) \\ y &=& \arccos(\cos(x-\pi/3)) \\ y &=& -\arccos(\cos(x-\pi/3)) \end{array}\right..$$

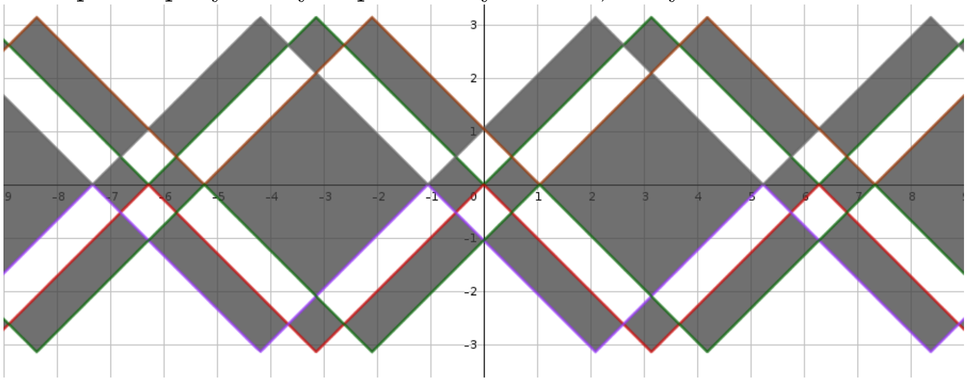
Построим график $y = \arccos(\cos x)$. При $0 \leqslant x \leqslant \pi$ по определению $\arccos(\cos x) = x$. При $\pi < x < 2\pi$, если $\cos x = a$, то $\cos(2\pi - x) = a$ и $0 < 2\pi - x < \pi$, т.е. $\arccos(\cos x) = 2\pi - x$. Итого, график $y = \arccos(\cos x)$ выглядит так:



Оставшиеся пять графиков получаются параллельными переносами вдоль оси Ox и отражениями относительно оси Ox. В результате получится следующий график:



Заметим теперь, что при $y = 100$ выражение в левой части, очевидно, положительно, поэтому область «выше всего» не удовлетворяет требуемому неравенству. При пересечении же графика некоторой функции ровно один из шести сомножителей меняет знак, поэтому из двух «соседних» областей ровно один удовлетворяет требуемому неравенству. Итого, получаем ответ:



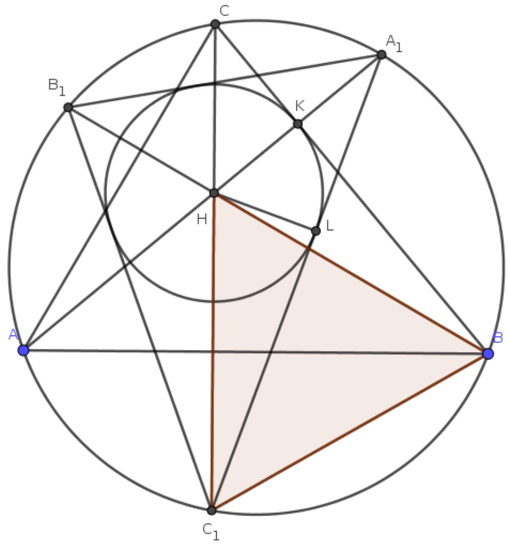
Задача 7. Точки A_1, B_1, C_1 — точки пересечения продолжений высот остроугольного треугольника ABC с описанной вокруг ABC окружностью. Окружность, вписанная в треугольник $A_1B_1C_1$, касается одной из сторон ABC, а один из углов треугольника ABC равен $50°$. Найдите два других угла треугольника ABC.

Ответ: $60°$ и $70°$.

Решение. Не умаляя общности, пусть окружность ω, вписанная в $A_1B_1C_1$, касается стороны BC. Пусть H — точка пересечения высот треугольника ABC, K — точка касания ω и BC, L — точка касания ω и A_1C_1. Мы собираем доказать, что треугольник HBC_1 — равносторонний. Тогда $\angle BAC = \angle BC_1C = 60°$, откуда с учётом условия и будет следовать ответ.

Для начала заметим, что H есть точка пересечения биссектрис треугольника $A_1B_1C_1$. Действительно, например, $\angle B_1C_1C = \angle B_1BC = 90° - \angle C = \angle CAA_1 = \angle CC_1A_1$, т.е C_1H — биссектриса угла $A_1C_1B_1$; аналогично проверяются и то, что A_1H и B_1H также являются биссектрисами соответствующих углов. Следовательно, H — центр вписанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$ и $HK = HL$. Кроме того, выше доказано, что $\angle HC_1L = \angle HBK$, т.е. прямоугольные треугольники HC_1L и HBK равны по катету и острому углу. Поэтому $HC_1 = HB$.

Осталось заметить, что $HB = BC_1$. Этот факт хорошо известен и может быть доказан различными способами. Приведём здесь лишь один из них. Заметим, что треугольники AHB и AC_1B равны по стороне (общая сторона AB) и двум углам ($\angle HAB = \angle A_1B_1B = \angle C_1B_1B = \angle C_1AB$; аналогично доказываем, что $\angle HBA = \angle C_1BA$).



Задача 8. При каких значениях параметра a уравнение

$$3^{x^2+6ax+9a^2} = ax^2 + 6a^2x + 9a^3 + a^2 - 4a + 4$$

имеет ровно одно решение?

Ответ: Только при $a = 1$.

Решение. Обозначим $x + 3a$ через t. Заметим, что количество решений уравнения от такой замены не меняется. Тогда исходное уравнение приобретёт вид

$$3^{t^2} = at^2 + a^2 - 4a + 4.$$

Заметим, что выражения в обеих частях не меняются при замене t на $-t$, поэтому нечётное число решений (в частности, ровно одно решение), это уравнение может иметь только если $t = 0$ является его корнем:

$$3^0 = a \cdot 0 + a^2 - 4a + 4,$$

т.е. $a^2 - 4a + 3 = 0$, откуда $a = 3$ или $a = 1$. Итак, кроме этих двух чисел, никакие другие значения параметра a не могут удовлетворять условию.

Пусть $a = 1$. Тогда уравнение примет вид $3^{t^2} = t^2 + 1$. Заметим, что $3^x > x \ln 3 + 1$ при $x > 0$ (что можно доказать, например, взяв производные обеих частей). Тогда при $t \neq 0$ получаем $3^{t^2} > t^2 \ln 3 + 1 > t^2 + 1$. Итак, при $a = 1$ уравнение имеет единственное решение.

Пусть $a = 3$. Тогда уравнение примет вид $3^{t^2} = 3t^2 + 1$. Заметим, что $3^1 = 3$, $3 \cdot 1 + 1 = 4$, но $3^{2^2} = 81$, $3 \cdot 2^2 + 1 = 13$, т.е. при $t = 1$ левая часть меньше правой, а при $t = 2$ — наоборот. Следовательно, по теореме о промежуточном значении, уравнение имеет ещё хотя бы корень на интервале $(1, 2)$. Следовательно, $a = 3$ не удовлетворяет условию.

Задача 9. В десятичной записи чётного числа M участвуют только цифры 0, 2, 4, 5, 7 и 9, цифры могут повторяться. Известно, что сумма цифр числа $2M$ равняется 31, а сумма цифр числа $M/2$ равняется 28. Какие значения может принимать сумма цифр числа M? Укажите все возможные ответы.

Ответ: 29.

Решение. Обозначим сумму цифр натурального числа n через $S(n)$. Заметим следующие факты, каждый из которых легко проверить, если складывать числа в столбик.

Лемма 1. Пусть n — натуральное число. Тогда количество нечётных цифр в числе $2n$ равняется количеству переносов при сложении n и n.

Лемма 2. Пусть n — натуральное число. Тогда количество цифр в числе n, больше или равных 5, равняется количеству переносов при сложении n и n.

Лемма 3. Пусть n и m — натуральные числа. Тогда $S(n + m) = S(n) + S(m) - 9k$, где k равняется количеству переносов при сложении n и m.

Пусть N — количество нечётных цифр в числе M; учитывая условие, N — это количество цифр в числе M, больше или равных 5. Заметим, что тогда по лемме 1 при сложении $M/2$ и $M/2$ было ровно N переносов, откуда по лемме 3 имеем $S(M) = 2S(M/2) - 9N = 56 - 9N$. По лемме 2 при сложении M и M также было N переносов, откуда опять же по лемме 3 имеем $31 = S(2M) = 2S(M) - 9N$.

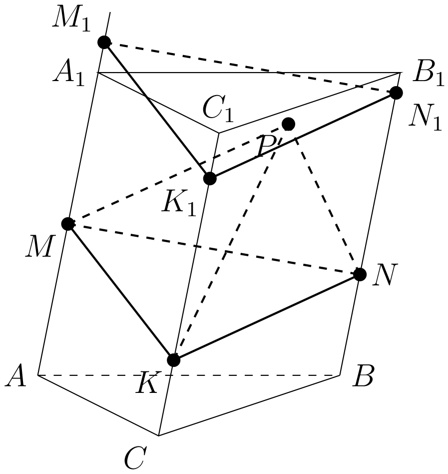
Итак, $S(M) = 56 - 9N$, $2S(M) = 31 + 9N$, откуда $3S(M) = 87$, $S(M) = 29$.

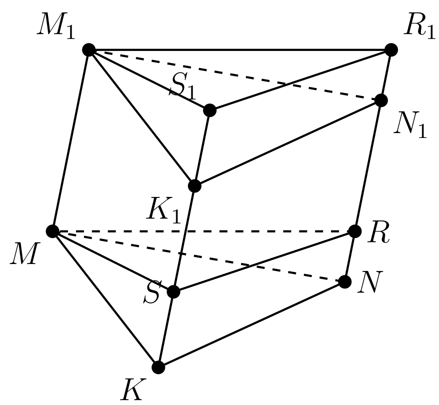
Задача 10. Точки M, N и K расположены на боковых рёбрах AA_1, BB_1 и CC_1 треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ так, что $AM : AA_1 = 2 : 3$, $BN : BB_1 = 3 : 5$, $CK : CC_1 = 4 : 7$. Точка P принадлежит призме. Найдите наибольшее возможное значение объема пирамиды $MNKP$, если объём призмы равен 27.

Ответ: 6.

Решение. Предположим, что мы нашли положение точки P, при котором объём пирамиды $MNKP$ максимален. Проведём через неё плоскость α, параллельную плоскости MNK, назовём M_1, N_1 и K_1 точки пересечения этой плоскости с рёбрами AA_1, BB_1 и CC_1 соответственно. Заметим, что $V_{MNKP} = \dfrac{1}{3} V_{MNKM_1N_1K_1}$. Проведём через точки M и M_1 плоскости β и β_1, параллельные плоскости ABC, назовём R и R_1 точки пересечения с ребром BB_1, а S и S_1 с ребром CC_1. Заметим, что фигуры $MNKRS$ и $M_1N_1K_1R_1S_1$ получаются друг из друга параллельным переносом, и следовательно равны, а значит равны и их объёмы. Тогда объёмы призм $MNKM_1N_1K_1$ и $MRSM_1R_1S_1$ тоже равны. Но $V_{MRSM_1R_1S_1} = \frac{MM_1}{AA_1} V_{ABCA_1B_1C_1}$, откуда получаем, что $V_{MNKP} = \frac{1}{3}\frac{MM_1}{AA_1} V_{ABCA_1B_1C_1}$.

Нам осталось найти такое положение плоскости α, при котором MM_1 максимально. Заметим, что из точек M_1, N_1, K_1 хотя бы одна лежит в исходной призме, откуда $MM_1 = NN_1 = KK_1 \leq \max\{AM, A_1M, BN, B_1N, CK, C_1K\}$. Подставляя данные в задаче отношения, окончательно получаем, что $MM_1 = NN_1 = KK_1 = AM = \frac{2}{3} AA_1$, откуда $V_{MNKP} = \frac{1}{3}\frac{MM_1}{AA_1} V_{ABCA_1B_1C_1} = \frac{1}{3}\frac{2}{3} 27 = 6$.





Вариант III

Задача 1. Докажите неравенство

$$\log_{2016} 2018 > \frac{\log_{2016} 1 + \log_{2016} 2 + \ldots + \log_{2016} 2017}{2017}.$$

Решение. После умножения обеих частей на 2017 и некоторых преобразований, получаем, что нам достаточно доказать неравенство

$$\log_{2016} 2018^{2017} > \log_{2016}(1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2017).$$

Указанное неравенство следует из того, что $2018^{2017} > 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2017$, а последнее получается перемножением 2017 неравенств $2018 > 1$, $2018 > 2$, …, $2018 > 2017$.

Задача 2. n грибников ходили в лес и принесли суммарно 450 грибов (каждый принёс домой хотя бы по одному грибу). Мальчик Петя, узнав об этом, заявил: «Какие-то двое из них обязательно принесли одинаковое количество грибов!» При каком наименьшем n мальчик Петя наверняка окажется прав? Не забудьте обосновать свой ответ.

Ответ: 30.

Решение. Для начала докажем, что при $n \leqslant 29$ Петя может ошибиться. Предположим, что первые $n-1$ грибников собрали соответственно $1, \ldots, n-1$ гриба, а n-й — все остальные. Поскольку

$$1 + \ldots + (n-1) \leqslant 1 + \ldots + 28 = 406 = 450 - 44,$$

то последний грибник собрал не менее 44 грибов, т.е. больше, чем каждый из остальных. Итак, при $n \leqslant 29$ существует пример, когда Петя мог быть не прав.

Покажем, что при $n = 30$ Петя всегда окажется прав. Предположим, что он не прав и пусть грибники собрали $a_1 < \ldots < a_{30}$ грибов. Несложно видеть, что $a_i \geqslant i$, откуда

$$450 = a_1 + \ldots + a_{30} \geqslant 1 + \ldots + 30 = 465,$$

противоречие.

Задача 3. Вася хочет найти все целые числа a такие, что выражение $10n^3 + 3n^5 + 7an$ делится на 15 для всех целых n. Какие остатки может давать число a при делении на 15? Укажите все возможные ответы или докажите, что таких целых чисел a нет.

Ответ: 11.

Решение. Для начала покажем, что $n^3 \equiv n \pmod 3$ и $n^5 \equiv n \pmod 5$ для любого натурального n. Это можно сделать несколькими способами. Приведём лишь три из них.

Первый способ. Разобьём все натуральные числа на группы по их остаткам при делении на 3 и 5:

n	n^3	$n^3 \bmod 3$
0	0	0
1	1	1
2	8	2

n	n^5	$n^5 \bmod 5$
0	0	0
1	1	1
2	32	2
3	243	3
4	1024	4

Из таблицы видно, что доказываемое утверждение верно.

Второй способ. Заметим, что $n^3 - n = (n-1)n(n+1)$ — произведение трёх последовательных целых чисел, а

$$n^5 - n = (n-1)n(n+1)(n^2+1) \equiv (n-1)n(n+1)(n^2-4) = (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2) \pmod 5$$

— произведение пяти последовательных целых чисел. В первом случае выражение всегда делится на 3, а во втором — на 5, что и требовалось.

Третий способ состоит в том, чтобы сказать, что эти утверждения являются частными случаями малой теоремы Ферма[3].

Теперь взглянем на исходное выражение по модулю 3:

$$10n^3 + 3n^5 + 7an \equiv 10n + 7an \equiv (a+1) \cdot n \pmod 3.$$

Это выражение делится на 3 при любом целом n тогда и только тогда, когда $a+1$ кратно 3, т.е. когда a даёт остаток 2 при делении на 3. Аналогично, $10n^3 + 3n^5 + 7an \equiv (2a+3) \cdot n \pmod 5$, т.е. $2a+3$ делится на 5, a даёт остаток 1 при делении на 5.

Итак, $a \equiv 2 \pmod 3$ и $a \equiv 1 \pmod 5$, т.е. $a \equiv 11 \pmod{15}$.

Другое решение. Подставим $n = 1$ и получим, что если такое a и существует, то $13 + 7a$ должно делится на 15, т.е. a должно давать остаток 11 при делении на 15. Осталось проверить, что если $a \equiv 11 \pmod{15}$, то указанное выражение делится на 15 для любого натурального n. Это можно сделать многими способами (см., например, первое решение). Приведём здесь ещё один.

Докажем это утверждение индукцией по n (для $n = 0$ делимость очевидна, для отрицательных n доказывается аналогично или сводится к случаю положительного n заменой $n \to -n$). Если $n = 1$, утверждение уже проверено. Предположим теперь, что мы уже доказали, что $10n^3+3n^5+7an$ делится на 15 и докажем, что $10(n+1)^3 + 3(n+1)^5 + 7a(n+1)$ также делится на 15. Посмотрим на разность этих двух выражений:

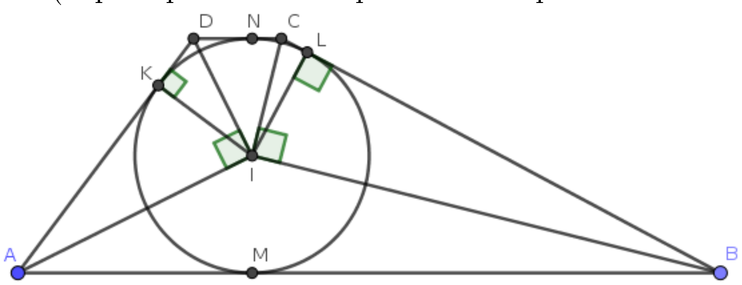
$$10\left((n+1)^3 - n^3\right) + 3\left((n+1)^5 - n^5\right) + 7a\left((n+1) - n\right) = 10(3n^2+3n+1) + 3(5n^4+10n^3+10n^2+5n+1) + 7a.$$

После раскрытия скобок все слагаемые в правой части, кроме $10 + 3 + 7a$, делятся на 15, но $13 + 7a$ делится на 15, поскольку $a \equiv 14 \pmod{15}$.

Задача 4. В трапецию $ABCD$ вписана окружность, касающаяся боковой стороны BC в точке L. Найдите площадь трапеции, если $BL = 4$, $CL = \frac{1}{4}$ и $AB = 6$.

Ответ: 6,75.

Решение. Пусть M, N, K — точки касания вписанной окружности со сторонами AB, CD, AD соответственно; пусть I — центр вписанной окружности. Радиус окружности обозначим через r. Сразу заметим, что $BM = BL = 4$ (первое равенство из равенства отрезков касательных), откуда $AK = AM = AB - BM = 2$ (первое равенство из равенства отрезков касательных, второе очевидно).



Поскольку I является точкой пересечения биссектрис внутренних углов трапеции, то $\angle IAD + \angle IDA = (\angle DAB + \angle ADC)/2 = 180°/2 = 90°$, где предпоследнее равенство следует из параллельности прямых AB и CD. Следовательно, треугольник AID прямоугольный и $\angle AID = 90°$. Аналогично, прямоугольным является и треугольник BIC.

Далее, поскольку IK и IL являются радиусами, проведёнными к точкам касания, то $\angle IKD = 90°$ и $\angle ILB = 90°$. Следовательно, IK и IL — высоты в треугольниках AID и BIC соответственно. Воспользуемся известным фактом, что в прямоугольном треугольнике квадрат высоты, опущенной на гипотенузу, равняется произведению отрезков, на которые она делит гипотенузу. Тогда

$$IL^2 = CL \cdot LB = \frac{1}{4} \cdot 4 = 1 = 1^2,$$

т.е. $r = IL = 1$, а также $1 = IK^2 = AK \cdot KD = 2 \cdot KD$, т.е. $KD = \frac{1}{2}$.

[3]см. https://ru.wikipedia.org/wiki/Малая_теорема_Ферма#Альтернативная_формулировка

Теперь у нас есть всё для нахождения площади. Заметим, что MN является высотой трапеции и $MN = 2r = 2$, $AB + CD = 6 + CN + ND = 6 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 6,75$, откуда ответ $\frac{2 \cdot 6,75}{2} = 6,75$.

Задача 5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 &= (y-z)^2 - 8 \\ y^2 &= (z-x)^2 - 16 \\ z^2 &= (x-y)^2 + 32 \end{cases}.$$

Ответ: $(-1, -3, -6)$, $(1, 3, 6)$.

Решение. Перенесём в каждом уравнении квадрат разности в левую части и применим формулу для разности квадратов:

$$\begin{cases} (x-y+z)(x+y-z) &= -8 \\ (y-z+x)(y+z-x) &= -16 \\ (z-x+y)(z+x-y) &= 32 \end{cases}.$$

Обозначим $X = -x + y + z$, $Y = x - y + z$, $Z = x + y - z$. Тогда

$$\begin{cases} YZ &= -8 \\ ZX &= -16 \\ XY &= 32 \end{cases}.$$

Перемножая все получившиеся равенства, имеем $(XYZ)^2 = 8 \cdot 16 \cdot 32$, откуда $XYZ = 64$ или $XYZ = -64$. Разберём случай $XYZ = 64$. В нём $X = (XYZ)/(YZ) = -8$, $Y = -4$, $Z = 2$; тогда $x = \frac{Y+Z}{2} = -1$, $y = -3$, $z = -6$. Второй случай разбирается аналогично и в нём $x = 1$, $y = 3$, $z = 6$.

Задача 6. Изобразите (с обоснованием) на координатной плоскости Oxy множество решений неравенства

$$(y^2 - \arcsin^2(\sin x)) \cdot (y^2 - \arcsin^2(\sin(x + \pi/6))) \cdot (y^2 - \arcsin^2(\sin(x - \pi/6))) < 0.$$

Решение. Заметим, что при увеличении или уменьшении x на 2π значение выражения слева не меняется, поэтому достаточно построить решение для какого-то промежутка длины 2π.

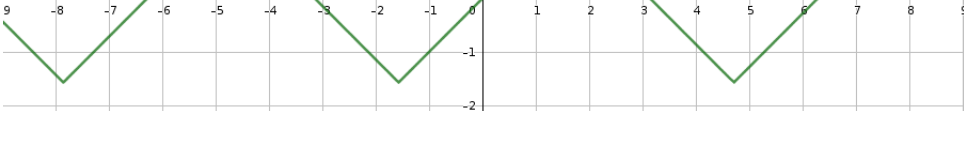
Для начала посмотрим множество точек, удовлетворяющих равенству

$$(y^2 - \arcsin^2(\sin x)) \cdot (y^2 - \arcsin^2(\sin(x + \pi/6))) \cdot (y^2 - \arcsin^2(\sin(x - \pi/6))) = 0.$$

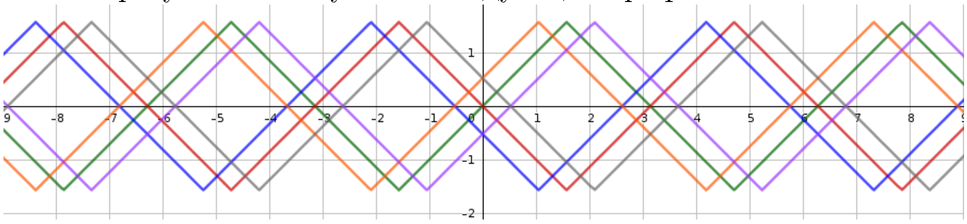
Если разложить каждую из скобок как разность квадратов, то получится произведение шести множителей. Данное равенство эквивалентно следующей совокупности:

$$\left[\begin{array}{lcl} y &=& \arcsin(\sin x) \\ y &=& -\arcsin(\sin x) \\ y &=& \arcsin(\sin(x + \pi/6)) \\ y &=& -\arcsin(\sin(x + \pi/6)) \\ y &=& \arcsin(\sin(x - \pi/6)) \\ y &=& -\arcsin(\sin(x - \pi/6)) \end{array} \right..$$

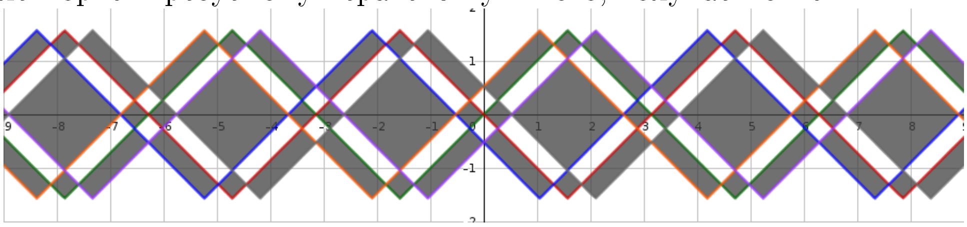
Построим график $y = \arcsin(\sin x)$. При $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ по определению $\arcsin(\sin x) = x$. При $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$, если $\sin x = a$, то $\sin(\pi - x) = a$ и $-\frac{\pi}{2} < \pi - x < \frac{\pi}{2}$, т.е. $\arcsin(\sin x) = \pi - x$. Итого, график $y = \arcsin(\sin x)$ выглядит так:



Оставшиеся пять графиков получаются параллельными переносами вдоль оси Ox и отражениями относительно оси Ox. В результате получится следующий график:



Заметим теперь, что при $y = 100$ выражение в левой части, очевидно, положительно, поэтому область «выше всего» не удовлетворяет требуемому неравенству. При пересечении же графика некоторой функции ровно один из шести сомножителей меняет знак, поэтому из двух «соседних» областей ровно один удовлетворяет требуемому неравенству. Итого, получаем ответ:



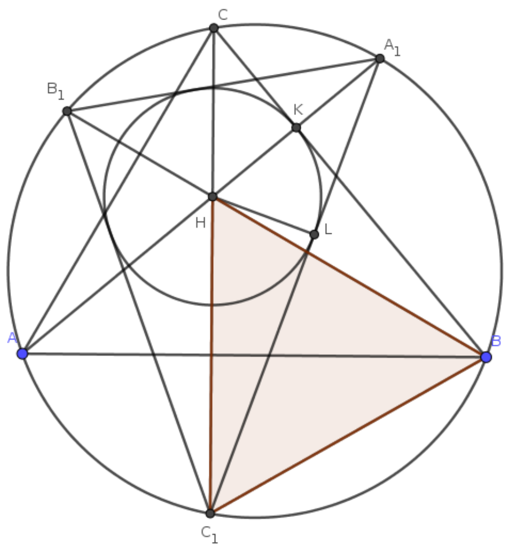
Задача 7. Точки A_1, B_1, C_1 — точки пересечения продолжений высот остроугольного треугольника ABC с описанной вокруг ABC окружностью. Окружность, вписанная в треугольник $A_1B_1C_1$, касается одной из сторон ABC, а один из углов треугольника ABC равен $70°$. Найдите два других угла треугольника ABC.

Ответ: $60°$ и $50°$.

Решение. Не умаляя общности, пусть окружность ω, вписанная в $A_1B_1C_1$, касается стороны BC. Пусть H — точка пересечения высот треугольника ABC, K — точка касания ω и BC, L — точка касания ω и A_1C_1. Мы собираем доказать, что треугольник HBC_1 — равносторонний. Тогда $\angle BAC = \angle BC_1C = 60°$, откуда с учётом условия и будет следовать ответ.

Для начала заметим, что H есть точка пересечения биссектрис треугольника $A_1B_1C_1$. Действительно, например, $\angle B_1C_1C = \angle B_1BC = 90° - \angle C = \angle CAA_1 = \angle CC_1A_1$, т.е C_1H — биссектриса угла $A_1C_1B_1$; аналогично проверяются и то, что A_1H и B_1H также являются биссектрисами соответствующих углов. Следовательно, H — центр вписанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$ и $HK = HL$. Кроме того, выше доказано, что $\angle HC_1L = \angle HBK$, т.е. прямоугольные треугольники HC_1L и HBK равны по катету и острому углу. Поэтому $HC_1 = HB$.

Осталось заметить, что $HB = BC_1$. Этот факт хорошо известен и может быть доказан различными способами. Приведём здесь лишь один из них. Заметим, что треугольники AHB и AC_1B равны по стороне (общая сторона AB) и двум углам ($\angle HAB = \angle A_1B_1B = \angle C_1B_1B = \angle C_1AB$; аналогично доказываем, что $\angle HBA = \angle C_1BA$).



Задача 8. При каких значениях параметра a уравнение

$$5^{x^2-6ax+9a^2} = ax^2 - 6a^2x + 9a^3 + a^2 - 6a + 6$$

имеет ровно одно решение?

Ответ: Только при $a = 1$.

Решение. Обозначим $x - 3a$ через t. Заметим, что количество решений уравнения от такой замены не меняется. Тогда исходное уравнение приобретёт вид

$$5^{t^2} = at^2 + a^2 - 6a + 6.$$

Заметим, что выражения в обеих частях не меняются при замене t на $-t$, поэтому нечётное число решений (в частности, ровно одно решение), это уравнение может иметь только если $t = 0$ является его корнем:

$$5^0 = a \cdot 0 + a^2 - 6a + 6,$$

т.е. $a^2 - 6a + 5 = 0$, откуда $a = 5$ или $a = 1$. Итак, кроме этих двух чисел, никакие другие значения параметра a не могут удовлетворять условию.

Пусть $a = 1$. Тогда уравнение примет вид $5^{t^2} = t^2 + 1$. Заметим, что $5^x > x \ln 5 + 1$ при $x > 0$ (что можно доказать, например, взяв производные обеих частей). Тогда при $t \neq 0$ получаем $5^{t^2} > t^2 \ln 5 + 1 > t^2 + 1$. Итак, при $a = 1$ уравнение имеет единственное решение.

Пусть $a = 5$. Тогда уравнение примет вид $5^{t^2} = 5t^2 + 1$. Заметим, что $5^1 = 5$, $5 \cdot 1 + 1 = 6$, но $5^{2^2} = 625$, $5 \cdot 2^2 + 1 = 21$, т.е. при $t = 1$ левая часть меньше правой, а при $t = 2$ — наоборот. Следовательно, по теореме о промежуточном значении, уравнение имеет ещё хотя бы корень на интервале $(1, 2)$. Следовательно, $a = 5$ не удовлетворяет условию.

Задача 9. В десятичной записи чётного числа M участвуют только цифры 0, 2, 4, 5, 7 и 9, цифры могут повторяться. Известно, что сумма цифр числа $2M$ равняется 43, а сумма цифр числа $M/2$ равняется 31. Какие значения может принимать сумма цифр числа M? Укажите все возможные ответы.

Ответ: 35.

Решение. Обозначим сумму цифр натурального числа n через $S(n)$. Заметим следующие факты, каждый из которых легко проверить, если складывать числа в столбик.

Лемма 1. Пусть n — натуральное число. Тогда количество нечётных цифр в числе $2n$ равняется количеству переносов при сложении n и n.

Лемма 2. Пусть n — натуральное число. Тогда количество цифр в числе n, больше или равных 5, равняется количеству переносов при сложении n и n.

Лемма 3. Пусть n и m — натуральные числа. Тогда $S(n+m) = S(n) + S(m) - 9k$, где k равняется количеству переносов при сложении n и m.

Пусть N — количество нечётных цифр в числе M; учитывая условие, N — это количество цифр в числе M, больше или равных 5. Заметим, что тогда по лемме 1 при сложении $M/2$ и $M/2$ было ровно N переносов, откуда по лемме 3 имеем $S(M) = 2S(M/2) - 9N = 62 - 9N$. По лемме 2 при сложении M и M также было N переносов, откуда опять же по лемме 3 имеем $43 = S(2M) = 2S(M) - 9N$.

Итак, $S(M) = 62 - 9N$, $2S(M) = 43 + 9N$, откуда $3S(M) = 105$, $S(M) = 35$.

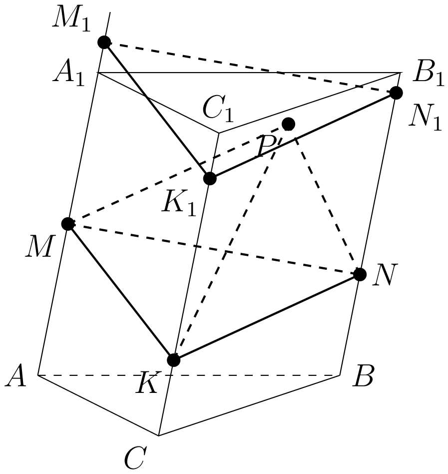
Задача 10. Точки M, N и K расположены на боковых рёбрах AA_1, BB_1 и CC_1 треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ так, что $AM : AA_1 = 3 : 7$, $BN : BB_1 = 2 : 5$, $CK : CC_1 = 4 : 9$. Точка P принадлежит призме. Найдите наибольшее возможное значение объема пирамиды $MNKP$, если объём призмы равен 40.

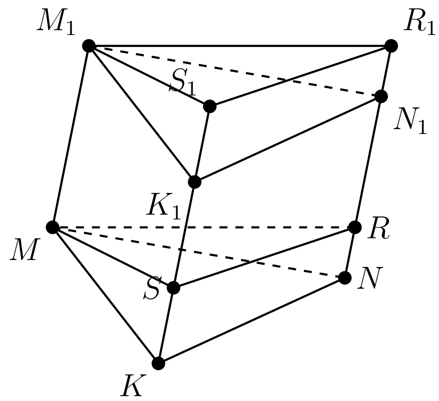
Ответ: 8.

Решение. Предположим, что мы нашли положение точки P, при котором объём пирамиды $MNKP$ максимален. Проведём через неё плоскость α, параллельную плоскости MNK, назовём M_1, N_1 и K_1 точки пересечения этой плоскости с рёбрами AA_1, BB_1 и CC_1 соответственно. Заметим, что

$V_{MNKP} = \dfrac{1}{3} V_{MNKM_1N_1K_1}$. Проведём через точки M и M_1 плоскости β и β_1, параллельные плоскости ABC, назовём R и R_1 точки пересечения с ребром BB_1, а S и S_1 с ребром CC_1. Заметим, что фигуры $MNKRS$ и $M_1N_1K_1R_1S_1$ получаются друг из друга параллельным переносом, и следовательно равны, а значит равны и их объёмы. Тогда объёмы призм $MNKM_1N_1K_1$ и $MRSM_1R_1S_1$ тоже равны. Но $V_{MRSM_1R_1S_1} = \frac{MM_1}{AA_1} V_{ABCA_1B_1C_1}$, откуда получаем, что $V_{MNKP} = \frac{1}{3} \frac{MM_1}{AA_1} V_{ABCA_1B_1C_1}$.

Нам осталось найти такое положение плоскости α, при котором MM_1 максимально. Заметим, что из точек M_1, N_1, K_1 хотя бы одна лежит в исходной призме, откуда $MM_1 = NN_1 = KK_1 \leq \max\{AM, A_1M, BN, B_1N, CK, C_1K\}$. Подставляя данные в задаче отношения, окончательно получаем, что $MM_1 = NN_1 = KK_1 = B_1N = \frac{3}{5} BB_1$, откуда $V_{MNKP} = \frac{1}{3} \frac{NN_1}{BB_1} V_{ABCA_1B_1C_1} = \frac{1}{3} \frac{3}{5} 40 = 8$.





Вариант IV

Задача 1. Докажите неравенство

$$\log_{2018} 2020 > \frac{\log_{2018} 1 + \log_{2018} 2 + \ldots + \log_{2018} 2019}{2019}.$$

Решение. После умножения обеих частей на 2019 и некоторых преобразований, получаем, что нам достаточно доказать неравенство

$$\log_{2018} 2020^{2019} > \log_{2018}(1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2019).$$

Указанное неравенство следует из того, что $2020^{2019} > 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2019$, а последнее получается перемножением 2019 неравенств $2020 > 1$, $2020 > 2$, $\ldots$, $2020 > 2019$.

Задача 2. n грибников ходили в лес и принесли суммарно 162 грибов (каждый принёс домой хотя бы по одному грибу). Мальчик Петя, узнав об этом, заявил: «Какие-то двое из них обязательно принесли одинаковое количество грибов!» При каком наименьшем n мальчик Петя наверняка окажется прав? Не забудьте обосновать свой ответ.

Ответ: 18.

Решение. Для начала докажем, что при $n \leqslant 17$ Петя может ошибиться. Предположим, что первые $n-1$ грибников собрали соответственно $1, \ldots, n-1$ гриба, а n-й — все остальные. Поскольку

$$1 + \ldots + (n-1) \leqslant 1 + \ldots + 16 = 136 = 162 - 26,$$

то последний грибник собрал не менее 26 грибов, т.е. больше, чем каждый из остальных. Итак, при $n \leqslant 17$ существует пример, когда Петя мог быть не прав.

Покажем, что при $n = 18$ Петя всегда окажется прав. Предположим, что он не прав и пусть грибники собрали $a_1 < \ldots < a_{18}$ грибов. Несложно видеть, что $a_i \geqslant i$, откуда

$$162 = a_1 + \ldots + a_{18} \geqslant 1 + \ldots + 18 = 171,$$

противоречие.

Задача 3. Вася хочет найти все целые числа a такие, что выражение $5n^3 + 9n^5 + 8an$ делится на 15 для всех целых n. Какие остатки может давать число a при делении на 15? Укажите все возможные ответы или докажите, что таких целых чисел a нет.

Ответ: 2.

Решение. Для начала покажем, что $n^3 \equiv n \pmod 3$ и $n^5 \equiv n \pmod 5$ для любого натурального n. Это можно сделать несколькими способами. Приведём лишь три из них.

Первый способ. Разобьём все натуральные числа на группы по их остаткам при делении на 3 и 5:

n	n^3	$n^3 \bmod 3$
0	0	0
1	1	1
2	8	2

n	n^5	$n^5 \bmod 5$
0	0	0
1	1	1
2	32	2
3	243	3
4	1024	4

Из таблицы видно, что доказываемое утверждение верно.

Второй способ. Заметим, что $n^3 - n = (n-1)n(n+1)$ — произведение трёх последовательных целых чисел, а

$$n^5 - n = (n-1)n(n+1)(n^2+1) \equiv (n-1)n(n+1)(n^2-4) = (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2) \pmod 5$$

— произведение пяти последовательных целых чисел. В первом случае выражение всегда делится на 3, а во втором — на 5, что и требовалось.

Третий способ состоит в том, чтобы сказать, что эти утверждения являются частными случаями малой теоремы Ферма[4].

Теперь взглянем на исходное выражение по модулю 3:

$$5n^3 + 9n^5 + 8an \equiv 5n + 8an \equiv (2a+2) \cdot n \pmod 3.$$

Это выражение делится на 3 при любом целом n тогда и только тогда, когда $2a+2$ кратно 3, т.е. когда a даёт остаток 2 при делении на 3. Аналогично, $5n^3 + 9n^5 + 8an \equiv (3a+4) \cdot n \pmod 5$, т.е. $3a+4$ делится на 5, a даёт остаток 2 при делении на 5.

Итак, $a \equiv 2 \pmod 3$ и $a \equiv 2 \pmod 5$, т.е. $a \equiv 2 \pmod{15}$.

Другое решение. Подставим $n = 1$ и получим, что если такое a и существует, то $14 + 8a$ должно делится на 15, т.е. a должно давать остаток 2 при делении на 15. Осталось проверить, что если $a \equiv 2 \pmod{15}$, то указанное выражение делится на 15 для любого натурального n. Это можно сделать многими способами (см., например, первое решение). Приведём здесь ещё один.

Докажем это утверждение индукцией по n (для $n = 0$ делимость очевидна, для отрицательных n доказывается аналогично или сводится к случаю положительного n заменой $n \to -n$). Если $n = 1$, утверждение уже проверено. Предположим теперь, что мы уже доказали, что $5n^3+9n^5+8an$ делится на 15 и докажем, что $5(n+1)^3 + 9(n+1)^5 + 8a(n+1)$ также делится на 15. Посмотрим на разность этих двух выражений:

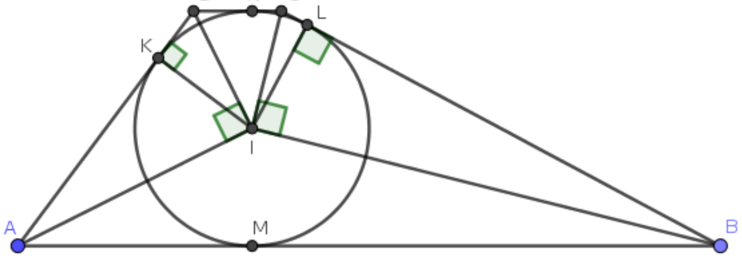
$$5\left((n+1)^3 - n^3\right) + 9\left((n+1)^5 - n^5\right) + 8a\left((n+1) - n\right) = 5(3n^2+3n+1) + 9(5n^4+10n^3+10n^2+5n+1) + 8a.$$

После раскрытия скобок все слагаемые в правой части, кроме $5 + 9 + 8a$, делятся на 15, но $14 + 8a$ делится на 15, поскольку $a \equiv 2 \pmod{15}$.

Задача 4. В трапецию $ABCD$ вписана окружность радиуса 2, касающаяся основания CD в точке N. Найдите площадь трапеции, если $DN = 1$ и $AB = 12$.

Ответ: 27.

Решение. Пусть K, L, M — точки касания вписанной окружности со сторонами AD, BC, AB соответственно; пусть I — центр вписанной окружности. Сразу заметим, что $DK = DN = 1$.



Поскольку I является точкой пересечения биссектрис внутренних углов трапеции, то $\angle IAD + \angle IDA = (\angle DAB + \angle ADC)/2 = 180^\circ/2 = 90^\circ$, где предпоследнее равенство следует из параллельности прямых AB и CD. Следовательно, треугольник AID прямоугольный и $\angle AID = 90^\circ$. Аналогично, прямоугольным является и треугольник BIC.

Далее, поскольку IK и IL являются радиусами, проведёнными к точкам касания, то $\angle IKD = 90^\circ$ и $\angle ILB = 90^\circ$. Следовательно, IK и IL — высоты в треугольниках AID и BIC соответственно. Воспользуемся известным фактом, что в прямоугольном треугольнике квадрат высоты, опущенной на гипотенузу, равняется произведению отрезков, на которые она делит гипотенузу. Тогда

$$4 = IK^2 = AK \cdot KD = 1 \cdot AK,$$

т.е. $AK = 4$. По равенству отрезков касательных имеем $AM = AK = 4$, откуда $BL = BM = AB - AM = 12 - 4 = 8$. В прямоугольном треугольнике BIC получаем $4 = IL^2 = CL \cdot LB = 8 \cdot CL$, т.е. $CL = 0{,}5$.

[4]см. https://ru.wikipedia.org/wiki/Малая_теорема_Ферма#Альтернативная_формулировка

Теперь у нас есть всё для нахождения площади. Заметим, что LM является высотой трапеции и $LM = 2r = 4$, $AB + CD = AB + DN + CN = 12 + 1 + 0{,}5 = 13{,}5$, откуда ответ $\frac{4 \cdot 13{,}5}{2} = 27$.

Задача 5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 &= (y-z)^2 - 8 \\ y^2 &= (z-x)^2 - 20 \\ z^2 &= (x-y)^2 + 40 \end{cases}.$$

Ответ: $(-1, -4, -7)$, $(1, 4, 7)$.

Решение. Перенесём в каждом уравнении квадрат разности в левую части и применим формулу для разности квадратов:

$$\begin{cases} (x-y+z)(x+y-z) &= -8 \\ (y-z+x)(y+z-x) &= -20 \\ (z-x+y)(z+x-y) &= 40 \end{cases}.$$

Обозначим $X = -x + y + z$, $Y = x - y + z$, $Z = x + y - z$. Тогда

$$\begin{cases} YZ &= -8 \\ ZX &= -20 \\ XY &= 40 \end{cases}.$$

Перемножая все получившиеся равенства, имеем $(XYZ)^2 = 8 \cdot 20 \cdot 40$, откуда $XYZ = 80$ или $XYZ = -80$. Разберём случай $XYZ = 80$. В нём $X = (XYZ)/(YZ) = -10$, $Y = -4$, $Z = 2$; тогда $x = \frac{Y+Z}{2} = -1$, $y = -4$, $z = -7$. Второй случай разбирается аналогично и в нём $x = 1$, $y = 4$, $z = 7$.

Задача 6. Изобразите (с обоснованием) на координатной плоскости Oxy множество решений неравенства

$$(y^2 - \arccos^2(\cos x)) \cdot (y^2 - \arccos^2(\cos(x + \pi/6))) \cdot (y^2 - \arccos^2(\cos(x - \pi/6))) < 0.$$

Решение. Заметим, что при увеличении или уменьшении x на 2π значение выражения слева не меняется, поэтому достаточно построить решение для какого-то промежутка длины 2π.

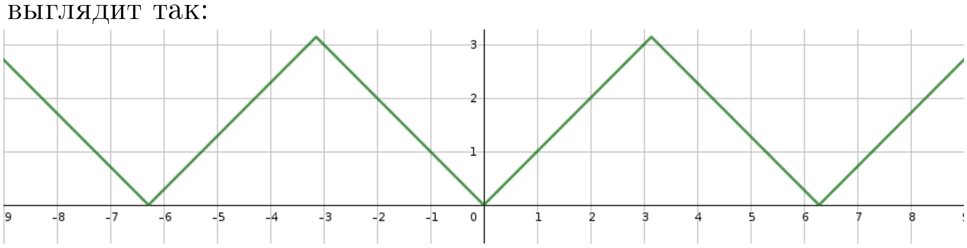
Для начала посмотрим множество точек, удовлетворяющих равенству

$$(y^2 - \arccos^2(\cos x)) \cdot (y^2 - \arccos^2(\cos(x + \pi/6))) \cdot (y^2 - \arccos^2(\cos(x - \pi/6))) = 0.$$

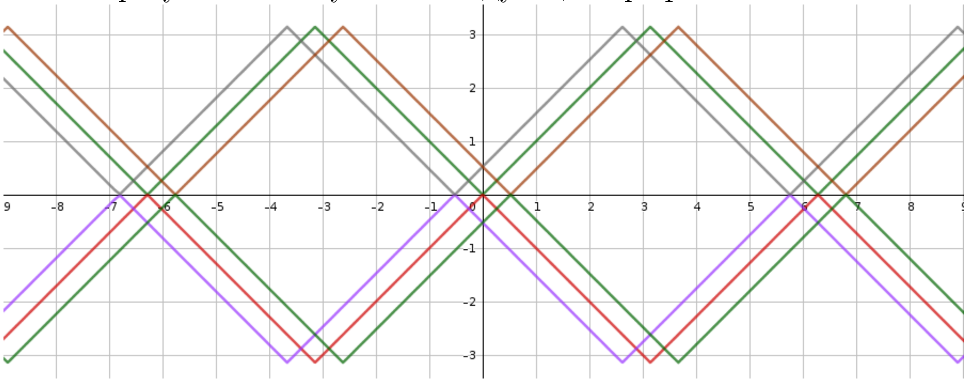
Если разложить каждую из скобок как разность квадратов, то получится произведение шести множителей. Данное равенство эквивалентно следующей совокупности:

$$\left[\begin{array}{lll} y &=& \arccos(\cos x) \\ y &=& -\arccos(\cos x) \\ y &=& \arccos(\cos(x + \pi/6)) \\ y &=& -\arccos(\cos(x + \pi/6)) \\ y &=& \arccos(\cos(x - \pi/6)) \\ y &=& -\arccos(\cos(x - \pi/6)) \end{array}\right..$$

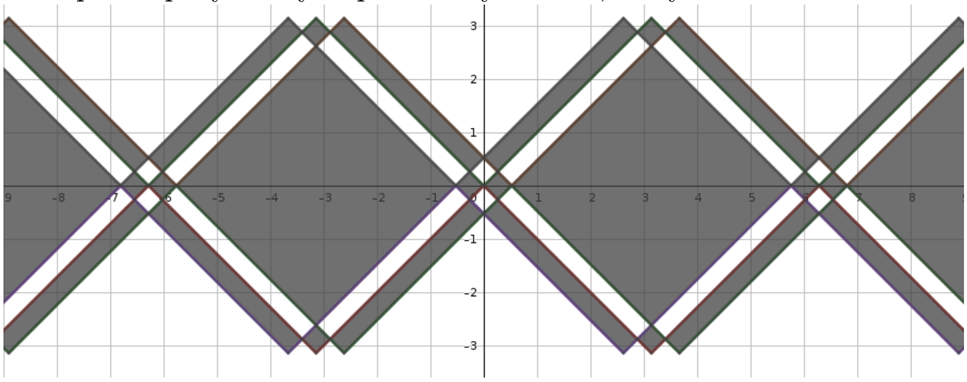
Построим график $y = \arccos(\cos x)$. При $0 \leqslant x \leqslant \pi$ по определению $\arccos(\cos x) = x$. При $\pi < x < 2\pi$, если $\cos x = a$, то $\cos(2\pi - x) = a$ и $0 < 2\pi - x < \pi$, т.е. $\arccos(\cos x) = 2\pi - x$. Итого, график $y = \arccos(\cos x)$ выглядит так:



Оставшиеся пять графиков получаются параллельными переносами вдоль оси Ox и отражениями относительно оси Ox. В результате получится следующий график:



Заметим теперь, что при $y = 100$ выражение в левой части, очевидно, положительно, поэтому область «выше всего» не удовлетворяет требуемому неравенству. При пересечении же графика некоторой функции ровно один из шести сомножителей меняет знак, поэтому из двух «соседних» областей ровно один удовлетворяет требуемому неравенству. Итого, получаем ответ:



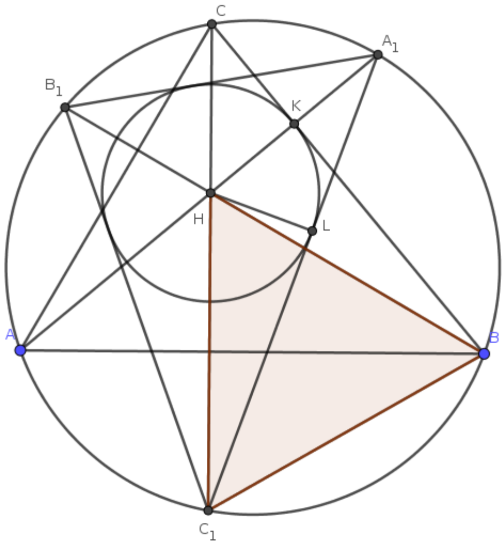
Задача 7. Точки A_1, B_1, C_1 — точки пересечения продолжений высот остроугольного треугольника ABC с описанной вокруг ABC окружностью. Окружность, вписанная в треугольник $A_1B_1C_1$, касается одной из сторон ABC, а один из углов треугольника ABC равен $80°$. Найдите два других угла треугольника ABC.

Ответ: $60°$ и $40°$.

Решение. Не умаляя общности, пусть окружность ω, вписанная в $A_1B_1C_1$, касается стороны BC. Пусть H — точка пересечения высот треугольника ABC, K — точка касания ω и BC, L — точка касания ω и A_1C_1. Мы собираем доказать, что треугольник HBC_1 — равносторонний. Тогда $\angle BAC = \angle BC_1C = 60°$, откуда с учётом условия и будет следовать ответ.

Для начала заметим, что H есть точка пересечения биссектрис треугольника $A_1B_1C_1$. Действительно, например, $\angle B_1C_1C = \angle B_1BC = 90° - \angle C = \angle CAA_1 = \angle CC_1A_1$, т.е C_1H — биссектриса угла $A_1C_1B_1$; аналогично проверяются и то, что A_1H и B_1H также являются биссектрисами соответствующих углов. Следовательно, H — центр вписанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$ и $HK = HL$. Кроме того, выше доказано, что $\angle HC_1L = \angle HBK$, т.е. прямоугольные треугольники HC_1L и HBK равны по катету и острому углу. Поэтому $HC_1 = HB$.

Осталось заметить, что $HB = BC_1$. Этот факт хорошо известен и может быть доказан различными способами. Приведём здесь лишь один из них. Заметим, что треугольники AHB и AC_1B равны по стороне (общая сторона AB) и двум углам ($\angle HAB = \angle A_1B_1B = \angle C_1B_1B = \angle C_1AB$; аналогично доказываем, что $\angle HBA = \angle C_1BA$).



Задача 8. При каких значениях параметра a уравнение

$$5^{x^2+2ax+a^2} = ax^2 + 2a^2x + a^3 + a^2 - 6a + 6$$

имеет ровно одно решение?

Ответ: Только при $a = 1$.

Решение. Обозначим $x + a$ через t. Заметим, что количество решений уравнения от такой замены не меняется. Тогда исходное уравнение приобретёт вид

$$5^{t^2} = at^2 + a^2 - 6a + 6.$$

Заметим, что выражения в обеих частях не меняются при замене t на $-t$, поэтому нечётное число решений (в частности, ровно одно решение), это уравнение может иметь только если $t = 0$ является его корнем:

$$5^0 = a \cdot 0 + a^2 - 6a + 6,$$

т.е. $a^2 - 6a + 5 = 0$, откуда $a = 5$ или $a = 1$. Итак, кроме этих двух чисел, никакие другие значения параметра a не могут удовлетворять условию.

Пусть $a = 1$. Тогда уравнение примет вид $5^{t^2} = t^2 + 1$. Заметим, что $5^x > x \ln 5 + 1$ при $x > 0$ (что можно доказать, например, взяв производные обеих частей). Тогда при $t \neq 0$ получаем $5^{t^2} > t^2 \ln 5 + 1 > t^2 + 1$. Итак, при $a = 1$ уравнение имеет единственное решение.

Пусть $a = 5$. Тогда уравнение примет вид $5^{t^2} = 5t^2+1$. Заметим, что $5^1 = 5$, $5 \cdot 1+1 = 6$, но $5^{2^2} = 625$, $5 \cdot 2^2 + 1 = 21$, т.е. при $t = 1$ левая часть меньше правой, а при $t = 2$ — наоборот. Следовательно, по теореме о промежуточном значении, уравнение имеет ещё хотя бы корень на интервале $(1, 2)$. Следовательно, $a = 5$ не удовлетворяет условию.

Задача 9. В десятичной записи чётного числа M участвуют только цифры 0, 2, 4, 5, 7 и 9, цифры могут повторяться. Известно, что сумма цифр числа $2M$ равняется 39, а сумма цифр числа $M/2$ равняется 30. Какие значения может принимать сумма цифр числа M? Укажите все возможные ответы.

Ответ: 33.

Решение. Обозначим сумму цифр натурального числа n через $S(n)$. Заметим следующие факты, каждый из которых легко проверить, если складывать числа в столбик.

Лемма 1. Пусть n — натуральное число. Тогда количество нечётных цифр в числе $2n$ равняется количеству переносов при сложении n и n.

Лемма 2. Пусть n — натуральное число. Тогда количество цифр в числе n, больше или равных 5, равняется количеству переносов при сложении n и n.

Лемма 3. Пусть n и m — натуральные числа. Тогда $S(n + m) = S(n) + S(m) - 9k$, где k равняется количеству переносов при сложении n и m.

Пусть N — количество нечётных цифр в числе M; учитывая условие, N — это количество цифр в числе M, больше или равных 5. Заметим, что тогда по лемме 1 при сложении $M/2$ и $M/2$ было ровно N переносов, откуда по лемме 3 имеем $S(M) = 2S(M/2) - 9N = 60 - 9N$. По лемме 2 при сложении M и M также было N переносов, откуда опять же по лемме 3 имеем $39 = S(2M) = 2S(M) - 9N$.

Итак, $S(M) = 60 - 9N$, $2S(M) = 39 + 9N$, откуда $3S(M) = 99$, $S(M) = 33$.

Задача 10. Точки M, N и K расположены на боковых рёбрах AA_1, BB_1 и CC_1 треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ так, что $AM : AA_1 = 5 : 6$, $BN : BB_1 = 6 : 7$, $CK : CC_1 = 2 : 3$. Точка P принадлежит призме. Найдите наибольшее возможное значение объема пирамиды $MNKP$, если объём призмы равен 35.

Ответ: 10.

Решение. Предположим, что мы нашли положение точки P, при котором объём пирамиды $MNKP$ максимален. Проведём через неё плоскость α, параллельную плоскости MNK, назовём M_1, N_1 и K_1 точки пересечения этой плоскости с рёбрами AA_1, BB_1 и CC_1 соответственно. Заметим, что $V_{MNKP} = \dfrac{1}{3}V_{MNKM_1N_1K_1}$. Проведём через точки M и M_1 плоскости β и β_1, параллельные плоскости ABC, назовём R и R_1 точки пересечения с ребром BB_1, а S и S_1 с ребром CC_1. Заметим, что фигуры $MNKRS$ и $M_1N_1K_1R_1S_1$ получаются друг из друга параллельным переносом, и следовательно равны, а значит равны и их объёмы. Тогда объёмы призм $MNKM_1N_1K_1$ и $MRSM_1R_1S_1$ тоже равны. Но $V_{MRSM_1R_1S_1} = \frac{MM_1}{AA_1}V_{ABCA_1B_1C_1}$, откуда получаем, что $V_{MNKP} = \frac{1}{3}\frac{MM_1}{AA_1}V_{ABCA_1B_1C_1}$.

Нам осталось найти такое положение плоскости α, при котором MM_1 максимально. Заметим, что из точек M_1, N_1, K_1 хотя бы одна лежит в исходной призме, откуда $MM_1 = NN_1 = KK_1 \leq \max\{AM, A_1M, BN, B_1N, CK, C_1K\}$. Подставляя данные в задаче отношения, окончательно получаем, что $MM_1 = NN_1 = KK_1 = BN = \frac{6}{7}BB_1$, откуда $V_{MNKP} = \frac{1}{3}\frac{NN_1}{BB_1}V_{ABCA_1B_1C_1} = \frac{1}{3}\frac{6}{7}35 = 10$.