



Всесибирская открытая олимпиада
школьников по астрономии



Заключительный этап

11 класс

1. 4 января 1959 года советские специалисты вывели на гелиоцентрическую орбиту первый искусственный спутник Солнца, по разным причинам носящий название «Луна-1». Орбита аппарата имеет наклонение $0,0010^\circ$ к плоскости эклиптики, эксцентриситет 0,14767 и большую полуось 1,1458 а.е. Считая, что 4 января 1959 года аппарат вместе с Землёй был в точке перигелия земной орбиты, определите с разумной точностью, где аппарат может находиться сейчас. С какими большими объектами Солнечной системы аппарат теоретически может столкнуться?

Решение

Наклоением орбиты аппарата можно пренебречь, считаем, что аппарат движется в плоскости эклиптики.

Период обращения аппарата вокруг Солнца равен $1,1458^{3/2} = 1.2265$ лет. От запуска аппарата до 9 февраля 2020 г. («сейчас») прошёл 61 год и 36 дней = 61.0849 лет. За это время аппарат совершил с хорошей точностью 49,8 оборотов вокруг Солнца.

Текущая позиция аппарата определяется нецелым остатком количества оборотов – то есть сейчас аппарат «сдвинут» по своей орбите на 0,8 оборота от общего с Землёй перигелия.

Наиболее точный расчёт положения аппарата подразумевает использование уравнения Кеплера. Средняя аномалия $M = 0,8 \cdot 2\pi = 5,03$ рад.

По уравнению Кеплера $E - e \cdot \sin E = M$ можно найти эксцентрическую аномалию, правда, это приходится делать подбором. Очевидно, что при небольшом эксцентриситете E должно быть слегка меньше, чем M , то есть чуть меньше 5 радиан.

Подбором значений получаем $E = 4,885$ рад.

Дальше из формулы связи эксцентрической и истинной аномалий получаем:

$$\operatorname{tg} \varphi/2 = ((1 + e) / (1 - e))^{1/2} \operatorname{tg} E/2, \text{ откуда } \varphi = 4,737 \text{ рад.}$$

Зная параметры орбиты и истинную аномалию, можем рассчитать текущий радиус орбиты:

$$R = a(1 - e^2) / (1 + e \cdot \cos \varphi) = 1.117 \text{ а.е.}$$

Итого: спутник Луна-1 сейчас на расстоянии **1,117 а.е. от Солнца**, его радиус-вектор составляет угол $(2\pi - \varphi) = 88,6^\circ$ с направлением на точку перигелия земной орбиты.

По поводу возможности столкновений: афелий орбиты = 1,163 а.е., то есть столкновение с Марсом и другими внешними планетами исключено. То есть в астрономическом периоде времени Луна-1 может разве что **упасть на Землю или Луну**. С другими планетами она не встретится.

2. На какой широте Земли сегодня закончилась полярная ночь? А полярный день?

Решение

Найдём склонение Солнца сегодня (9 февраля). Это можно сделать разными методами, но удобнее всего запомнить несложную формулу, которую можно вывести из сферической тригонометрии:

$\sin \delta = \sin 23,4^\circ \cdot \sin (2\pi t/365.24)$, t – время в днях с момента весеннего равноденствия.

До весеннего равноденствия (20 марта) осталось 40 дней, поэтому $t = -40$, и $\delta = -14.6^\circ$.

Верхняя кульминация Солнца сегодня на горизонте на широте $75,4$ с.ш., а нижняя – на широте $75,4$ ю.ш. Казалось бы, это и есть ответы на вопросы задачи. Но не совсем.

Во-первых, нужно учесть атмосферную рефракцию, которая у горизонта «приподнимает» небесные тела на $0,6^\circ$, сдвигая границу полярной ночи к полюсу, а границу полярного дня – от полюса на эти же $0,6^\circ$.

Во-вторых, по склонению мы считаем высоты кульминаций центра Солнца, а полярная ночь и полярный день считаются по высоте над/под горизонтом верхнего края солнечного диска. Это также сдвигает границу полярной ночи к полюсу, а границу полярного дня – от полюса на угловой радиус Солнца – на $0,25^\circ$.

Итоговый ответ: граница полярной ночи – **$76,25^\circ$ с.ш.**, граница полярного дня – **$74,55^\circ$ ю.ш.**

3. Вокруг одиночного красного гиганта с массой $8 M_{\odot}$ по эллиптической орбите с эксцентриситетом $0,7$ и большой полуосью 3 а.е. обращается планета. Оцените вероятность того, что после взрыва звезды как сверхновой с симметричным разлётом 60% её массы планета останется на стабильной орбите.

Решение

После взрыва звезды масса центрального тела уменьшилась в $2,5$ раза. Если планеты движется по круговой орбите с первой космической скоростью $(GM_0/R)^{1/2}$, то при уменьшении массы звезды в $2,5$ раза скорость планеты становится больше новой второй космической скорости, и планеты переходит на гиперболическую траекторию.

Однако наша планета вращается по эллиптической орбите с достаточно большим эксцентриситетом, а значит, есть моменты, когда её скорость намного меньше первой космической. Это даёт надежду, что даже после взрыва скорость будет меньше новой скорости убегания, и планета останется на замкнутой орбите.

Скорость тела в произвольной точке эллиптической орбиты равна $V = (GM_0 \cdot (2/r - 1/a))^{1/2}$.

Нам нужно, чтобы эта скорость оказалась меньше, чем $(2G \cdot 0,4M_0/r)^{1/2}$.

Отсюда $(2/r - 1/a) < 0,8/r$, и $r > 1,2a$. При эксцентриситете $0,7$ максимальное (афелийное) расстояние равно $1,7a$, то есть у нашей планеты действительно есть шанс «выжить».

Вероятность «выживания» – это доля периода обращения, в течение которой планета находится от звезды на расстоянии от $1,2a$ до $1,7a$.

Запишем уравнение эллипса в полярных координатах: $r = a \cdot (1 - e^2) / (1 + e \cdot \cos \varphi)$. Здесь φ – полярный угол, отсчитываемый от направления на перицентр орбиты (истинная аномалия).

Радиус равен $1,2a$ при $\cos \varphi = ((1 - 0,7^2) / 1,2 - 1) / 0,7 = -0,82$, что соответствует $\varphi = \pm 145,2^\circ$.

По истинной аномалии можно найти эксцентрическую аномалию:

$$\operatorname{tg} \varphi/2 = ((1 + e) / (1 - e))^{1/2} \operatorname{tg} E/2 = 2,38 \operatorname{tg} E/2, \text{ откуда } E = 1,85 \text{ рад.}$$

Подставляем эксцентрическую аномалию $E = 1,85$ рад в уравнение Кеплера, получаем значение средней аномалии: $M = 1,85 - 0,7 \cdot \sin 1,85 = 1,18$ рад. Средняя аномалия изменяется со временем равномерно, поэтому как раз показывает долю периода обращения.

Доля периода обращения, когда планета находится на «правильном» расстоянии $> 1,2 a$, равна $(\pi - 1,85) / \pi = \mathbf{0,41}$. Это и есть вероятность «выживания» нашей планеты.

-
4. Аппарат «Вояджер-1» сейчас находится от Земли на расстоянии около 149 а.е. Какой минимальной мощности передатчик нужен землянам, чтобы провести радиолокацию «Вояджера»? Считаем, что материал аппарата отражает (равномерно во все стороны) 50% падающего света, передатчик работает на длине волны 1 м, чувствительность приёмника — 10 мкВт/см^2 .

Решение

Радиопередатчик, в отличие от генераторов оптического излучения, имеет размер порядка длины волны испускаемого излучения. Это приводит к тому, что испускаемый поток излучается не равномерно в полусферу, а в конус с углом раствора порядка λ / d . (d – диаметр антенны).

В нашем случае такая направленность потока играет положительную роль, так как на расстоянии 149 а.е. излучение распространится не по площади $4\pi D^2$ или $2\pi D^2$, а по гораздо меньшей площади $S_0 = \pi (\lambda / 2d)^2 \cdot D^2$ (D – расстояние от Земли до «Вояджера»).

При мощности передатчика N плотность падающего на Вояджер потока равна

$$N / S_0 = 4 N d^2 / (\pi \lambda^2 D^2)$$

«Светимость» отражённого от Вояджера сигнала $L = 4 N d^2 / (\pi \lambda^2 D^2) \cdot S_B \cdot 0,5$.

По условию, аппарат отражает сигнал во все стороны (в полусферу), поэтому световой поток, дошедший до Земли, равен

$$W = L / 2\pi D^2 = N d^2 / (\pi^2 \lambda^2 D^4) \cdot S_B = 10 \text{ мкВт/см}^2 = 0,1 \text{ Вт/м}^2,$$

откуда при площади поверхности Вояджера порядка 10 м^2 и характерном диаметре антенны 10 м получаем мощность источника

$$N = 2.5 \cdot 10^{50} \text{ Вт.}$$

Разумеется, в таких условиях никаким земным передатчиком радиолокацию Вояджера провести невозможно.

5. Как известно, красный сверхгигант Бетельгейзе за последние несколько лет уменьшил свой видимый блеск примерно на 1,5 звёздных величины. Некоторые теории связывают потемнение звезды не с внутренними процессами, а с облаками газа и пыли, окружающими звезду и скрывающими часть потока излучения. Оцените необходимую для подобного потемнения концентрацию пылевых частиц. Считаем, что облако состоит из абсолютно чёрных частиц пыли диаметром 0,1 мкм. Толщина возможного пылевого облака (по лучу зрения) оценивается в 30 а.е.

Решение

Яркость Бетельгейзе упала на $1,5^m = 4$ раза, то есть пылевое облако экранирует примерно $\frac{3}{4}$ потока излучения звезды.

Спроецируем на картинную плоскость «столбик» пылевого облака толщиной по лучу зрения 30 а.е. и площадью 1 м^2 . Тогда все пылинки займут примерно $\frac{3}{4}$ площади получившейся проекции. Для оценки можно считать, что пылинки друг друга не перекрывают.

Площадь проекции каждой пылинки равна $\pi \cdot 10^{-14} \text{ м}^2$, а общая площадь всех пылинок составляет $0,75 \text{ м}^2$. Значит, в таком столбике объёмом $1 \text{ м}^2 \cdot 30 \text{ а.е.} = 4,5 \cdot 10^{12} \text{ м}^3$ присутствует примерно $0,75 / (\pi \cdot 10^{-14}) = 2,4 \cdot 10^{13}$ пылинок.

Итоговая концентрация пылинок равна $2,4 \cdot 10^{13} / 4,5 \cdot 10^{12} = \mathbf{5,3 \text{ шт / м}^3}$.

6. Астероид, по свойствам своей поверхности напоминающий Луну, находится на земном небе на расстоянии 20° от Солнца. Его горизонтальный параллакс составляет $3''$, а видимая звёздная величина $+14^m$. По этим данным оцените размеры астероида.

Решение

По горизонтальному параллаксу (с базой = $R_3 = 6371 \text{ км}$) можно найти расстояние до астероида: $D = 6371 / (3 / 206265) = 4,38 \cdot 10^8 \text{ км} = 2,9 \text{ а.е.}$

По теореме косинусов в треугольнике «астероид – Солнце – Земля» можно найти расстояние от Солнца до астероида: $D_{CA}^2 = (1)^2 + (2,9)^2 - 2,9 \cos 20^\circ = 6,68$; $D_{CA} = 2,59 \text{ а.е.}$

Из того же треугольника находим фазовый угол: $\sin \varphi = \sin 20^\circ \cdot 1 \text{ а.е.} / 2,59 \text{ а.е.}$, откуда $\varphi = 7,59^\circ$. Фаза астероида равна $0,5 (1 + \cos \varphi) = 0,996 \approx 1$.

Световой поток от Солнца на астероид составляет $1360 \text{ Вт/м}^2 / (2,9)^2 = 161,7 \text{ Вт/м}^2$.

Альbedo астероида совпадает с лунным (0,15), поэтому световой поток отражённого света, дошедший от астероида до Земли, равен

$$W = 161,7 \text{ Вт/м}^2 \cdot \pi R^2 \cdot 0,15 / (2\pi \cdot (2,9 \text{ а.е.})^2)$$

С другой стороны, он соответствует потоку от объекта +14^m:

$$W = 1360 \cdot 2,512^{-26,7-14} = 7,1 \cdot 10^{-14} \text{ Вт/м}^2.$$

Приравнивая два выражения, получаем: **R = 33,4 км.**
