Решения. Классы 10-11.

Задача 1.

Газ получает теплоту от нагревателя на участке *1 – 2* и отдает теплоту холодильнику на участке *3 – 4*. КПД цикла $\eta = \frac{A}{Q_{12}}$, где A – работа, совершаемая газом за цикл. По условию $A = \alpha\,|\,Q_{34}\,|$. Кроме того, $Q_{12} = A + |\,Q_{34}\,| = (\alpha+1)\,|\,Q_{34}\,|$.

Ответ: $\eta = \frac{\alpha}{\alpha+1} = 0{,}6$, или 60%.

Задача 2.

Вдоль поверхности наклонной плоскости на доску действуют сила трения F, направленная вверх, и составляющая веса доски $Mg\sin\alpha$, направленная вниз. По условию, эти две силы равны по величине, т.е. $F = Mg\sin\alpha$. Отсюда получим $F = 25$ Н. По третьему закону Ньютона, сила F создает такую же по величине силу P, действующую на тележку. Эта сила P есть часть той силы тяги, о которой идет речь в задаче. Остальная часть силы тяги, связанная с реактивным движением, не влияет на положение доски на наклонной плоскости. Таким образом, полная сила тяги будет больше или равна 25 Н.

Ответ: $F_{\text{тяги}} \geq 25$ Н.

Задача 3.

Необходимо решить уравнение $\frac{10}{(x+10)} + \frac{10\cdot 9}{(x+10)(x+9)} + \cdots + \frac{10\cdot 9\cdot\ldots\cdot 1}{(x+10)(x+9)\ldots(x+1)} = 11$. Сложим две последние дроби

$$\frac{10\cdot 9\cdot\ldots\cdot 2}{(x+10)(x+9)\ldots(x+2)} + \frac{10\cdot 9\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}{(x+10)(x+9)\ldots(x+2)(x+1)}$$
$$= \frac{10\cdot 9\cdot\ldots\cdot 2(x+1+1)}{(x+10)(x+9)\ldots(x+2)(x+1)} = \frac{10\cdot 9\cdot\ldots\cdot 2}{(x+10)(x+9)\ldots(x+3)(x+1)}.$$

Теперь к этой дроби добавим третье (с конца) слагаемое

$$\frac{10\cdot 9\cdot\ldots\cdot 2}{(x+10)(x+9)\ldots(x+3)(x+1)} + \frac{10\cdot 9\cdot\ldots\cdot 3}{(x+10)(x+9)\ldots(x+3)}$$
$$= \frac{10\cdot 9\cdot\ldots\cdot 3(2+x+1)}{(x+10)(x+9)\ldots(x+3)(x+1)} = \frac{10\cdot 9\cdot\ldots\cdot 3}{(x+10)(x+9)\ldots(x+4)(x+1)}.$$

Проделав эту операцию еще семь раз, получим уравнение $\frac{10}{x+1} = 11$, откуда $x = -\frac{1}{11}$.

Ответ: $-\frac{1}{11}$.

Задача 4.

Обозначим $\angle DAB = \alpha$. Тогда $\angle MAB = \angle BCK = 180 - \alpha$ (свойство вписанного четырехугольника $ABCD$). Обозначим $\angle ABC = \beta$. Тогда $\angle ABC = 180 - \beta$ (свойство вписанного четырехугольника $ABCD$), $\angle MBK = \beta$ (свойство вписанного четырехугольника $MBKD$). Итак, $\angle MBA + \angle ABK = \beta = \angle ABK + \angle KBC$, то есть $\angle MBA = \angle KBC$. Тогда треугольники ABM и CBK подобны, откуда $\frac{AB}{CB} = \frac{6}{7} = \frac{AM}{CK} = \frac{AM}{2}$.

Ответ: $AM = \frac{12}{7}$.

Задача 5.

```
#include <iostream>
#include <vector>
using namespace std;

int main() {
	int fX, fY, k;
	int x_min, y_min, x_max, y_max;
	cin >> fX >> fY >> k;
	vector< vector<bool> > Field( fX);
	// Переменная Field это двумерный массив с элементами типа boolean
	for (int i = 0; i < fX; i++) {
		Field[i].resize(fY);
	// При определении переменной типа bool C++14 присваивает ей значение "false"
	}

	for (int i = 0; i < k; i++) {
		cin >> x_min >> y_min >>  x_max >>  y_max;
		x_min = max (x_min, 0); // вырбука может выйти за границы леса
		y_min = max (y_min, 0);
		x_max = min (x_max, fX);
		y_max = min (y_max, fY);

		for (int x= x_min; x < x_max; x++)
	// присваиваем значение “true”, если ячейка попала хотя в одну вырубку
			for (int  y = y_min; y < y_max; y++) {
				Field[x][y] = true;
			}

	}

	int Area = 0;
	for (int x= x_min; x < x_max; x++) // считаем число нетронутых ячеек
		for (int  y = y_min; y < y_max; y++) {
			if (Field[x][y] != true) {
				Area++;
			}
		}
	cout << Area << endl;
```

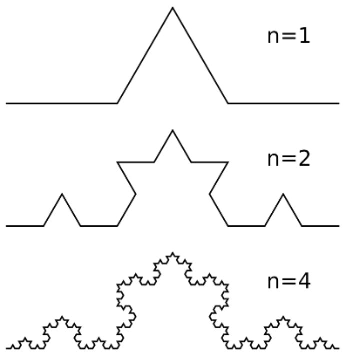
```
    return 0;
}
```

Задача 6.

А) Пусть нам необходимо измерить площадь некоторого объекта с точностью ε. Разобьем снимок сеткой из квадратов с длиной стороны h. Будем считать, что для каждого квадрата сетки мы умеем определять (вручную или автоматически) принадлежность этого квадрата к одной из трех категорий: «квадрат целиком входит в измеряемый объект», «квадрат целиком входит в дополнение к измеряемому объекту» и «квадрат содержит и точки объекта, и точки его дополнения». Обозначим общее число квадратов N, число квадратов первого вида N_1, второго вида N_2 и третьего вида N_3. Составим две дроби $k_1 = \frac{N_1}{N}$ и $k_2 = \frac{N-N_2}{N}$. Умножая эти величины на общую площадь снимка S, получим значение *внутренней* и *внешней меры* объекта $S_1 = k_1 S$ и $S_2 = k_2 S$. Понятно, что истинное значение площади находится на промежутке $[S\_1, S\_2]$. Теперь начнем увеличивать число квадратов, уменьшая тем самым длину стороны h. В какой-то момент точность определения, к какой категории относится данный квадрат, станет неудовлетворительной. Тогда мы перейдем к снимку с большим разрешением и продолжим процесс. В тот момент, когда величина $S_2 - S_1$ станет меньше заданной нам точности ε, процесс можно остановить, взяв в качестве ответа величину $\frac{S_1+S_2}{2}$.

Б) Пусть нам необходимо измерить «величину границы» некоторого объекта. Разобьем снимок сеткой из квадратов с длиной стороны h. Будем считать, что для каждого квадрата сетки мы умеем определять (вручную или автоматически) принадлежность этого квадрата к одной из трех категорий: «квадрат целиком входит в измеряемый объект», «квадрат целиком входит в дополнение к измеряемому объекту» и «квадрат содержит и точки объекта, и точки его дополнения». Обозначим общее число квадратов N, число квадратов первого вида N_1, второго вида N_2 и третьего вида N_3. Будем считать, что центры квадратов третьего вида лежат на нашей кривой, а длина кривой приблизительно равна длине ломаной, соединяющей эти точки. Тогда эту длину можно приблизительно оценить выражением $l(h) = N_3 h$ (мы считаем, что кривая непрерывным образом соединяет центры соседних квадратов). Теперь начнем увеличивать число квадратов, уменьшая тем самым длину стороны h. В какой-то момент точность определения, к какой категории относится данный квадрат, станет неудовлетворительной. Тогда мы перейдем к снимку с большим разрешением и продолжим процесс. Каков бы ни был измеряемый объект, существует максимальная разумная точность детализации его границы. Например, на береговых линиях отсутствуют детали меньше 1 см, при измерении периметра вырубки нет смысла выбирать детализацию больше, чем среднее расстояние между деревьями в лесу и т.д. Таким образом, возможны два случая. Если нам доступны снимки с требуемой детализацией, то мы просто находим величину $l(h_0)$ для данного h_0 и берем ее в качестве длины границы объекта. Если снимки с требуемой детализацией не доступны, то необходимо определить характер функции $l(h)$ и затем продолжить ее за область определения (экстраполировать) и определить ее предполагаемое значение в точке h_0.

Для гладких кривых функция $l(h)$ имеет предел при $h \to 0$. Для реальных кривых величина $l(h)$ при уменьшении h возрастает к бесконечности как $C \cdot h^{-D}$. Таким образом, вначале необходимо экспериментально или с помощью уже имеющихся таблиц определить величину D. Для эмпирического определения величины D найдем натуральный логарифм функции $l(h)$ и заметим, что он должен вести себя как $\ln C - D \cdot \ln h$. Тогда дробь $\frac{\ln l(h)}{\ln h}$ стремится при $h \to 0$ к $-D$. Найдя величину D, можно определить и число C как предел функции $l(h) \cdot h^D$. Параметр D интересен и тогда, когда величина $l(h_0)$ может быть найдена непосредственно. Он показывает «изрезанность», «изгибистость» границы объекта.



В) Заметим, что кривая обладает свойством самоподобия. А именно, та ее часть, которая заключена между точками (0,0) и (1/3,0) есть уменьшенная в три раза копия всей кривой. Часть кривой между точками (1/3,0) и $\left(1/2, \sqrt{3}/2\right)$ также есть копия всей кривой, уменьшенной в три раза и повернутой на 60 градусов. И так далее. Воспользуемся условием пункта Б): при гомотетии с коэффициентом k «длина кривой» должна измениться в k^D раз. В нашем случае кривая есть объединение четырех своих копий, каждая из которых получена уменьшением в три раза. Пусть $l(h)$ – функция, определенная в пункте Б). Получаем

$$l\left(\frac{h}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^D l(h) = \left(\frac{1}{3}\right)^D \cdot 4l\left(\frac{h}{3}\right) \Rightarrow \frac{4}{3^D} = 1, \text{ то есть } D = \log_3 4$$

Ответ: $log_3 4$.

Критерии

Задачи 6а) и 6б) оценивались совместно, задача 6в) независимо от них.

За каждую из задач выставлялись оценки “+” – решена верно, “+.” – есть несущественные ошибки (приравнивается к “+”), “+/-“ – решение, в целом, верное, “-/+” – есть верная идея решения.

Критерии общей оценки:

Нет чистых плюсов, нет плюс/минусов=0.
Нет чистых плюсов, есть ровно один плюс/минус и больше ничего=0.
Нет чистых плюсов, есть плюс/минус и еще плюс/минус или минус/плюс=30.
Ровно один чистый плюс, нет плюс/минусов=40.
Ровно один чистый плюс, ровно один плюс/минус и больше ничего=45.
Ровно один чистый плюс, есть плюс/минус и еще плюс/минус или минус/плюс=50.
Ровно два чистых плюса, нет плюс/минусов=50.

Ровно два чистых плюса, ровно один плюс/минус и больше ничего=55.
Ровно два чистых плюса, есть плюс/минус и еще плюс/минус или минус/плюс=60.
Ровно три чистых плюса, нет плюс/минусов=60.
Ровно три чистых плюса, ровно один плюс/минус и больше ничего =65.
Ровно три чистых плюса, есть плюс/минус и еще плюс/минус или минус/плюс=70.
Ровно четыре чистых плюса, нет плюс/минусов=70.
Ровно четыре чистых плюса, ровно один плюс/минус и больше ничего =75.
Ровно четыре чистых плюса, есть плюс/минус и еще плюс/минус или минус/плюс=80.
Ровно пять чистых плюсов, нет плюс/минусов=80.
Ровно пять чистых плюсов, ровно один плюс/минус и больше ничего =85.
Ровно пять чистых плюсов, есть плюс/минус и еще плюс/минус или минус/плюс=90.
Ровно шесть чистых плюсов, нет плюс/минусов=90.
Ровно шесть чистых плюсов и есть один плюс/минус=95.
Ровно семь чистых плюсов =100.