

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

ПЕРВОЕ ВЫСШЕЕ ТЕХНИЧЕСКОЕ УЧЕБНОЕ ЗАВЕДЕНИЕ РОССИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

**«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**



**ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ГРАНИТ НАУКИ»**

**МАТЕМАТИКА**

**КРИТЕРИИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОБЕДИТЕЛЕЙ И ПРИЗЕРОВ,  
ОТВЕТЫ НА ЗАДАНИЯ ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОГО ТУРА**

**2016/2017 года**

**(очный заключительный тур)**

## **КРИТЕРИИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОБЕДИТЕЛЕЙ И ПРИЗЕРОВ ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОГО ТУРА ОЛИМПИАДЫ ПО МАТЕМАТИКЕ.**

Победителями и призёрами Олимпиады признаются участники очного заключительного тура, работы которых в той или иной степени удовлетворяют следующим критериям:

- 1) В результате решения задач получены правильные ответы.
- 2) Избраны наиболее короткие пути решения, не требующие нахождения промежуточных величин, без которых можно обойтись.
- 3) Методы решения отличны от стандартных школьных подходов – оригинальные решения.
- 4) Избранные методы решения достаточно обоснованы и аргументированы.
- 5) Алгебраические выкладки проведены грамотно и представлены в полном объеме.
- 6) В решениях использованы (если это приводит к упрощению) соображения, вытекающие из графиков и графических схем.
- 7) Творческий подход к решению задач.

Разделение на категории призеров и победителей основано на общей сумме баллов за решение всех задач варианта Олимпиады

Проверку и оценивание работ проводит жюри Олимпиады.

Каждый вариант содержит десять заданий.

Задания в варианте разной сложности, что учитывается при проверке, так как оценка каждого задания зависит от уровня его сложности.

Максимальный балл за задачу ставится в том случае, если задача решена полностью, без недочетов.

Незначительное снижение баллов может быть, если задача решена с недочетами, не влияющими на общий ход решения.

Значительное снижение баллов может быть, если задача не решена (допущены серьезные ошибки) и т.д.

<b>Номер задачи в варианте</b>	<b>Максимальный балл за задачу</b>
№1, №2, №3, №4	5 баллов
№5, №6, №7	10 баллов
№8, №9	15 баллов
№10	20 баллов
<b>Максимальная сумма баллов</b>	<b>100 баллов</b>

Решения, приведенные в черновике или выполненные карандашом, не проверяются и не оцениваются.

Оценки по задачам ставятся в таблицу на первой странице работы.

Ставить оценки внутри работы нежелательно.

Суммарная оценка проставляется на первой странице работы и подтверждается подписью члена Жюри.

Все работы участников Олимпиады, претендующих на признание кандидатами в победители, проходят контрольную проверку председателем Жюри по предмету.

# ОТВЕТЫ НА ЗАДАНИЯ ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОГО ТУРА ОЛИМПИАДЫ

## БИЛЕТ № 1

1. Решить уравнение  $9^x + 4 \cdot 3^{x+1} = 13$ .

2. Между числами 6 и -3,6 вставить семь чисел так, чтобы получилась арифметическая прогрессия.

3. Найти все экстремумы функции  $y = x \lg 2x$ .

4. Вычислить  $\sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{3-\sqrt{5}}$ .

5. Решить неравенство  $\frac{1-0,4x^2}{5-x} \geq \frac{2x}{5}$ .

6. Решить уравнение  $\sqrt{3x^2 + 5x + 7} - \sqrt{3x^2 + 5x + 2} = 1$ .

7. На окружности радиуса 9 см отмечена дуга  $AB$ , содержащая  $120^\circ$ . Через концы этой дуги из одной точки проведены две касательные к окружности. В фигуру, ограниченную дугой  $AB$  и касательными, вписана меньшая окружность. Найти ее радиус.

8. Решить систему 
$$\begin{cases} x + y - 20 = 0; \\ \log_x x + \log_y y = 1 + \log_9 9. \end{cases}$$

9. Найти наибольшее значение функции  $f(x) = 3\sin x + 4\cos x$ .

10. Продавец раскладывает конфеты по подарочным коробкам. При раскладывании по коробкам вместимостью 10 конфет остается 6 конфет, а при раскладывании по коробкам по 15 конфет не хватает 4 конфет. Найти количество конфет, если известно, что их было не менее 200 и не более 250 штук.

## БИЛЕТ № 2

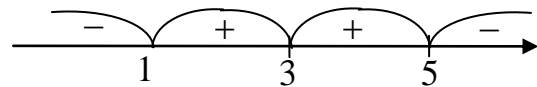
1. Решить уравнение  $9^{x-1} + 3^{x+2} = 90$ .

2. Первый член геометрической прогрессии  $b_1 = \sqrt{3}$ , пятый член  $b_5 = \sqrt{243}$ . Найти шестой член и знаменатель прогрессии.

3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции  $y = x^3 - 3x^2 + 5$  на отрезке  $[-1;1]$ .

4. Вычислить  $\sqrt{4 + \sqrt{7}} - \sqrt{4 - \sqrt{7}}$ .

5. Решить неравенство  $\frac{4-x}{1} > \frac{1}{1}$ .



6. Решить уравнение  $\sqrt{\frac{x-3}{2x+1}} + 2 = 3\sqrt{\frac{2x+1}{x-3}}$ .

7. Площадь равностороннего треугольника, вписанного в окружность, равна  $81 \text{ см}^2$ . Найти радиус окружности.

8. Решить систему 
$$\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 18; \\ \log(x + y) = 0,5. \end{cases}$$

9. Решить уравнение  $4 \sin x - 3 \cos x = 5$ .

10. Птичница пересчитывает яйца. Если она считает дюжинами, то в остатке получается 8 яиц, а до целого числа десятков не хватает 2 яиц. Сколько было яиц, если известно, что их было не менее 300 и не более 400?

### БИЛЕТ № 3

1. Решить уравнение  $(0,5)^{x^2} \cdot 2^{2x+2} = 64^{-1}$ .

2. Найти сумму первых пятнадцати членов арифметической прогрессии, если ее третий член равен  $-5$ , а пятый равен  $2,4$ .

3. Найти все экстремумы функции  $y = \sin^2 3x$  на интервале  $(0; 0,6)$ .

4. Вычислить  $\sqrt{4 + \sqrt{15}} - \sqrt{4 - \sqrt{15}}$ .

**Решение:**  $\sqrt{4 + \sqrt{15}} - \sqrt{4 - \sqrt{15}} = A$ ;  $A^2 = 8 - 2\sqrt{16 - 15} = 1$ ,  $A = \pm\sqrt{6}$ ,  $A = \sqrt{6}$ .

5. Решить неравенство  $\frac{5x^2}{x-1} > 5x+1$ .



6. Решить уравнение  $\sqrt{\frac{2x+2}{x+2}} - \sqrt{\frac{x+2}{2x+2}} = \frac{7}{12}$ .

7. В окружности проведена хорда длиной 10 см. Через один ее конец проведена касательная к окружности, а через другой – секущая, параллельная касательной. Внутренний отрезок секущей равен 12 см. Найти радиус окружности.

8. Решить систему  $\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 972; \\ \log_{\sqrt{3}}(x - y) = 2. \end{cases}$

9. Найти наибольшее значение функции  $f(x) = 6\sin x + 8\cos x$ .

10. Для выступления на спортивном параде тренер решил построить детей шеренгами по 8 человек в каждой, но при этом 5 детей осталось. Тогда он построил шеренги по 10 человек, но осталось 3 пустых места. Известно, что детей было не менее 100 и не более 150 человек. Сколько было детей?

**БИЛЕТ № 4**

1. Решить уравнение  $2 \cdot 4^{2x} - 17 \cdot 4^x + 8 = 0$ .

2. Второй член геометрической прогрессии  $b_2 = 37\frac{1}{3}$ , шестой член  $b_6 = 2\frac{1}{3}$ . Найти первый член и знаменатель прогрессии.

3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции  $y = x^3 - 3x^2 + 5$  на отрезке  $[1;3]$ .

4. Вычислить  $\sqrt{4 + \sqrt{12}} - \sqrt{4 - \sqrt{12}}$ .

5. Решить неравенство  $\frac{5x+1}{x-3} \leq \frac{1}{3}$ .

6. Решить уравнение  $\sqrt{\frac{3x-1}{x+4}} + 3 - 4\sqrt{\frac{x+4}{3x-1}} = 0$ .

7. Диагонали ромба, вписанного в общую часть двух пересекающихся равных кругов, соответственно равны 6 см и 12 см. Найти площади этих кругов.

8. Решить систему 
$$\begin{cases} x \log_2 3 + y = \log_2 18; \\ 5^x = 25^y. \end{cases}$$

9. Решить уравнение  $8 \sin x - 6 \cos x = 10$ .

10. В упаковочном цехе имеется 2 типа ящиков: на 20 деталей и на 27 деталей. Для упаковки поступила партия деталей от 500 до 600 штук. При укладке деталей в ящики первого типа осталось 13 неупакованных деталей, а при укладке в ящики второго типа осталось 7 незаполненных мест. Сколько деталей было в партии?

## БИЛЕТ № 5

1. Решить уравнение  $5^{2x} - 7 \cdot 5^x + 10 = 0$ .

2. Третий член арифметической прогрессии  $a_3 = 3$ , одиннадцатый член  $a_{11} = 15$ .  
Найти первый член и разность прогрессии.

3. Найти все экстремумы функции  $y = \frac{2}{3} \cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)$  на интервале  $(0; \pi/2)$ .

4. Вычислить  $\sqrt{3 + \sqrt{8}} - \sqrt{3 - \sqrt{8}}$ .

5. Решить неравенство  $\frac{x+2}{x-1} > \frac{x+4}{x-3}$ .

6. Решить уравнение  $\sqrt{2x^2 + 3x - 5} - \sqrt{2x^2 + 3x - 8} = 1$ .

7. Расстояние от точки пересечения диаметра окружности радиуса 11 см с хордой длиной 18 см до центра окружности равно 7 см. В каком отношении точка пересечения делит хорду?

8. Решить систему 
$$\begin{cases} \frac{1}{2} \log_2 x - \log_2 y = 0; \\ x^2 - 2y^2 = 8. \end{cases}$$

9. Найти наибольшее значение функции  $f(x) = 5\sin x + 12\cos x$ .

10. Флористу привезли от 300 до 400 роз для оформления праздника. Когда он расставил их в вазы по 21 розе в каждую, осталось 13 роз. А при расстановке по 15 роз в каждую вазу, восьми роз не хватило. Сколько всего было роз?

## БИЛЕТ № 6

1. Решить уравнение  $3 \cdot 9^x + 2 \cdot 3^x = 1$ .

2. Четвертый член геометрической прогрессии  $b_4 = \frac{1}{25}$ , пятый член  $b_5 = \frac{1}{125}$ . Найти сумму первых пяти членов.

3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции  $y = 3x^4 + 4x^3 + 34$  на отрезке  $[-2; 1]$ .

4. Вычислить  $\sqrt{5 + \sqrt{24}} - \sqrt{5 - \sqrt{24}}$ .

5. Решить неравенство  $2x - 1 > \frac{3}{2x + 1}$ .

6. Решить уравнение  $\sqrt{3x^2 - 5x - 4} + \sqrt{3x^2 - 5x - 8} = 2$ .

7. Две вершины квадрата площадью 256 см<sup>2</sup> лежат на окружности, а две другие вершины – на касательной к этой окружности. Найти радиус окружности.

8. Решить систему 
$$\begin{cases} 9^{x^2} = 81 \cdot 3^y; \\ \lg y = \lg x - \lg 0,5. \end{cases}$$

9. Решить уравнение  $12\sin x - 5\cos x = 13$ .  
 $12\sin x - 5\cos x = 13$

10. Кощей пересчитывает золотые монеты. Когда он считает десятками, то в остатке получается 7 монет, а до целого числа дюжин не хватает 3 монет. Состояние Кощея оценивается в 300 – 400 монет. Сколько монет у Кощея?

## БИЛЕТ № 7

1. Решить уравнение  $3 \cdot 2^{x+1} + 5 \cdot 2^x - 2^{x+2} = 21$ .

2. Найти одиннадцатый член арифметической прогрессии, если сумма первых семи членов  $S_7 = 77$ , а первый член  $a_1 = 5$ .

3. Найти все экстремумы функции  $y = \frac{x}{8} + \frac{2}{x}$  на интервале  $(-5; 10)$ .

4. Вычислить  $\sqrt{6 + \sqrt{11}} - \sqrt{6 - \sqrt{11}}$ .

5. Решить неравенство  $\frac{2x^2 - 6x + 5}{x^2 - 4x + 3} < 1$ .

6. Решить уравнение  $\sqrt{\frac{x+3}{3x-5}} + 1 = 2\sqrt{\frac{3x-5}{x+3}}$ .



7. Расстояние от точки пересечения диаметра окружности с хордой длиной 18 см до центра окружности равно 7 см. Эта точка делит хорду в отношении 2:1. Найти радиус.

8. Решить систему 
$$\begin{cases} \log_4 x - \log_2 y = 0; \\ x^2 - 5y^2 + 4 = 0. \end{cases}$$

9. Найти наибольшее значение функции  $f(x) = 9\sin x + 12\cos x$ .

10. Карандаши в количестве от 200 до 300 штук можно разложить в красные коробки по 10 или в синие коробки по 12 карандашей в каждую. Когда все карандаши уложили в красные коробки, 7 карандашей осталось, а при упаковке в синие коробки не хватило 3 карандашей. Сколько карандашей предназначалось для упаковки?

## БИЛЕТ № 8

1. Решить уравнение  $7^{-x} - 3 \cdot 7^{1+x} = 4$ .

2. Второй член геометрической прогрессии  $b_2 = 24,5$ , пятый член  $b_5 = 196$ . Найти третий член и сумму первых четырех членов.

3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции  $y = 3x^4 - 6x^2 + 4$  на отрезке  $[-1;3]$ .

4. Вычислить  $\sqrt{6 + \sqrt{20}} - \sqrt{6 - \sqrt{20}}$ .

5. Решить неравенство  $\frac{x+2}{3x+1} \leq \frac{x-2}{2x-1}$ .

6. Решить уравнение  $\sqrt{2x^2 + 3x + 2} - \sqrt{2x^2 + 3x - 5} = 1$ .

7. Через две вершины равностороннего треугольника  $ABC$  площадью  $21\sqrt{3}$  см<sup>2</sup> проведена окружность, для которой две стороны треугольника являются касательными. Найти радиус этой окружности.

8. Решить систему 
$$\begin{cases} x + y = 13; \\ \log_4 x + \log_4 y = 1 + \log_4 10. \end{cases}$$

9. Решить уравнение  $9\sin x - 12\cos x = 15$ .

10. На круизном лайнере от 250 до 400 путешественников. Если посадить их в спасательные шлюпки, вмещающие 15 человек, то семерым не хватит места, а если разместить путешественников на плотках, рассчитанных на 25 человек, то останется 8 свободных мест. Сколько путешественников на лайнере?

## БИЛЕТ № 9

1. Решить уравнение  $3^{2x+1} - 10 \cdot 3^x + 3 = 0$ .

2. Найти сумму двенадцати первых членов арифметической прогрессии, если ее пятый член  $a_5 = 1$ , а семнадцатый член  $a_{17} = 18$ .

3. Найти все экстремумы функции  $y = 2^{x^2 - 2x + 3}$ .

4. Вычислить  $\sqrt{6 + \sqrt{32}} - \sqrt{6 - \sqrt{32}}$ .

5. Решить неравенство  $\frac{1}{2-x} + \frac{5}{2+x} < 1$ .

6. Решить уравнение  $\sqrt{\frac{x+2}{x-3}} - 6\sqrt{\frac{x-3}{x+2}} + 1 = 0$ .

7. К окружности радиуса 10 см из точки  $A$  проведены лучи, касающиеся окружности в точках  $B$  и  $C$  так, что треугольник  $ABC$  – равносторонний. Найти его площадь.

8. Решить систему 
$$\begin{cases} 3^y \cdot 81 = 9^{x^2} ; \\ \lg y = \lg x - \lg 0,5 . \end{cases}$$

9. Найти наибольшее значение функции  $f(x) = 8\sin x + 15\cos x$ .

10. В первый класс школы записалось от 200 до 300 детей. Было решено сформировать классы по 25 человек, но оказалось, что десятерым не хватит места. Тогда сформировали классы по 30 детей, но в одном из классов оказалось на 15 учеников меньше. Сколько детей записалось в первый класс?

**БИЛЕТ № 10**

1. Решить уравнение  $9 \cdot 3^{2x-1} + 3^x - 30 = 0$ .

2. Третий член геометрической прогрессии  $b_3 = -1$ , шестой член  $b_6 = 3\frac{3}{8}$ . Найти первый член и знаменатель прогрессии.

3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции  $y = e^{2x^2-4x-6}$  на отрезке  $[0;3]$ .

4. Вычислить  $\sqrt{6+\sqrt{27}} - \sqrt{6-\sqrt{27}}$ .

5. Решить неравенство  $\frac{3-x}{2x+1} < -\frac{3}{4}$ .

6. Решить уравнение  $\sqrt{\frac{x^2-16}{x-3}} + \sqrt{x+3} = \frac{7}{\sqrt{x-3}}$ .

7. Две вершины квадрата лежат на окружности радиуса 5 см, а две другие – на касательной к этой окружности. Найти площадь квадрата.

8. Решить систему 
$$\begin{cases} \log_5 x = \log_5 y + \log_5 \frac{2}{3}; \\ 2^x \cdot 3^y = 108. \end{cases}$$

9. Решить уравнение  $15\sin x - 8\cos x = 17$ .

10. Для упаковки книг при переезде школьной библиотеки можно купить маленькие коробки, в которые помещается 12 книг, или большие, рассчитанные на 25 книг. Если все книги поместить в маленькие коробки, то 7 книг останется, а если все книги упаковать в большие коробки, останется место еще для 5 книг. Фонд библиотеки содержит от 500 до 650 книг. Сколько книг в библиотеке?