МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ПЕРВОЕ ВЫСШЕЕ ТЕХНИЧЕСКОЕ УЧЕБНОЕ ЗАВЕДЕНИЕ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ГРАНИТ НАУКИ»

МАТЕМАТИКА

КРИТЕРИИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОБЕДИТЕЛЕЙ И ПРИЗЕРОВ, ОТВЕТЫ НА ЗАДАНИЯ ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОГО ТУРА 2016/2017 года

(очный заключительный тур)

КРИТЕРИИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОБЕДИТЕЛЕЙ И ПРИЗЕРОВ ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОГО ТУРА ОЛИМПИАДЫ ПО МАТЕМАТИКЕ.

Победителями и призёрами Олимпиады признаются участники очного заключительного тура, работы которых в той или иной степени удовлетворяют следующим критериям:

1) В результате решения задач получены правильные ответы.
2) Избраны наиболее короткие пути решения, не требующие нахождения промежуточных величин, без которых можно обойтись.
3) Методы решения отличны от стандартных школьных подходов – оригинальные решения.
4) Избранные методы решения достаточно обоснованы и аргументированы.
5) Алгебраические выкладки проведены грамотно и представлены в полном объеме.
6) В решениях использованы (если это приводит к упрощению) соображения, вытекающие из графиков и графических схем.
7) Творческий подход к решению задач.

Разделение на категории призеров и победителей основано на общей сумме баллов за решение всех задач варианта Олимпиады

Проверку и оценивание работ проводит жюри Олимпиады.

Каждый вариант содержит десять заданий.

Задания в варианте разной сложности, что учитывается при проверке, так как оценка каждого задания зависит от уровня его сложности.

Максимальный балл за задачу ставится в том случае, если задача решена полностью, без недочетов.

Незначительное снижение баллов может быть, если задача решена с недочетами, не влияющими на общий ход решения.

Значительное снижение баллов может быть, если задача не решена (допущены серьезные ошибки) и т.д.

Номер задачи в варианте	**Максимальный балл за задачу**
№1, №2, №3, №4	5 баллов
№5, №6, №7	10 баллов
№8, №9	15 баллов
№10	20 баллов
Максимальная сумма баллов	**100 баллов**

Решения, приведенные в черновике или выполненные карандашом, не проверяются и не оцениваются.

Оценки по задачам ставятся в таблицу на первой странице работы.

Ставить оценки внутри работы нежелательно.

Суммарная оценка проставляется на первой странице работы и подтверждается подписью члена Жюри.

Все работы участников Олимпиады, претендующих на признание кандидатами в победители, проходят контрольную проверку председателем Жюри по предмету.

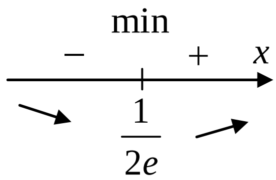
ОТВЕТЫ НА ЗАДАНИЯ ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОГО ТУРА ОЛИМПИАДЫ

БИЛЕТ № 1

1. Решить уравнение $9^x + 4\cdot 3^{x+1} = 13$.
Решение: $3^{2x} + 4\cdot 3^{x+1} = 13$, $3^{2x} + 12\cdot 3^x - 13 = 0$,
$\left(3^x\right)_{1,2} = \dfrac{-12 \pm \sqrt{144+52}}{2} = \dfrac{-12 \pm 14}{2} = \left[\begin{array}{l}1,\\ -13. - \text{п.к.}\end{array}\right.$ $3^x = 1 \Rightarrow x = 0$. **Ответ:** $x = 0$.

2. Между числами 6 и -3,6 вставить семь чисел так, чтобы получилась арифметическая прогрессия.
Решение: $a_1 = 6;\ a_9 = -3{,}6;\ a_{2,3,4,5,6,7,8} - ?$
$a_9 = a_1 + 8d \Rightarrow 6 + 8d = -3{,}6;\ d = \dfrac{-9{,}6}{8} = -1{,}2$. **Ответ:** $4{,}8;\ 3{,}6;\ 2{,}4;\ 1{,}2;\ 0;\ -1{,}2;\ -2{,}4.$

3. Найти все экстремумы функции $y = x\lg 2x$.
Решение: $y = x\lg 2x$, $x > 0$, $y' = \lg 2x + \dfrac{x\cdot 2}{2x\ln 10} = \dfrac{\ln 2x}{\ln 10} + \dfrac{1}{\ln 10} = 0$,

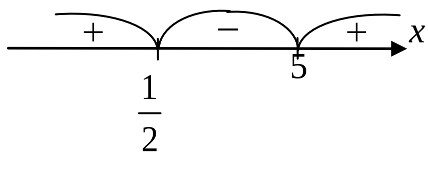


Ответ: $x = \dfrac{e^{-1}}{2}$, $y = \dfrac{-1}{2e\ln 10}$.

4. Вычислить $\sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{3-\sqrt{5}}$.
Решение: $\left(\sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{3-\sqrt{5}}\right)^2 = 6 - 2\sqrt{9-5} = 2$, $A = \sqrt{2}$. **Ответ:** $\sqrt{2}$.

5. Решить неравенство $\dfrac{1-0{,}4x^2}{5-x} \geq \dfrac{2x}{5}$.

Решение: $\dfrac{1-0{,}4x^2}{5-x} \geq \dfrac{2x}{5}$, $\dfrac{1-\frac{2}{5}x^2}{5-x} - \dfrac{2x}{5} \geq 0$,

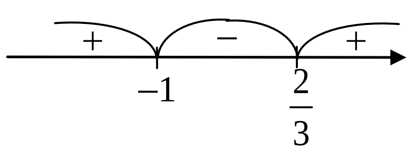


$\dfrac{5-2x^2-2x(5-x)}{5(5-x)} \geq 0$, $\dfrac{5-10x}{5(5-x)} \geq 0$;
Ответ: $\left(-\infty; \dfrac{1}{2}\right] \cup (5; +\infty)$.

6. Решить уравнение $\sqrt{3x^2+5x+7} - \sqrt{3x^2+5x+2} = 1$.

Решение: ОДЗ $3x^2+5x+2 \geq 0$. $x_{1,2} = \dfrac{-5 \pm \sqrt{25-24}}{6} = \dfrac{-5 \pm 1}{6} = \left[\begin{array}{l}\frac{2}{3},\\ -1.\end{array}\right.$

$t = 3x^2+5x+7$, $\sqrt{t} = 1 + \sqrt{t-5}$; $t = 1 + 2\sqrt{t-5} + t - 5$;
$4 = 2\sqrt{t-5}$; $t - 5 = 4$; $t = 9$; $3x^2+5x+7 = 9$; $3x^2+5x-2 = 0$;

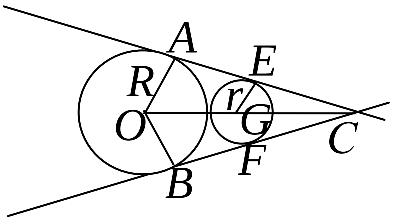


$$x=\frac{-5\pm\sqrt{25-24}}{6}=\frac{-6\pm\sqrt{49}}{6}=\frac{-5\pm7}{6}=\left[\begin{array}{ll}\frac{1}{3}, & \sqrt{9}-\sqrt{4}=1 - \text{верно},\\ -2, & \sqrt{12-10+7}-\sqrt{12-10+2}=1,\ 3-2=1,\end{array}\right.$$

Проверка: $\sqrt{12-10+7}-\sqrt{12-10+2}=1$, $\sqrt{\frac{1}{3}+\frac{5}{3}+7}-\sqrt{\frac{1}{3}+\frac{5}{3}+2}=1$. **Ответ:** $-2;\frac{1}{3}$.

7. На окружности радиуса 9 см отмечена дуга AB, содержащая $120°$. Через концы этой дуги из одной точки проведены две касательные к окружности. В фигуру, ограниченную дугой AB и касательными, вписана меньшая окружность. Найти ее радиус.

Решение: $\cup AB=120^o \Rightarrow \angle AOB=120^o \Rightarrow \angle AOC=60^o \Rightarrow \angle ACO=30^o$



$$R=OC\cdot\sin30^o \Rightarrow OC=\frac{R}{\sin30^o}=\frac{R}{\frac{1}{2}}=2R,$$

$$R=9, CG=OC-(R+r)=2R-R-r=R-r,$$

$$GC=\frac{r}{\sin30^o}=2r,\ R-r=2r,\ R=3r,\ 9=3r,\ r=3.$$

Ответ: $r=3$.

8. Решить систему $\begin{cases}x+y-20=0;\\ \log_4 x+\log_4 y=1+\log_4 9.\end{cases}$

Решение: $\begin{cases}x+y=20,\\ xy=36,\end{cases}$ $x,y>0$, $\begin{cases}y=20-x,\\ x(20-x)=36,\end{cases}$ $\begin{cases}20x-x^2=36,\\ y=20-x,\end{cases}$ $\begin{cases}x^2-20+36=0,\\ y=20-x,\end{cases}$

$\begin{cases}x=18,\\ y=2\end{cases}$ или $\begin{cases}x=2,\\ y=18.\end{cases}$

9. Найти наибольшее значение функции $f(x)=3\sin x+4\cos x$.

Решение: $f(x)=3\sin x+4\cos x=\sqrt{3^2+4^2}\sin\left(x+arctg\frac{4}{3}\right)=5\sin\left(x+arctg\frac{4}{3}\right)$.

Ответ: Наибольшее значение 5.

10. Продавец раскладывает конфеты по подарочным коробкам. При раскладывании по коробкам вместимостью 10 конфет остается 6 конфет, а при раскладывании по коробкам по 15 конфет не хватает 4 конфет. Найти количество конфет, если известно, что их было не менее 200 и не более 250 штук.

Решение: $\begin{array}{ll}a=10x+6=10(x+1)-4, & a+4\,\vdots\,10,\\ a=15y-4, & a+4\,\vdots\,15,\end{array}$ $\Rightarrow a+4\,\vdots\,30,\ a+4=180,210,240,270$.

Ответ: $206, 236$.

БИЛЕТ № 2

1. Решить уравнение $9^{x-1}+3^{x+2}=90$.

Решение: $9^{x-1}+3^{x+2}=90$, $\left(3^{x-1}\right)^2+27\cdot 3^{x-1}=90$,

$$3^{x-1}=\frac{-27\pm\sqrt{3^6+4\cdot 3^2\cdot 10}}{2}=\frac{-27\pm 3\sqrt{121}}{2}=\frac{-27\pm 33}{2}=\left[\begin{array}{l}3,\\ -30.\end{array}\right.\quad x-1=1, x=2$$ **Ответ:** $x=2$.

2. Первый член геометрической прогрессии $b_1=\sqrt{3}$, пятый член $b_5=\sqrt{243}$. Найти шестой член и знаменатель прогрессии.

Решение: $b_1=\sqrt{3}; b_5=\sqrt{243},\ b_6=?\ q=?$

$$b_5=b_1\cdot q^4=\sqrt{3}\cdot q^4=\sqrt{243}\Rightarrow q^4=\sqrt{\frac{243}{3}}=3^2;\ q=\pm\sqrt{3},\ b_6=\sqrt{243}\cdot q=\pm\sqrt{81\cdot 3^2}=\pm 27.$$

Ответ: $b_6=\pm 27$

3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=x^3-3x^2+5$ на отрезке $[-1;1]$.

Решение: $y=x^3-3x^2+5$ на $[-1;1]$, $y'=3x^2-6x=0$, $3x(x-2)=0$, $x=0$; $x=2$, $y(-1)=1$; $y(1)=3$; $y(0)=5$. **Ответ:** $5;1$.

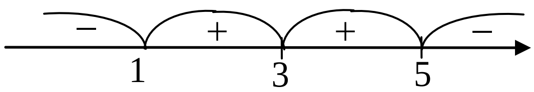
4. Вычислить $\sqrt{4+\sqrt{7}}-\sqrt{4-\sqrt{7}}$.

Решение: $\sqrt{4+\sqrt{7}}-\sqrt{4-\sqrt{7}}=A;\ A^2=8-2\sqrt{16-7}=2,\ A=\pm\sqrt{2}\Rightarrow A=\sqrt{2}$.

Ответ: $\sqrt{2}$.

5. Решить неравенство $\dfrac{4-x}{x-5}>\dfrac{1}{1-x}$.

Решение: $\dfrac{4-x}{x-5}+\dfrac{1}{x-1}>0$; $\dfrac{(4-x)(x-1)+x-5}{(x-5)(x-1)}>0$,



$$\frac{-x^2+6x-9}{(x-5)(x-1)}>0,\quad \frac{-(x-3)^2}{(x-1)(x-5)}>0.$$ **Ответ:** $(1;3)\cup(3;5)$.

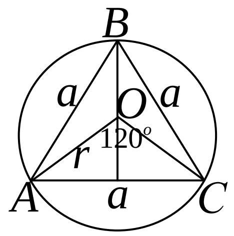
6. Решить уравнение $\sqrt{\dfrac{x-3}{2x+1}}+2=3\sqrt{\dfrac{2x+1}{x-3}}$.

Решение: $t=\dfrac{x-3}{2x+1}>0$; $\sqrt{t}+2=\dfrac{3}{\sqrt{t}}$, $\sqrt{t}+2\sqrt{t}-3=0$, $\sqrt{t}=\left[\begin{array}{l}1\\ -3\text{ п.к.}\end{array}\right.$

$\dfrac{x-3}{2x+1}=1$; $x-3=2x+1$, $x=-4$, $\sqrt{\dfrac{-7}{-7}}+2=3\sqrt{\dfrac{-7}{-7}}$. **Ответ:** $x=-4$.

7. Площадь равностороннего треугольника, вписанного в окружность, равна 81 см^2. Найти радиус окружности.

Решение: $S_\Delta = 81 см^2$, $S_\Delta = \dfrac{1}{2} a \cdot h = \dfrac{1}{2} a \cdot a \cos 30^o = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$, $r = ?$



$$S_\Delta = 3S_{\Delta AOC} = 3 \cdot \frac{1}{2} a \cdot r \cos 60^o = \frac{3}{4} ar = \frac{3}{2} r \cdot r \cdot \sin 120^o = \frac{3r^2\sqrt{3}}{4},$$

$$\frac{3r^2\sqrt{3}}{4} = 81,\ r^2 = \frac{81 \cdot 4}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 36\sqrt{3},\ r = 6\sqrt[4]{3}$$

Ответ: $r = 6\sqrt[4]{3}$.

8. Решить систему $\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 18; \\ \log_9 (x+y) = 0{,}5. \end{cases}$

Решение: $\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 18, \\ \log_9 (x+y) = \dfrac{1}{2}, \end{cases}$ $\begin{cases} x + y > 0, \\ x + y = 3 \\ 3^x \cdot 2^y = 18, \end{cases}$ $\begin{cases} y = 3 - x, \\ 3^x \cdot 2^y = 18, \end{cases}$ $\left(\dfrac{3}{2}\right)^x = \dfrac{18}{8} = \dfrac{9}{4}$, $\begin{cases} x = 2, \\ y = 1. \end{cases}$

Ответ: $\{2; 1\}$.

9. Решить уравнение $4\sin x - 3\cos x = 5$.

Решение: $5 = 4\sin x - 3\cos x$; $\sqrt{4^2 + 3^2} \cdot \sin\left(x - arctg\dfrac{3}{4}\right) = 5$,

$$x - arctg\frac{3}{4} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ x = arctg\frac{3}{4} + \frac{\pi}{2} + 2\pi k.$$

10. Птичница пересчитывает яйца. Если она считает дюжинами, то в остатке получается 8 яиц, а до целого числа десятков не хватает 2 яиц. Сколько было яиц, если известно, что их было не менее 300 и не более 400?

Решение: $\begin{matrix} a = 12x + 8, \\ a = 10y - 2 = 10(y-1) + 8, \end{matrix}$ $\begin{matrix} a - 8 \vdots 12, \\ a - 8 \vdots 10, \end{matrix}$ $\Rightarrow a - 8 \vdots 60,\ a - 8 = \underline{300, 360,} 420$.

Ответ: $308, 368$.

БИЛЕТ № 3

1. Решить уравнение $(0,5)^{x^2} \cdot 2^{2x+2} = 64^{-1}$.

Решение: $(0,5)^{x^2} \cdot 2^{2x+2} = 64^{-1}$, $2^{-x^2+2x+2} = 2^{-6}$, $-x^2+2x+2+6=0$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+32}}{-2} = \frac{-2 \pm 6}{2} = \left[\begin{array}{l} -2, \\ 4. \end{array}\right. \frac{1}{24} \cdot 2^{-2} = 2^{-6};\ 2^{-16} \cdot 2^{10} = 2^{-6}$$ **Ответ:** $-2;4$.

2. Найти сумму первых пятнадцати членов арифметической прогрессии, если ее третий член равен -5, а пятый равен 2,4.

Решение: $a_3 = -5; a_5 = 2,4,\ S_{15} = ?$

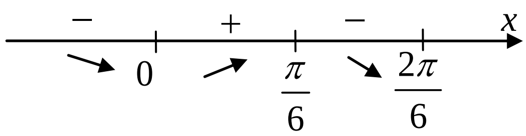
$$\begin{cases} a_1 + 2d = -5, \\ a_1 + 4d = 2,4; \end{cases} 2d = 7,4,\ d = 3,7;\ d_1 = -5 - 2d = -12,4,$$

$$S_{15} = \frac{2 \cdot (-12,4) + 3,7 \cdot 14}{2} \cdot 15 = 202,5.$$ **Ответ:** $S_{15} = 202,5$

3. Найти все экстремумы функции $y = \sin^2 3x$ на интервале $(0; 0,6)$.

Решение: $y = \sin^2 3x,\ (0;0,6);\ y' = 2\sin 3x \cdot \cos 3x = \sin 6x = 0;\ x = \dfrac{\pi k}{6}$

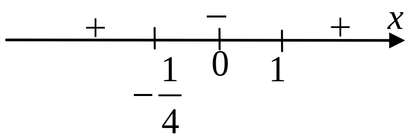
$x = 0$, $y_{\max}\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 1$.



4. Вычислить $\sqrt{4+\sqrt{15}} - \sqrt{4-\sqrt{15}}$.

Решение: $\sqrt{4+\sqrt{15}} - \sqrt{4-\sqrt{15}} = A;\ A^2 = 8 - 2\sqrt{16-15} = 1,\ A = \pm\sqrt{6},\ A = \sqrt{6}$.

5. Решить неравенство $\dfrac{5x^2}{x-1} > 5x+1$.



Решение: $\dfrac{5x^2}{x-1} > 5x+1;\ \dfrac{5x^2(5x+1)(x-1)}{x-1} > 0$,

$\dfrac{5x^2 - 5x^2 + 4x + 1}{x-1} > 0$. **Ответ:** $x \in \left(-\infty; -\dfrac{1}{4}\right) \cup (1; +\infty)$.

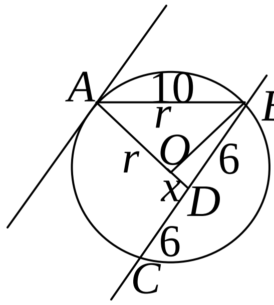
6. Решить уравнение $\sqrt{\dfrac{2x+2}{x+2}} - \sqrt{\dfrac{x+2}{2x+2}} = \dfrac{7}{12}$.

Решение: $\sqrt{\dfrac{2x+2}{x+2}} - \sqrt{\dfrac{x+2}{2x+2}} = \dfrac{7}{12}$; $t = \dfrac{2x+2}{x+2} > 0$, $\sqrt{t} - \sqrt{\dfrac{1}{t}} = \dfrac{7}{12}$,

$\sqrt{t} = \dfrac{7 \pm \sqrt{49 + 4 \cdot 144}}{24} = \dfrac{7 \pm 25}{24} = \left[\begin{array}{l} \dfrac{32}{24} = \dfrac{4}{3} \\ -\dfrac{18}{24} = -\dfrac{3}{4} \end{array}\right.$, $\dfrac{2x+2}{x+2} = \dfrac{16}{9}$, $16x + 18 = 16x + 32$,

$2x = 14,\ x = 7$. Проверка: $\sqrt{\dfrac{16}{9}} - \sqrt{\dfrac{9}{16}} = \dfrac{7}{12}$. **Ответ:** $x = 7$.

7. В окружности проведена хорда длиной 10 см. Через один ее конец проведена касательная к окружности, а через другой – секущая, параллельная касательной. Внутренний отрезок секущей равен 12 см. Найти радиус окружности.



Решение: $AB = 10$, $\sqrt{r^2} = \sqrt{OD^2 + BD^2} = \sqrt{x^2 + 6^2}$, ΔDOB

$BC = 12$, $(r+x)^2 + 6^2 = 10^2$, $\Rightarrow \begin{cases} r + x = \sqrt{64} = 8, \\ r^2 - x^2 = 36, \end{cases}$,

$r = ?$ (ΔADB)

$x = 8 - r$, $r^2 - (8-r)^2 = 36$, $r^2 - 64 + 16r - r^2 = 36$, $16r = 100$,

$r = \dfrac{100}{16} = \dfrac{25}{4}$.

8. Решить систему $\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 972; \\ \log_{\sqrt{3}}(x-y) = 2. \end{cases}$

Решение: $\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 972, \\ x - y = 3, \end{cases}$ $\begin{cases} x = 3 + y, \\ 3^{3+y} \cdot 2^y = 9 \cdot 9 \cdot 3 \cdot 4, \end{cases}$ $\begin{cases} x = 3 + y, \\ 27 \cdot (3 \cdot 2)^y = 9 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 4, \end{cases}$ $6^y = 36$, $\begin{cases} x = 5, \\ y = 2. \end{cases}$

Ответ: $\{5; 2\}$.

9. Найти наибольшее значение функции $f(x) = 6\sin x + 8\cos x$.

Решение: $f(x) = 6\sin x + 8\cos x = \sqrt{6^2 + 8^2}\sin\left(x + arctg\dfrac{8}{6}\right)$.

Ответ: Наибольшее значение 10.

10. Для выступления на спортивном параде тренер решил построить детей шеренгами по 8 человек в каждой, но при этом 5 детей осталось. Тогда он построил шеренги по 10 человек, но осталось 3 пустых места. Известно, что детей было не менее 100 и не более 150 человек. Сколько было детей?

Решение: $\begin{array}{ll} a = 8x + 5 = 8(x+1) - 3, & a + 3 \vdots 8, \\ a = 10y - 3, & a + 3 \vdots 10, \end{array}$ $\Rightarrow a + 3 \vdots 40$, $a + 3 = \underline{120}, 160$.

Ответ: 117.

БИЛЕТ № 4

1. Решить уравнение $2\cdot 4^{2x}-17\cdot 4^{x}+8=0$.

Решение: $2\cdot 4^{2x}-17\cdot 4^{x}+8=0$, $2\left(4^{x}\right)^{2}-17\cdot 4^{x}+8=0$,

$$\left(4^{x}\right)_{1,2}=\frac{17\pm\sqrt{89-64}}{4}=\frac{17\pm 15}{4}=\left[\begin{array}{l}\frac{32}{4}\\ \frac{1}{2}\end{array}\right.=\left[\begin{array}{l}8\\ \frac{1}{2}\end{array}\right.,\ x=\left[\begin{array}{l}\frac{3}{2}\\ -\frac{1}{2}\end{array}\right.:\ \begin{array}{l}2\cdot 4^{3}-17\cdot 8+8=0,\\ 2\cdot\frac{1}{4}-17\cdot\frac{1}{2}+8=0.\end{array}$$

Ответ: $x=\frac{3}{2}, x=-\frac{1}{2}$.

2. Второй член геометрической прогрессии $b_2=37\frac{1}{3}$, шестой член $b_6=2\frac{1}{3}$. Найти первый член и знаменатель прогрессии.

Решение: $b_2=37\frac{1}{3}=\frac{112}{3}; b_6=2\frac{1}{3}=\frac{7}{3},\ b_1=?\ \ q=?$

$$\begin{cases}b_1\cdot q=\frac{112}{3}, & q^4=\frac{7}{3}\cdot\frac{3}{112}=\frac{7}{112}=\frac{1}{16};\ q=\frac{1}{2}\\ b_1\cdot q^5=\frac{7}{3}; & b_1=\frac{112}{3}\cdot\frac{2}{1}=\frac{224}{3}\qquad b_1=\frac{224}{3}=74\frac{2}{3}\end{cases}$$

. **Ответ:** $b_1=\pm\frac{224}{3},\ q=\pm\frac{1}{2}$.

3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=x^3-3x^2+5$ на отрезке $[1;3]$.

Решение: $y=x^3-3x^2+5,\ [1;3];\ y'=3x^2-6x=3x(x-2)\Rightarrow x=0;2$

$y(1)=3;\ y(3)=5;\ y(2)=1.$

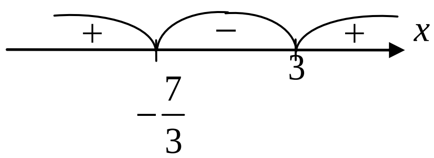
4. Вычислить $\sqrt{4+\sqrt{12}}-\sqrt{4-\sqrt{12}}$.

Решение: $\sqrt{4+\sqrt{12}}-\sqrt{4-\sqrt{12}}=A;\ A^2=8-2\sqrt{16-12}=4;\ A=\pm 2$ **Ответ:** $A=2$.

5. Решить неравенство $\frac{5x+1}{x-3}\le\frac{1}{3}$.

Решение:

$$\frac{5x+1}{x-3}\le\frac{1}{3},\ \frac{5x+1}{x-3}-\frac{1}{3}\le 0,\ \frac{15x+3-x+3}{3(x-3)}\le 0,\ \frac{2(7x+3)}{3(x-3)}\le 0$$



Ответ: $\left[-\frac{3}{7};3\right)$.

6. Решить уравнение $\sqrt{\frac{3x-1}{x+4}}+3-4\sqrt{\frac{x+4}{3x-1}}=0$.

Решение: $t=\frac{3x-1}{x+4}>0,\ \sqrt{t}+3-\frac{4}{\sqrt{t}}=0,\ \sqrt{t}^{\,2}+3\sqrt{t}-4=0,\ \sqrt{t}=\left[\begin{array}{l}1\\ -4\ \text{п.к.}\end{array}\right.$

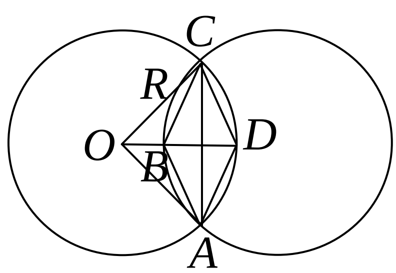
$\frac{3x-1}{x+4}=1,\ 3x-1=x+4,\ 2x=5,\ x=\frac{5}{2}$. **Проверка:** $\frac{3\cdot\frac{5}{2}-1}{\frac{5}{2}+4}=\frac{13}{13},\ \sqrt{1}+3-4\sqrt{1}=0$.

Ответ: $x=\frac{5}{2}$.

7. Диагонали ромба, вписанного в общую часть двух пересекающихся равных кругов, соответственно равны 6 см и 12 см. Найти площади этих кругов.

Решение: $BD=6,\quad OO_1=x=R-3,\ AC=12,\ \Delta OO_1C: R^2=(R-3)^2+OC^2,\quad S_O=?$

$R^2=R^2-6R+9+6^2,\ 6R=115,\ R=\frac{45}{6}=\frac{15}{2},\ S=\pi R^2=\frac{225}{4}\pi$.



Ответ: $S_O=\frac{15^2}{2^2}\pi$.

8. Решить систему $\begin{cases} x\log_2 3+y=\log_2 18; \\ 5^x=25^y. \end{cases}$

Решение:

$\begin{cases}\log_2 3^x+y=\log_2 18, \\ 5^x=5^{2y},\end{cases}$ $\begin{cases}2y\log_2 3+y=18, \\ x=2y,\end{cases}$ $\begin{cases}y\left(\log_2 3^2+1\right)=18, \\ x=2y,\end{cases}$ $\begin{cases}y\left(\log_2\left(3^2\cdot 2\right)\right)=18, \\ x=2y,\end{cases}$

$\begin{cases}y\log_2 18=18, \\ x=2y,\end{cases}$ $\begin{cases}y=\frac{18}{\log_2 18}, \\ x=2y,\end{cases}$ $\begin{cases}\log_2 3^x+\log_2 2^y=\log_2 18, \\ x=2y,\end{cases}$ $\begin{cases}\log_2\left(3^x\cdot 2^y\right)=\log_2 18, \\ x=2y,\end{cases}$

$(9\cdot 2)^y=18;$ $\begin{cases}y=1, \\ x=2.\end{cases}$ $\begin{matrix}\log_2 3^2+\log_2 2=\log_2 18, \\ x=2\cdot 1.\end{matrix}$

Ответ: $\{2;1\}$.

9. Решить уравнение $8\sin x-6\cos x=10$.

Решение: $8\sin x-6\cos x=10,\ \sqrt{8^2+6^2}\sin\left(x-arctg\frac{6}{8}\right)=10,\ x-arctg\frac{6}{8}=\frac{\pi}{2}+2\pi k$.

Ответ: $x=arctg\frac{3}{4}+\frac{\pi}{2}+2\pi k$.

10. В упаковочном цехе имеется 2 типа ящиков: на 20 деталей и на 27 деталей. Для упаковки поступила партия деталей от 500 до 600 штук. При укладке деталей в ящики первого типа осталось 13 неупакованных деталей, а при укладке в ящики второго типа осталось 7 незаполненных мест. Сколько деталей было в партии?

Решение: $\begin{matrix}a=20x+13=20(x+1)-7, \\ a=27x-7,\end{matrix}$ $a+7\,\vdots\,20;\ a+7\,\vdots\,27,\Rightarrow a+7\,\vdots\,540$.

Ответ: $a=533$.

БИЛЕТ № 5

1. Решить уравнение $5^{2x} - 7 \cdot 5^x + 10 = 0$.

Решение: $5^{2x} - 7 \cdot 5^x + 10 = 0$, $\left(5^x\right)^2 - 7 \cdot \left(5^x\right) + 10 = 0$, $5^x = \dfrac{7 \pm \sqrt{49-40}}{2} = \left[\begin{array}{l} 5 \\ 2 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \log_5 2 \end{array}\right.$.

Ответ: $x = 1,\ x = \log_5 2$.

2. Третий член арифметической прогрессии $a_3 = 3$, одиннадцатый член $a_{11} = 15$. Найти первый член и разность прогрессии.

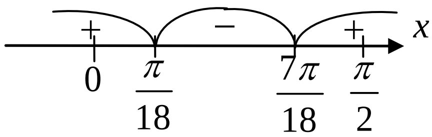
Решение: $a_3 = 3;\ a_{11} = 15.$ Найти a_1, d.

$$\begin{cases} a_1 + 2d = 3, \\ a_1 + 10d = 15; \end{cases} \quad \begin{cases} 8d = 12, \\ a_1 = 3 - 2d; \end{cases} \quad \begin{cases} d = \dfrac{3}{2}, \\ a_1 = 0. \end{cases}$$

3. Найти все экстремумы функции $y = \dfrac{2}{3}\cos\left(3x - \dfrac{\pi}{6}\right)$ на интервале $(0; \pi/2)$.

Решение: $y = \dfrac{2}{3}\cos\left(3x - \dfrac{\pi}{6}\right)$; $y' = \dfrac{2}{3}\left(-\sin\left(3x - \dfrac{\pi}{6}\right)\right) \cdot 3 = -2\sin\left(3x - \dfrac{\pi}{6}\right)$

$\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$. $3x - \dfrac{\pi}{6} = \pi k$, $x = \pi k + \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi(6k+1)}{18}$, $k = 1, 0$



$y_{\max}\left(\dfrac{\pi}{18}\right) = \dfrac{2}{3}$, $y_{\min}\left(\dfrac{7\pi}{18}\right) = -\dfrac{2}{3}$.

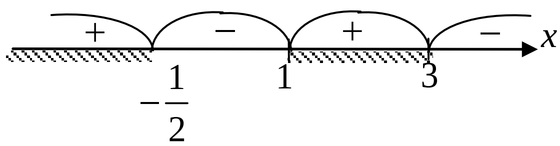
4. Вычислить $\sqrt{3+\sqrt{8}} - \sqrt{3-\sqrt{8}}$.

Решение: $\sqrt{3+\sqrt{8}} - \sqrt{3-\sqrt{8}} = A;$ $A^2 = 6 - 2\sqrt{9-8} = 4,$ $A = \pm 2,$ $A = 2.$

5. Решить неравенство $\dfrac{x+2}{x-1} > \dfrac{x+4}{x-3}$.

Решение: $\dfrac{x+2}{x-1} > \dfrac{x+4}{x-3}$, $\dfrac{x+2}{x-1} - \dfrac{x+4}{x-3} > 0$, $\dfrac{(x+2)(x-3)-(x+4)(x-1)}{(x-1)(x-3)} > 0$,

$\dfrac{x^2 - x - 6 - x^2 - 3x + 4}{(x-1)(x-3)} > 0$, $\dfrac{-4x-2}{(x-1)(x-3)} > 0$.



Ответ: $\left(-\infty; -\dfrac{1}{2}\right) \cup (1;3)$.

6. Решить уравнение $\sqrt{2x^2 + 3x - 5} - \sqrt{2x^2 + 3x - 8} = 1$.

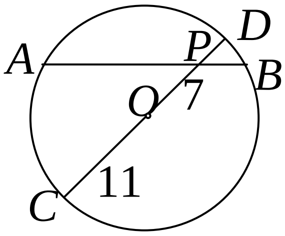
Решение: $\sqrt{2x^2 + 3x - 5} - \sqrt{2x^2 + 3x - 8} = 1$, $\begin{cases} 2x^2 + 3x - 5 \ge 0, \\ 2x^2 + 3x - 8 \ge 0, \end{cases}$ $\begin{cases} x \le -\dfrac{3-\sqrt{73}}{4}, \\ x \ge -\dfrac{3+\sqrt{73}}{4}, \end{cases}$

$\sqrt{t}=1+\sqrt{t-3};\ t=1+2\sqrt{t-3}+t-3;\ \sqrt{t-3}=1;\ t-3=1,\ t=4.$

$$2x^2+3x-5=4,\ 2x^2+3x-9=0,\ x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{9+72}}{4}=\frac{-3\pm 9}{4}=\left[\begin{array}{l}\frac{3}{2},\\ -3.\end{array}\right.$$

Проверка: $\sqrt{18-9-5}-\sqrt{18-9-8}=1,\ \sqrt{2\cdot\frac{9}{4}+\frac{9}{2}-5}-\sqrt{2\cdot\frac{9}{4}+\frac{9}{2}-8}=1,\ 2-1=1$

7. Расстояние от точки пересечения диаметра окружности радиуса 11 см с хордой длиной 18 см до центра окружности равно 7 см. В каком отношении точка пересечения делит хорду?



Решение: $R=11,\ AB=18,\ PO=7,\ \dfrac{AP}{PB}=?$

$AP\cdot PB=DP\cdot PC$, $DP=DO-PO=11-7=4$, $PC=11+7=18$,

$$\begin{cases}AP\cdot PB=4\cdot 18\\ AP+PB=18\end{cases},\ AP(18-AP)=72,\ 18AP-AP^2=72,$$

$$AP^2-18AP+72=0,\ AP=\frac{18\pm\sqrt{18^2-4\cdot 4\cdot 18}}{2}=\frac{18\pm 6}{2}=\left[\begin{array}{l}12\\ 6\end{array}\right.,\ \frac{12}{6}=2V\frac{6}{12}=\frac{1}{2}.$$

Ответ: $2:1,\ 1:2$.

8. Решить систему $\begin{cases}\frac{1}{2}\log_2 x-\log_2 y=0;\\ x^2-2y^2=8.\end{cases}$

Решение: $\begin{cases}\frac{1}{2}\log_2 x-\log_2 y=0;\\ x^2-2y^2=8.\end{cases}\ \begin{cases}\frac{\sqrt{x}}{y}=1,\ \sqrt{x}=y;\\ x=y^2.\end{cases}$

$x^2-2x-8=0,\ x_{1,2}=\dfrac{2\pm\sqrt{4+32}}{2}=\dfrac{2\pm 6}{2},\ x_{1,2}=\left[\begin{array}{l}4,\ y=2\\ -2\ -\text{п.к.}\end{array}\right.\ \begin{cases}\frac{1}{2}\cdot 2-1=0\\ 16-2\cdot 4=8\end{cases}$. **Ответ:** $4;2$.

9. Найти наибольшее значение функции $f(x)=5\sin x+12\cos x$.

Решение: $f(x)=5\sin x+12\cos x=\sqrt{5^2+12^2}\left(\sin\left(x+arctg\dfrac{12}{5}\right)\right)=\sqrt{13^2}\sin x$.

Ответ: 13.

10. Флористу привезли от 300 до 400 роз для оформления праздника. Когда он расставил их в вазы по 21 розе в каждую, осталось 13 роз. А при расстановке по 15 роз в каждую вазу, восьми роз не хватило. Сколько всего было роз?

Решение: $\begin{cases}a=21x+13=21(x+1)-8, & a+8\vdots 21,\\ a=15y-8, & a+8\vdots 15,\end{cases}\Rightarrow a+8\vdots 105$. **Ответ:** $a=307$.

$a+8=105,\ 210,\ \underline{315},\ 420$

БИЛЕТ № 6

1. Решить уравнение $3\cdot 9^x + 2\cdot 3^x = 1$.

Решение: $3\cdot 9^x + 2\cdot 3^x = 1,\ 3\cdot\left(3^x\right)^2 + 2\cdot 3^x - 1 = 0,\ 3^x = \dfrac{-2\pm\sqrt{4+12}}{6} = \left[\begin{array}{l}\dfrac{1}{3}, \\ -1 \text{ - п.к.}\end{array}\right.$ $\qquad x = -1$.

Ответ: $x = -1$

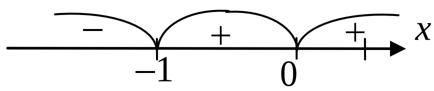
2. Четвертый член геометрической прогрессии $b_4 = \dfrac{1}{25}$, пятый член $b_5 = \dfrac{1}{125}$. Найти сумму первых пяти членов.

Решение: $b_4 = \dfrac{1}{25};\ \ b_5 = \dfrac{1}{125},\ \ S_5 = ?$

$$\begin{cases} b_1\cdot q^3 = \dfrac{1}{25}, \quad q = \dfrac{1}{125}\cdot\dfrac{25}{1} = \dfrac{1}{5}, \\ b_1\cdot q^4 = \dfrac{1}{125}; \quad b_1 = 5, \end{cases} \qquad S_5 = \frac{5\left(1-\left(\frac{1}{5}\right)^5\right)}{1-\frac{1}{5}} = \frac{781}{125}\ .$$

3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = 3x^4 + 4x^3 + 34$ на отрезке $[-2;1]$.

Решение: $y = 3x^4 + 4x^3 + 34;\ \ y' = 12x^3 + 12x^2 = 12x^2\left(x+1\right)$



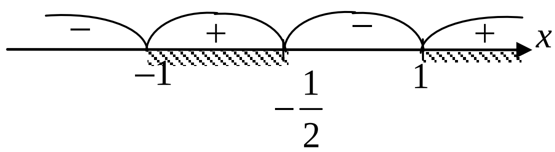
$x = 0;\ x = -1.\ \ y(-2) = 50;\ \ y(1) = 41;\ \ y(-1) = 33.$

4. Вычислить $\sqrt{5+\sqrt{24}} - \sqrt{5-\sqrt{24}}$.

Решение: $\sqrt{5+\sqrt{24}} - \sqrt{5-\sqrt{24}} = A;\ A^2 = 10 - 2\sqrt{25-24} = 8,\ A = \sqrt{8}$.

5. Решить неравенство $2x - 1 > \dfrac{3}{2x+1}$.

Решение: $2x - 1 > \dfrac{3}{2x+1};\ 2x - 1 - \dfrac{3}{2x+1} > 0;$ $\dfrac{4x^2 - 1 - 3}{2x+1} > 0;\ \dfrac{4(x-1)(x+1)}{2x+1} > 0$,



Ответ: $\left(-1;-\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(1;+\infty\right)$.

6. Решить уравнение $\sqrt{3x^2 - 5x - 4} + \sqrt{3x^2 - 5x - 8} = 2$.

Решение: $\sqrt{3x^2 - 5x - 4} + \sqrt{3x^2 - 5x - 8} = 2$, ОДЗ $3x^2 - 5x - 8 \geq 0$.

$t = 3x^2 - 5x - 4$, $\quad \sqrt{t} + \sqrt{t-4} = 2$, $\quad t + t - 4 + 2\sqrt{t(t-4)} = 4$, $\quad 2\sqrt{t(t-4)} = 8 - 2t$,

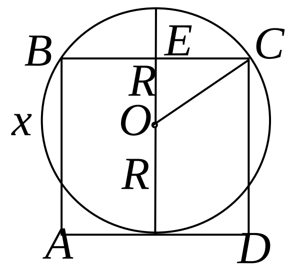
$\sqrt{t - (t-4)} = 4 - t$, $\quad (t \le 4)$. $\quad t^2 - 4t = 16 - 8t + t^2$, $\quad t = \frac{8}{2} = 4$. $\quad 3x^2 - 5x - 4 = 4$,

$3x^2 - 5x - 8 = 0$, $x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25+96}}{6} = \frac{5 \pm 11}{6} = \left[\begin{array}{l} \frac{8}{3} \\ -1 \end{array}\right.$.

Проверка: $\sqrt{3 \cdot \frac{8^2}{3^2} - \frac{40}{3} - 4} + \sqrt{8-8} = 2$, $\sqrt{3+5-4} + \sqrt{3+5-8} = 2$.

Ответ: $\frac{8}{3}; -1$.

7. Две вершины квадрата площадью 256 см^2 лежат на окружности, а две другие вершины – на касательной к этой окружности. Найти радиус окружности.



Решение: $S_{ABCD} = 256 см^2 \Rightarrow a = 16 см = x$,

$EF = 2R - x, FO = R - EF = R - (2R - x) = x - R,$

$\Delta FCO : FO^2 = R^2 - FC^2 \Rightarrow (x-R)^2 = R^2 - 8^2$,

$x^2 - 2Rx + R^2 = R^2 - 8^2$, $2Rx = 16^2 + 8^2 \Rightarrow R = \frac{16^2 + 8^2}{2 \cdot 16} = 10$. **Ответ:** $R = 10$.

8. Решить систему $\begin{cases} 9^{x^2} = 81 \cdot 3^y; \\ \lg y = \lg x - \lg 0{,}5. \end{cases}$

Решение: $\begin{cases} 9^{x^2} = 81 \cdot 3^y, \\ \lg y = \lg 2x, \end{cases}$ $\begin{array}{l} 9^{x^2} = 9^2 \cdot 3^{2x}, \\ 9^{x^2} = 9^2 \cdot 9^x, \end{array}$ $\begin{array}{l} 9^{x^2} = 9^{x+2}, \\ y = 2x, \end{array}$ $\begin{array}{l} x^2 - x - 2 = 0, \\ y = 2, \end{array}$ $x = \left[\begin{array}{l} 2 \\ -2 \end{array}\right.$.

Проверка: $\begin{cases} 9^{2^2} = 81 \cdot 3^4, \quad (81)^2 = 81 \cdot 81, \\ \lg 4 = \lg 2 \cdot 2, \quad 4 = 4. \end{cases}$ **Ответ:** $\{2; 4\}$.

9. Решить уравнение $12 \sin x - 5 \cos x = 13$.

$12 \sin x - 5 \cos x = 13$

Решение: $\sqrt{12^2 + 5^2} \sin\left(x - arctg \frac{5}{12}\right) = 13$, $x - arctg \frac{5}{12} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$.

10. Кощей пересчитывает золотые монеты. Когда он считает десятками, то в остатке получается 7 монет, а до целого числа дюжин не хватает 3 монет. Состояние Кощея оценивается в 300 – 400 монет. Сколько монет у Кощея?

Решение: $\begin{cases} a = 10x + 7 = 10(x+1) - 3, \\ a = 12y - 3, \end{cases}$ $\left.\begin{array}{l} a + 3 \vdots 10, \\ a + 3 \vdots 12, \end{array}\right\} \Rightarrow a + 3 \vdots 60$. **Ответ:** $a = 357$.

$a + 3 = 300, \underline{360,} \ 420$

БИЛЕТ № 7

1. Решить уравнение $3\cdot 2^{x+1}+5\cdot 2^{x}-2^{x+2}=21$.

Решение: $3\cdot 2^{x+1}+5\cdot 2^{x}-2^{x+2}=21,\ (6+5-4)2^{x}=21,\ 2^{x}=\dfrac{21}{7}=3,\ x=\log_2 3$.

2. Найти одиннадцатый член арифметической прогрессии, если сумма первых семи членов $S_7=77$, а первый член $a_1=5$.

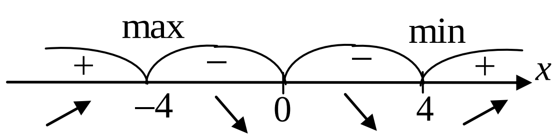
Решение: $S_7=77;\quad a_1=5,\ a_{11}=?$

$$S_7=\frac{2a_1+d(7-1)}{2}\cdot 7=\frac{10+6d}{2}\cdot 7=(5+3d)7=77\Rightarrow d=2,\ a_{11}=a_1+10d=25.$$

3. Найти все экстремумы функции $y=\dfrac{x}{8}+\dfrac{2}{x}$ на интервале $(-5;10)$.

Решение: $y=\dfrac{x}{8}+\dfrac{2}{x},\ (-5;10)$, ОДЗ $x\neq 0$,

$$y'=\frac{1}{8}-\frac{2}{x^2}=\frac{x^2-16}{8x^2}=\frac{(x-4)(x+4)}{8x^2}.$$



Ответ: $y_{\max}(-4)=-1,\ y_{\min}(4)=1$.

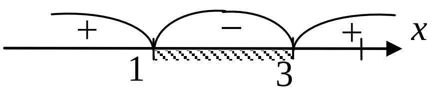
4. Вычислить $\sqrt{6+\sqrt{11}}-\sqrt{6-\sqrt{11}}$.

Решение: $\sqrt{6+\sqrt{11}}-\sqrt{6-\sqrt{11}}=A,\ A^2=12-2\sqrt{36-11}=2,\ A=\pm\sqrt{2},\ A=\sqrt{2}$.

5. Решить неравенство $\dfrac{2x^2-6x+5}{x^2-4x+3}<1$.

Решение:

$$\frac{2x^2-6x+5}{x^2-4x+3}<1,\ \frac{2x^2-6x+5-x^2+4x-3}{(x-1)(x-3)}<0,\ \frac{2x^2-2x+2}{(x-1)(x-3)}<0,$$



Ответ: $(1;3)$.

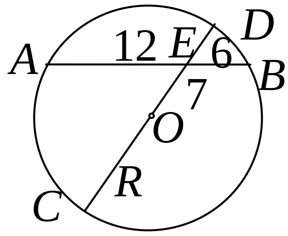
6. Решить уравнение $\sqrt{\dfrac{x+3}{3x-5}}+1=2\sqrt{\dfrac{3x-5}{x+3}}$.

Решение: $\sqrt{\dfrac{x+3}{3x-5}}+1=2\sqrt{\dfrac{3x-5}{x+3}}$, ОДЗ $\dfrac{x+3}{3x-5}>0$,

$$t=\frac{x+3}{3x-5},\ \sqrt{t}+1=\frac{2}{\sqrt{t}},\ \frac{t+\sqrt{t}-2}{\sqrt{t}}=0,\ \sqrt{t}=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{-1\pm 3}{2}=\left[\begin{array}{l}-2\\1\end{array}\right.$$

$t=1,\ \dfrac{x+3}{3x-5}=1,\ 3x-5=x+3,\ 2x=8,\ x=4$. Проверка: $\sqrt{\dfrac{7}{7}}+1=2\sqrt{\dfrac{7}{2}}$. **Ответ:** $x=4$.

7. Расстояние от точки пересечения диаметра окружности с хордой длиной 18 см до центра окружности равно 7 см. Эта точка делит хорду в отношении 2:1. Найти радиус.



Решение:

$$AB=18,\ EO=7,\ AE=2BE,\ R=?$$

$$AE\cdot BE=DE\cdot EC,\ AE+BE=18,\ BE=6,$$

$$2BE\cdot BE=\left(R-7\right)\left(7+R\right)$$

$$2\cdot 6\cdot 6=\left(R^2-7^2\right),\ R^2=72+49=121=11^2$$

Ответ: $R=11$.

8. Решить систему $\begin{cases}\log_4 x-\log_2 y=0;\\ x^2-5y^2+4=0.\end{cases}$

Решение: $\begin{cases}\dfrac{1}{2}\log_2 x-\log_2 y=0; & \log_2\dfrac{\sqrt{x}}{y}=\log_2 1,\ \sqrt{x}=y,\\ x^2-5y^2+4=0, & x^2-5x+4=0,\end{cases}\ \Rightarrow\ \begin{matrix}x=1;4,\\ y=4;2.\end{matrix}$

Ответ: $\{1;1\},\{4;2\}$.

9. Найти наибольшее значение функции $f(x)=9\sin x+12\cos x$.

Решение: $f(x)=9\sin x+12\cos x=\sqrt{9^2+12^2}\sin\left(x-arctg\dfrac{12}{9}\right)$. **Ответ:** 15.

10. Карандаши в количестве от 200 до 300 штук можно разложить в красные коробки по 10 или в синие коробки по 12 карандашей в каждую. Когда все карандаши уложили в красные коробки, 7 карандашей осталось, а при упаковке в синие коробки не хватило 3 карандашей. Сколько карандашей предназначалось для упаковки?

Решение: $\begin{cases}a=10x+7=10\left(x+1\right)-3, & a+3\vdots 10,\\ a=12y-3, & a+3\vdots 12,\end{cases}\Rightarrow a+3\vdots 60$.

$$a+3=180,\ \underline{240,300}.$$

Ответ: $a=237, a=297$.

БИЛЕТ № 8

1. Решить уравнение $7^{-x}-3\cdot 7^{1+x}=4$.

Решение: $7^{-x}-3\cdot 7^{1+x}=4$, $\dfrac{1}{7^x}-21\cdot 7^x=4$, $-21\left(7^x\right)^2-4\cdot 7^x+1=0$,

$\left(7^x\right)=\dfrac{4\pm\sqrt{16+84}}{-42}=\dfrac{4\pm 10}{-42}=\left[\begin{array}{l}-\dfrac{14}{42}=-\dfrac{1}{3}\text{ п.к.}\\ \dfrac{1}{7}\end{array}\right.$, $x=-1$. **Ответ:** $x=-1$.

2. Второй член геометрической прогрессии $b_2=24{,}5$, пятый член $b_5=196$. Найти третий член и сумму первых четырех членов.

Решение: $b_2=24{,}5;\ \ b_5=196,\ \ b_3=?\ \ S_4=?$

$\begin{cases}b_1\cdot q=24{,}5, & q^3=\dfrac{196}{24{,}5}=8,\ q=2,\\ b_1\cdot q^4=196; & b_1=12{,}25,\end{cases}\qquad S_4=\dfrac{12{,}25\left(1-2^4\right)}{1-2}=183{,}75.$

Ответ: $183{,}75$.

3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=3x^4-6x^2+4$ на отрезке $[-1;3]$.

Решение: $y=3x^4-6x^2+4$ на $\left[-1;3\right]$, $y'=12x^3-12x=12x\left(x^2-1\right)$, $x=0,\pm 1$, $y=\left(-1\right)=1$, $y=\left(3\right)=193$, $y\left(0\right)=4$, $y=\left(1\right)=1$. **Ответ:** $y=\left(-1\right)=y\left(1\right)=1$, $y\left(3\right)=193$.

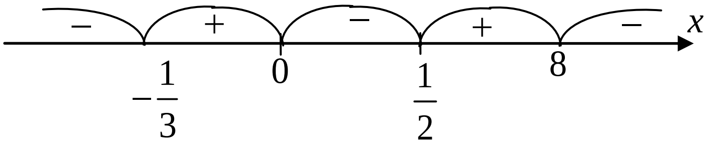
4. Вычислить $\sqrt{6+\sqrt{20}}-\sqrt{6-\sqrt{20}}$.

Решение: $\sqrt{6+\sqrt{20}}-\sqrt{6-\sqrt{20}}=A$, $A^2=12-2\sqrt{36-20}=4$, $A=\pm\sqrt{4}=2$. **Ответ:** 2.

5. Решить неравенство $\dfrac{x+2}{3x+1}\le\dfrac{x-2}{2x-1}$.

Решение: $\dfrac{x+2}{3x+1}\le\dfrac{x-2}{2x-1}$; $\dfrac{x+2}{3x+1}-\dfrac{x-2}{2x-1}\le 0$, $\dfrac{\left(x+2\right)\left(2x-1\right)-\left(x-2\right)\left(3x-1\right)}{\left(3x+1\right)\left(2x-1\right)}\le 0$,

$\dfrac{2x^2+3x-2-3x^2+5x+2}{\left(3x+1\right)\left(2x-1\right)}\le 0$, $\dfrac{-8x^2+8x}{\left(3x+1\right)\left(2x-1\right)}\le 0$, $\dfrac{-x\left(x-8\right)}{\left(3x+1\right)\left(2x-1\right)}\le 0$



Ответ: $\left(-\infty;-\dfrac{1}{3}\right)\cup\left[0;\dfrac{1}{2}\right)\cup\left[8;+\infty\right)$.

6. Решить уравнение $\sqrt{2x^2+3x+2}-\sqrt{2x^2+3x-5}=1$.

Решение: $\sqrt{2x^2+3x+2}-\sqrt{2x^2+3x-5}=1$, ОДЗ $2x^2+3x-2\ge 0$,

$2x^2+3x+2=t,\ \sqrt{t}-\sqrt{t-7}=1, \sqrt{t}=1+\sqrt{t-7},\ t=1+t-7+2\sqrt{t-7}.$

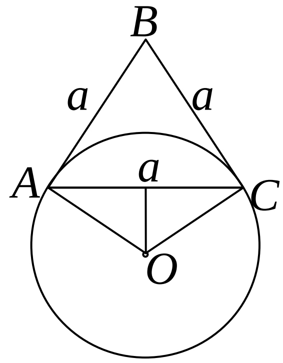
$6=2\sqrt{t-7},\ \sqrt{t-7}=3,\ t-7=9,\ t=16.$

$$2x^2+3x+2=16,\ 2x^2+3x-14=0,\ x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{9+112}}{4}=\frac{-3\pm 11}{4}=\left[\begin{array}{l}2\\ -\dfrac{7}{2}\end{array}\right.$$

Проверка: $\sqrt{2\cdot 4+6+2}-\sqrt{8+6-5}=1,\ \sqrt{2\cdot\frac{49}{2^2}-\frac{21}{2}+2}-\sqrt{2\cdot\frac{49}{2^2}-\frac{21}{2}-5}=1,$

Ответ: $2,-\frac{7}{2}$.

7. Через две вершины равностороннего треугольника ABC площадью $21\sqrt{3}$ см^2 проведена окружность, для которой две стороны треугольника являются касательными. Найти радиус этой окружности.



Решение: $S_{\Delta ABC}=21\sqrt{3},\ R=?,$

$S_{\Delta ABC}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\Rightarrow\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=21\sqrt{3},\ a^2=84,\ a=2\sqrt{21}.$

$\angle CAO=90^o-\angle BAC=30^o,\ \frac{a}{2}=R\cos 30^o,\ \sqrt{21}=R\frac{\sqrt{3}}{2},\ 2\sqrt{7}=R.$

Ответ: $R=2\sqrt{7}$.

8. Решить систему $\begin{cases}x+y=13;\\ \log_4 x+\log_4 y=1+\log_4 10.\end{cases}$

Решение: $\begin{cases}x+y=13,\\ \log_4(xy)=\log_4 40,\end{cases}\ \begin{cases}x+y=13,\\ xy=40,\end{cases}\ \left[\begin{array}{l}x=5,\ y=8\\ x=8,\ y=5\end{array}\right.$

Ответ: $\{5,8\},\{8,5\}$.

9. Решить уравнение $9\sin x-12\cos x=15$.

Решение:

$$9\sin x-12\cos x=15,\ \sqrt{9^2+12^2}\sin\left(x-arctg\frac{4}{3}\right)=15,$$

$$\sin\left(x-arctg\frac{4}{3}\right)=1,\ x-arctg\frac{4}{3}=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ x=arctg\frac{4}{3}+\frac{\pi}{2}+2\pi k.$$

10. На круизном лайнере от 250 до 400 путешественников. Если рассадить их в спасательные шлюпки, вмещающие 15 человек, то семерым не хватит места, а если разместить путешественников на плотах, рассчитанных на 25 человек, то останется 8 свободных мест. Сколько путешественников на лайнере?

Решение: $\begin{cases}a=15R+7=15(R+1)-8, & a+8\,\vdots\,15,\\ a=25l-8, & a+8\,\vdots\,25,\end{cases}\Rightarrow a+8\,\vdots\,75$. **Ответ:** $a=292,367$.

$a+8=225,\underline{300,375},450$

БИЛЕТ № 9

1. Решить уравнение $3^{2x+1}-10\cdot 3^{x}+3=0$.

Решение: $3^{2x+1}-10\cdot 3^{x}+3=0$, $3\cdot 3^{2x}-10\cdot 3^{x}+3=0$, $\left(3^{x}\right)_{1,2}=\dfrac{10\pm\sqrt{100-36}}{6}=\left[\begin{array}{l}3\\ \dfrac{1}{3}\end{array}\right.$, $x=\pm 1$.

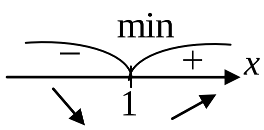
2. Найти сумму двенадцати первых членов арифметической прогрессии, если ее пятый член $a_5=1$, а семнадцатый член $a_{17}=18$.

Решение: $a_5=1;\ a_{17}=18.$ Найти S_{12}.

$$\begin{cases}a_1+4d=1,\\ a_1+16d=18;\end{cases}\quad \begin{cases}12d=17,\\ a_1=1-4\dfrac{17}{12}=-\dfrac{14}{3};\end{cases}\quad S_{12}=\dfrac{2\cdot\left(-\dfrac{14}{3}\right)+\dfrac{17}{12}\cdot 11}{2}\cdot 12=37{,}5$$

Ответ: $37{,}5$.

3. Найти все экстремумы функции $y=2^{x^2-2x+3}$.



Решение: $y=2^{x^2-2x+3}$, $y'=2^{x^2-2x+3}\ln 2\left(2x-2\right)=0\Rightarrow x=1$

Ответ: $y_{\min}\left(1\right)=2^2=4$.

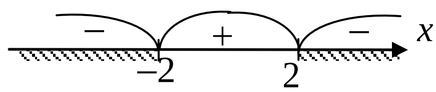
4. Вычислить $\sqrt{6+\sqrt{32}}-\sqrt{6-\sqrt{32}}$.

Решение: $\sqrt{6+\sqrt{32}}-\sqrt{6-\sqrt{32}}=A,\ A^2=12-2\sqrt{36-32}=8,\ A=\pm 2\sqrt{2},\ A=2\sqrt{2}$

5. Решить неравенство $\dfrac{1}{2-x}+\dfrac{5}{2+x}<1$.

Решение:

$$\frac{1}{2-x}+\frac{5}{2+x}<1,\ \frac{2+x+5\left(2-x\right)-1\left(2-x\right)\left(2+x\right)}{\left(2-x\right)\left(2+x\right)}<0,$$



$$\frac{2+x+10-5x+x^2-4}{\left(2-x\right)\left(2+x\right)}<0,\ \frac{x^2-4x+8}{\left(2-x\right)\left(2+x\right)}<0$$

Ответ: $\left(-\infty;-2\right)\cup\left(2;+\infty\right)$.

6. Решить уравнение $\sqrt{\dfrac{x+2}{x-3}}-6\sqrt{\dfrac{x-3}{x+2}}+1=0$.

Решение: $\sqrt{\dfrac{x+2}{x-3}}-6\sqrt{\dfrac{x-3}{x+2}}+1=0$, ОДЗ $\dfrac{x+2}{x-3}>0,\ \dfrac{x+2}{x-3}=t>0$,

$$\sqrt{t}-6\frac{1}{\sqrt{t}}+1=0,\ \left(\sqrt{t}\right)^2+\sqrt{t}-6=0,\ \left(\sqrt{t}\right)_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\frac{-1\pm 5}{2}=\left[\begin{array}{l}2\\ -3-\textit{п.к.}\end{array}\right.$$

$$\frac{x+2}{x-3}=2^2,\ x+2=4x-12,\ x=\frac{14}{3}.$$

Проверка: $\sqrt{\dfrac{\frac{14}{3}+2}{\frac{14}{3}-3}}-6\sqrt{\dfrac{\frac{14}{3}-3}{\frac{14}{3}+2}}+1=0,\ \sqrt{\dfrac{20}{5}}-6\sqrt{\dfrac{5}{20}}+1=0,\ 2-\dfrac{6}{2}+1=0.$

Ответ: $x=\dfrac{14}{3}.$

7. К окружности радиуса 10 см из точки A проведены лучи, касающиеся окружности в точках B и C так, что треугольник ABC – равносторонний. Найти его площадь.

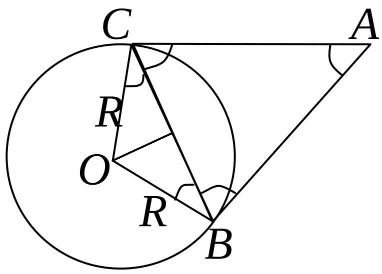
Решение: ΔABC-равносторонний, AC, AB-касательные, $R=10$, $AB=?$

$\angle ACB=60^o, \angle AOC=90^o\left(AC\perp OC\right), \angle OCB=30^o,$

$BC=R\cos 30^o\cdot 2=R\sqrt{3}=10\sqrt{3},\ AB=BC=AC=10\sqrt{3},$

$S_{\Delta ABC}=\dfrac{AB^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{100\cdot 3\sqrt{3}}{4}=75\sqrt{3}.$

Ответ: $S_{\Delta ABC}=75\sqrt{3}$..



8. Решить систему $\begin{cases}3^y\cdot 81=9^{x^2}\ ;\\ \lg y=\lg x-\lg 0{,}5\,.\end{cases}$

Решение: $\begin{cases}3^y\cdot 81=9^{x^2},\\ \lg y=\lg 2x,\end{cases}\ 3^{2x}\cdot 9^2=9^{x^2},\ x+2=x^2,\ x^2-x-2=0,$

$\begin{cases}x=-1-п.к.,\\ x=2,\end{cases}\Rightarrow x=2\Rightarrow y=4$. Проверка: $\begin{cases}3^4\cdot 81=9^4,\\ \lg 4=\lg\left(2\cdot 2\right).\end{cases}$

Ответ: $x=2$.

9. Найти наибольшее значение функции $f(x)=8\sin x+15\cos x$.

Решение: $f(x)=8\sin x+15\cos x=\sqrt{8^2+15^2}\sin\left(x+arctg\dfrac{15}{8}\right)=17\sin\left(x+arctg\dfrac{15}{8}\right)$

Ответ: Наибольшее значение $f(x)=17$.

10. В первый класс школы записалось от 200 до 300 детей. Было решено сформировать классы по 25 человек, но оказалось, что десятерым не хватит места. Тогда сформировали классы по 30 детей, но в одном из классов оказалось на 15 учеников меньше. Сколько детей записалось в первый класс?

Решение: $\left.\begin{cases}a=25R+10=25\left(R+1\right)-15, & a+15\,\vdots\,25,\\ a=30l-15, & a+15\,\vdots\,30,\end{cases}\right\}\Rightarrow a+15\,\vdots\,150$. **Ответ:** $a=285$.

$a+15=150, \underline{300,} \ 450$

БИЛЕТ № 10

1. Решить уравнение $9\cdot 3^{2x-1}+3^x-30=0$.

Решение: $9\cdot 3^{2x-1}+3^x-30=0$, $3\cdot 3^{2x}+3^x-30=0$,

$$3^x=\frac{-1\pm\sqrt{1+360}}{6}=\frac{-1\pm 19}{6}=\left[\begin{array}{l}3\\ -\dfrac{10}{3}\ \text{п.к.}\end{array}\right.,\ x=1.$$

Ответ: $x=1$.

2. Третий член геометрической прогрессии $b_3=-1$, шестой член $b_6=3\frac{3}{8}$. Найти первый член и знаменатель прогрессии.

Решение: $b_3=-1;\ \ b_6=3\frac{3}{8}=\frac{27}{8},\ b_1=?\ q=?\ \ \ -\frac{4}{9};-\frac{2}{3};-1;-\frac{3}{2};-\frac{9}{4};\frac{27}{8};...$

$$\begin{cases} b_1\cdot q^2=-1, & q^3=\left(-\dfrac{3}{2}\right)^3,\quad q=\dfrac{3}{2}\\ b_1\cdot q^5=\dfrac{27}{8}; & b_1=\dfrac{-1}{q^2}=-\dfrac{4}{9},\end{cases}$$

. **Ответ:** $b_1=-\frac{4}{9},\ q=\frac{3}{2}$.

3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=e^{2x^2-4x-6}$ на отрезке $[0;3]$.

Решение: $y=e^{2x^2-4x-6}$ на $[0;3]$. $y'=e^{2x^2-4x-6}(4x-4)=0,\ x=1,$

$y(0)=e^6,\ y(1)=e^4,\ y(3)=e^{12}$.

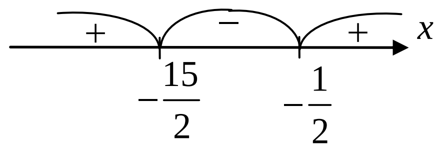
4. Вычислить $\sqrt{6+\sqrt{27}}-\sqrt{6-\sqrt{27}}$.

Решение: $\left(\sqrt{6+\sqrt{27}}-\sqrt{6-\sqrt{27}}\right)^2=12-2\sqrt{36-27}=6\Rightarrow\pm\sqrt{6}\Rightarrow\sqrt{6}$

5. Решить неравенство $\frac{3-x}{2x+1}<-\frac{3}{4}$.

Решение:

$\frac{3-x}{2x+1}<-\frac{3}{4},\ \frac{3-x}{2x+1}+\frac{3}{4}<0,\ \frac{12-4x+6x+3}{4(2x+1)}<0,\ \frac{2x+15}{4(2x+1)}<0.$



Ответ: $\left(-\frac{15}{2};-\frac{1}{2}\right)$

6. Решить уравнение $\sqrt{\frac{x^2-16}{x-3}}+\sqrt{x+3}=\frac{7}{\sqrt{x-3}}$.

Решение: $\sqrt{\frac{x^2-16}{x-3}}+\sqrt{x+3}=\frac{7}{\sqrt{x-3}}$, ОДЗ $\frac{x^2-16}{x-3}\geq 0,\ x>3\Rightarrow x\geq 4$,

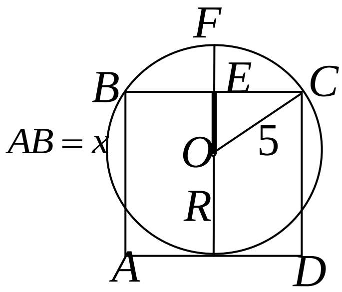
$\sqrt{x^2-16}+\sqrt{x^2-9}=7,\ x^2-16=t,\ \sqrt{t}+\sqrt{t+7}=7,\ t+2\sqrt{t\left(t+7\right)}+t+7=49,$

$2\sqrt{t\left(t+7\right)}=42-2t,\ \sqrt{t^2+7t}=21-t,\ t\le 21,\ t^2+7t=21^2-42t+t^2,\ 49t=21^2,$

$t=\dfrac{3^2\cdot 7^2}{49}=9,\ x^2-16=9,\ x^2=25,\ x=\pm 5,\ x=5.$

Проверка: $\sqrt{\dfrac{9}{2}}+\sqrt{8}=\dfrac{7}{\sqrt{2}},\ \dfrac{3}{\sqrt{2}}+\dfrac{4}{\sqrt{2}}=\dfrac{7}{\sqrt{2}}.$

7. Две вершины квадрата лежат на окружности радиуса 5 см, а две другие – на касательной к этой окружности. Найти площадь квадрата.



Решение: $R=5$, $ABCD$-квадрат, $S_{ABCD}=?$

$AB=x,\ EF=2R-x,\ EO=R-EF=x-R$

$\Delta EOC: EC^2=OC^2-EO^2=R^2-\left(x-R\right)^2\Rightarrow\left(\dfrac{x}{2}\right)^2=R^2-x^2+2Rx-R^2,$

$\dfrac{x^2}{4}=2Rx-x^2,\ \dfrac{5}{4}x=2R,\ x=\dfrac{2R\cdot 4}{5}=8.$ **Ответ:** $S_{\Delta ABCD}=64.$.

8. Решить систему $\begin{cases}\log_5 x=\log_5 y+\log_5\dfrac{2}{3};\\ 2^x\cdot 3^y=108.\end{cases}$

Решение: $\begin{cases}\log_5\dfrac{x}{y}=\log_5\dfrac{2}{3},\\ 2^x\cdot 3^y=108,\end{cases}$ $\begin{cases}\dfrac{x}{y}=\dfrac{2}{3},\\ 2^x\cdot 3^y=2^2\cdot 3^3,\end{cases}$ $\begin{cases}2^{x-2}=3^{3-y}\\ x=2t,\ \ y=3t\end{cases}$ $\begin{cases}2^{2t-2}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{3t-3}\\ x=2t,\ y=3t\end{cases}$

$2^{2t-2}\uparrow,\ \left(\dfrac{1}{3}\right)^{3t-3}\downarrow\Rightarrow\exists!$ точка пересечения $t=1,\ \begin{cases}x=2,\\ y=3.\end{cases}$ **Ответ:** $\left\{2;3\right\}$.

9. Решить уравнение $15\sin x-8\cos x=17$.

$$15\sin x-8\cos x=17,\ \sqrt{15^2+8^2}\sin\left(x-arctg\frac{8}{15}\right)=17,$$

Решение:

$$\sin\left(x-arctg\frac{8}{15}\right)=1\Rightarrow x-arctg\frac{8}{15}=\frac{\pi}{2}+2\pi k.$$

Ответ: $x=arctg\dfrac{8}{15}+\dfrac{\pi}{2}+2\pi k$.

10. Для упаковки книг при переезде школьной библиотеки можно купить маленькие коробки, в которые помещается 12 книг, или большие, рассчитанные на 25 книг. Если все книги поместить в маленькие коробки, то 7 книг останется, а если все книги упаковать в большие коробки, останется место еще для 5 книг. Фонд библиотеки содержит от 500 до 650 книг. Сколько книг в библиотеке?

Решение: $\begin{cases}a=12R+7=12\left(R+1\right)-5, & a+5\,\vdots\,12,\\ a=25l-5, & a+5\,\vdots\,25,\end{cases}\Bigg\}a+5\,\vdots\,300$. **Ответ:** $a=595$.

$a+5=300,\underline{600},900$