МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА PHYSTECH.INTERNATIONAL ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 5 ШИФР _____

заполняется ответственным секретарём

1. Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} |4y-3x+12| \le 12, \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 \le 1 \end{cases}$$

и найдите площадь полученной фигуры.

2. Решите уравнение $\sqrt{2+\sqrt{6}-\left(6\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)\cos x} = 2\cos x - \sqrt{2}$.

3. Решите неравенство $\log_{\frac{3x-6}{3x+5}}(3x-9)^{10} \ge -10\log_{\frac{3x+5}{3x-6}}(3x+6)$.

4. Одна из боковых сторон трапеции перпендикулярна основаниям и равна $2R$. На этой стороне как на диаметре построена окружность, которая делит другую боковую сторону на три отрезка. Отношение длин этих отрезков равно $7:21:27$ (считая от верхнего основания). Найдите площадь трапеции.

5. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin^8 x + 8\cos^8 x$.

6. Принятых в университет первокурсников распределили по учебным группам так, что в каждой группе было одинаковое число студентов. В связи с сокращением числа специальностей число групп уменьшилось на 9, всех первокурсников вновь распределили по группам; при этом группы снова получились равные по численности и в каждой из них менее 30 студентов. Известно, что всего было 2376 первокурсников. Сколько стало групп?

7. Три параллельные прямые в точках K, L и M касаются сферы с центром в точке O. Известно, что радиус сферы равен 5, площадь треугольника OKL равна 12, а площадь треугольника KLM больше 30. Найдите угол KML.

8. Известно, что уравнение $2x^3 - 7x^2 + 7x + p = 0$ имеет три различных корня, причём эти корни образуют геометрическую прогрессию. Найдите p и решите это уравнение.

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА PHYSTECH.INTERNATIONAL ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 6 ШИФР _____

заполняется ответственным секретарём

1. Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} |3y+5x-15| \le 15, \\ (|x|-3)^2 + (|y|-5)^2 \le 1 \end{cases}$$

и найдите площадь полученной фигуры.

2. Решите уравнение $\sqrt{3+4\sqrt{6}-\left(16\sqrt{3}-8\sqrt{2}\right)\sin x} = 4\sin x - \sqrt{3}$.

3. Решите неравенство $\log_{\frac{2x+4}{2x-1}}(x+7)^8 \ge -8\log_{\frac{2x-1}{2x+4}}(2-x)$.

4. Одна из боковых сторон трапеции перпендикулярна основаниям и равна $2R$. На этой стороне как на диаметре построена окружность, которая делит другую боковую сторону на три отрезка. Отношение длин этих отрезков равно $12:15:5$ (считая от нижнего основания). Найдите площадь трапеции.

5. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = 27\sin^8 x + 8\cos^8 x$.

6. Принятых в университет первокурсников распределили по учебным группам так, что в каждой группе было одинаковое число студентов. В связи с сокращением числа специальностей число групп уменьшилось на 4, всех первокурсников вновь распределили по группам; при этом группы снова получились равные по численности и в каждой из них менее 30 студентов. Известно, что всего было 2808 первокурсников. Сколько стало групп?

7. Три параллельные прямые в точках K, L и M касаются сферы с центром в точке O. Известно, что радиус сферы равен $5\sqrt{2}$, площадь треугольника OKL равна 7, а площадь треугольника KLM больше 50. Найдите угол KML.

8. Известно, что уравнение $x^3 + 7x^2 + 14x - p = 0$ имеет три различных корня, причём эти корни образуют геометрическую прогрессию. Найдите p и решите это уравнение.