Отборочный этап (Онлайн-этап) олимпиады «Phystech.International» 2016/17 по математике

Распределение задач по классам

11 класс	10 класс	9 класс
1	1	15
2	11	17
3	3	1
4	4	3
5	5	11
6	6	16
7	7	6
8	8	14
9	12	12
10	13	13

1. Найдите наименьшее натуральное *a* такое, что выражение param1 делится на param2.

Find the smallest positive integer *a* such that param1 is divisible by param2.

param1	param2	Ответ
$a(a+2)(a+4)(a+6)(a+8)$	10^6	31242
$a(a+6)(a+12)(a+18)(a+24)$	10^7	156226
$a(a+14)(a+28)(a+42)(a+56)$	10^6	31194
$a(a+18)(a+36)(a+54)(a+72)$	10^7	156178

Условие.

Найдите наименьшее натуральное *a* такое, что выражение $a(a+2)(a+4)(a+6)(a+8)$ делится на 10^6.

Ответ.

31242.

Решение.

Среди данных чисел нет двух чисел, делящихся на 5 (ни одна из разностей двух множителей не делится на 5), поэтому одно из чисел должно делиться на 5^6. Еще заметим, что все данные числа одной четности, поэтому они должны все быть четными.
Наименьшее возможно подходящее *a* – это такое, что $a + 8$ делится на $2\cdot 5^6$. Число a = 31250 – 8 = 31242 – подходит, так как данное произведение делится на 2^6.

2. Известно, что $x + y$ = param1. Какое наибольшее значение может принимать выражение $\sqrt[4]{8x^3y^3(x^2+y^2)}$?

It is known that $x + y$ = param1. What is the maximum possible value of $\sqrt[4]{8x^3y^3(x^2+y^2)}$?

param1	Ответ
9	162
11	242
13	338
15	450
17	578

Условие.
Известно, что $x + y = 9$. Какое наибольшее значение может принимать выражение $\sqrt[4]{8x^3y^3(x^2+y^2)}$?

Ответ.
162
Решение.

Обозначим 9 = 2a. Обе переменных не могут быть отрицательными, иначе их сумма – отрицательна. Если среди данных чисел одно положительное, а другое – отрицательное, то значение подкоренного выражения – отрицательное. Пусть теперь обе переменные – неотрицательны. Исследуем на максимум выражение $x^3y^3(x^2+y^2)$. Тогда из неравенства $x+y \geq 2\sqrt{xy}$ следует, что $xy \leq a^2$, то есть $u \leq a^2$, где $u = xy$. Теперь данное выражение есть функция $f(u) = u^3(4a^2 - 2u)$, рассматриваемая на промежутке $0 \leq u \leq a^2$. Найдем производную: $f'(u) = 4u^2(3a^2 - 2u)$. На рассматриваемом промежутке она положительна, поэтому $\max(f(u)) = f(a^2) = 2a^8$. Значит, максимум исходного выражения есть $\sqrt[4]{8 \cdot 2a^8} = 2a^2 = 162$.

3. Известно, что для положительных чисел a, b, c каждое из трех уравнений
ax^2+param1bx+c=0,
bx^2+param1cx+a=0,
cx^2+param1ax+b=0
имеет хотя бы один действительный корень.
Каково наименьшее значение произведения корней второго уравнения, если произведение корней первого уравнения равно param2? (Если уравнение имеет два совпадающих корня, то произведение считается равным квадрату этого корня).

Let a, b, c be positive numbers. Each of the equations
ax^2+param1bx+c=0,
bx^2+param1cx+a=0,
cx^2+param1ax+b=0
has at least one real root.

What is the smallest possible value for the product of roots of the second equation if the product of roots of the first equation is equal to param2? (If the equation has only one root let the product be equal to this root squared.)

param1	param2	Ответ
10	6	0,24
20	7	0,07
12	9	0,25
8	14	0,875
15	18	0,32

Условие.

Известно, что для положительных чисел a, b, c каждое из трех уравнений
$ax^2+10bx+c=0$,
$bx^2+10cx+a=0$,
$cx^2+10ax+b=0$
имеет хотя бы один действительный корень.
Каково наименьшее значение произведения корней второго уравнения, если произведение корней первого уравнения равно 6? (Если уравнение имеет два совпадающих корня, то произведение считается равным квадрату этого корня).

Ответ.

0,24

Решение.

Обозначим $10/2 = p$, $6 = q$. По теореме Виета $c/a = q$. Дискриминант третьего уравнения неотрицателен, поэтому $a^2p^2 \geq bc$. Заменив в этом неравенстве c, получаем: $a^2p^2 \geq abq$. Отсюда $a/b \geq q/p^2$. Значит, $\min\{a/b\} = q/p^2 = 0{,}24$, а это есть наименьшее значение произведения корней второго трехчлена. Осталось проверить, что этот минимум достигается, если, например, взять $a = q$, $b = p^2$, $c = q^2$.

4. Бесконечная геометрическая прогрессия состоит из натуральных чисел. Оказалось, что произведение первых четырёх её членов равно param1. Найдите количество таких прогрессий.
The infinite geometric progression consists of positive integers. It turned out that the product of the first four terms equals param1. Find the number of such progressions.

param1	Ответ
$2^{200}3^{300}$	442
$2^{200}5^{400}$	578
$3^{200}5^{600}$	867
$2^{300}7^{600}$	1326
$3^{300}7^{500}$	1092

Условие.

Бесконечная геометрическая прогрессия состоит из натуральных чисел. Оказалось, что произведение первых четырёх её членов равно $2^{200}3^{300}$. Найдите количество таких прогрессий.

Ответ.
442
Решение.
Если b_1 – первый член прогрессии, а q – ее знаменатель, то произведение первых четырех членов прогрессии равно $b_1^4q^6$. Поэтому $b_1^2q^3 = 2^{100}\cdot 3^{150}$. Значит, $b_1 = 2^a3^b$, $q = 2^c3^d$ и получаем систему: $2a + 3c = 100$, $2b + 3d = 150$. Первое уравнение имеет 17 решений в целых неотрицательных числах (c – четное число, то есть $c = 2n$, отсюда $a + 3n = 50$, и получаем $0 \le n \le 16$), второе – 26 решений ($b = 3m$, $2m + d = 50$, то есть $0 \le m \le 25$). Каждому решению первого уравнения может соответствовать любое решение второго. Общее число прогрессий равно $17\cdot 26 = 442$.

5. Дана функция $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такая, что $f(1) = 1$, и для любых $x\in\mathbb{R}$, $y\in\mathbb{R}$ выполняется равенство $f(x) + f(y) + xy + 1 = f(x + y)$. Найдите все целые числа n, для которых выполняется равенство $f(n)$=param1. В ответ запишите сумму кубов найденных значений n.
Function $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ such that $f(1) = 1$ satisfies the equality $f(x) + f(y) + xy + 1 = f(x + y)$ for any real x, y. Find all integers n for which $f(n)$=param1. In the answer write down the sum of cubes of all such values of n.

param1	Ответ
$2n^2–10$	19
$3n^2–6n–11$	63
$2n^2–9n+14$	133
$3n^2+19n+29$	–91

Условие.

Дана функция $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такая, что $f(1) = 1$, и для любых $x\in\mathbb{R}$, $y\in\mathbb{R}$ выполняется равенство $f(x) + f(y) + xy + 1 = f(x + y)$. Найдите все целые числа n, для которых выполняется равенство $f(n) = 2n^2–10$. В ответ запишите сумму кубов найденных значений n.

Ответ.
19

Решение.

Подставив в данное функциональное уравнение $y = 1$, получаем: $f(x) + f(1) + x + 1 = f(x + 1)$, то есть $f(k) – f(k – 1) = k + 1$. Отсюда $f(n) – f(1) = (f(n) – f(n – 1)) + (f(n – 1) – f(n – 2)) + \ldots + f(2) – f(1) = n + 1 + n + \ldots + 2$. Значит, $f(n) = \dfrac{n^2+3n-2}{2}$. Рассуждая аналогично, получаем, что $f(n) = \dfrac{n^2+3n-2}{2}$ и при $n \le 0$. Значит, нам нужно решить уравнение $n^2 + 3n - 2 = 2(2n^2 - 10)$. Получаем уравнение $3n^2 - 3n - 18 = 0$. Его корнями являются числа 3 и –2. Сумма кубов этих чисел равна 19.

6. В алфавите племени АБЫРВАЛГ param1 букв, а словом считается любая последовательность из нескольких букв. Вождь написал одно слово из param2 букв. Из скольких слов, состоящих из param3 букв, его можно получить вычеркиванием одной буквы?

The alphabet of a tribe ABYRVALG contains param1 letters. An arbitrary sequence of these letters is called a word. The tribe's chieftain has written a word of param2 letters. From how many words consisting of param3 letters can we obtain this word by crossing out one letter?

param1	param2	param3	Ответ
20	10	11	210
19	11	12	217
18	12	13	222
17	13	14	225
16	14	15	226

Условие.

В алфавите племени АБЫРВАЛГ 20 букв, а словом считается любая последовательность из нескольких букв. Вождь написал одно слово из 10 букв. Из скольких слов, состоящих из 11 букв, его можно получить вычеркиванием одной буквы?

Ответ.

210

Решение.

Пусть *AB…CD* – десятибуквенное слово. Подсчитаем, сколько одиннадцатибуквенных слов можно получить из него добавлением одной буквы. В начале слова можно написать любую из 20 букв, однако слово, полученное написанием буквы *A*, можно также получить, вставив букву *A* между *A* и *B*. Этот случай мы сейчас пропустим и учтем позже. То есть мы получили 19 слов. Аналогично, поставив букву между *A* и *B*, можно получить ещё 19 слов (мы опять не учитываем слово, которое получается постановкой буквы *B* между *A* и *B*). Действуя таким образом, мы будем получать по 19 новых слов. И, наконец, 20 слов можно получить, дописав букву в конце слова, написанного вождём. Итого получаем $10 \cdot 19 + 20 = 210$ слов.

7. В выпуклом пятиугольнике *ABCDE* на сторон *AE* взята точка *M*, а на стороне *DE* взята точка *N*. Отрезки *CM* и *BN* пересекаются в точке *P*. Какую наименьшую площадь может иметь пятиугольник *ABCDE*, если известно, что четырехугольники *ABPM* и *DCPN* – параллелограммы, а их площади равны соответственно param1 и param2?

Point *M* is chosen on the side *AE* and point *N* is chosen on the side *DE* of a convex pentagon *ABCDE*. Segments *CM* and *BN* intersect at point *P*. What is the smallest possible area of *ABCDE* if it is given that *ABPM* and *DCPN* are parallelograms with areas param1 and param2 respectively?

param1	param2	Ответ
8	9	29
10	45	85
9	50	89
6	75	111
8	49	85

Условие.

В выпуклом пятиугольнике *ABCDE* на сторон *AE* взята точка *M*, а на стороне *DE* взята точка *N*. Отрезки *CM* и *BN* пересекаются в точке *P*. Какую наименьшую площадь может иметь пятиугольник *ABCDE*, если известно, что четырехугольники *ABPM* и *DCPN* – параллелограммы, а их площади равны соответственно 8 и 9?

Ответ.
29

Решение.
Пусть площади параллелограммов *ABPM* и *DCPN*, треугольника *BCP* и четырехугольника *MPNE* равны соответственно S_1, S_2, S_3 и S_4. По условию $AM \sqcup BP$ и $PN \sqcup CD$. Значит, $AE \sqcup BN \sqcup CD$. Аналогично, $DE \sqcup CM \sqcup AB$. Тогда *MPNE* – также параллелограмм, и потому $S_4 : S_1 = NP : PB$ (параллелограммы *ABPM* и *MPNE* имеют равные высоты). Так же равные высоты имеют треугольник *BCP* и параллелограмм *DCPN*, поэтому $S_3 : S_2 = \frac{1}{2} BP : PN$. Перемножая написанные равенства получаем: $\frac{S_4}{S_1} \cdot \frac{S_3}{S_2} = \frac{1}{2}$. Значит, $S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 =$

$= S_1 + S_2 + S_3 + \frac{S_1 S_2}{2S_3} \geq S_1 + S_2 + 2\sqrt{S_3 \cdot \frac{S_1 S_2}{2S_3}} = S_1 + S_2 + \sqrt{2S_1 S_2} = 29$. Полученный минимум достигается, когда $S_3 = S_4$.

8. Пусть param1. Какое наибольшее значение может принимать param2?

It is given that param1. Find the largest possible value of param2.

param1	param2	Ответ
$\frac{9\cos^2 x - 7 + 12\sin x}{16 - 9\sin^2 x + 6\sqrt{5}\cos x} = 3$	$6\sin x$	4
$\frac{25\sin^2 x - 37 + 40\cos x}{35 - 25\cos^2 x - 30\sin x} = 4$	$10\cos x$	8

$\dfrac{33-16\cos^2 x-24\sin x}{16\sin^2 x-19-8\sqrt{7}\cos x}=2$	$12\sin x$	9
$\dfrac{15-9\cos^2 x+6\sin x}{9\sin^2 x-7+12\sqrt{2}\cos x}=\dfrac{1}{2}$	$6\sin x$	–2

Условие.

Пусть $\dfrac{9\cos^2 x-7+12\sin x}{16-9\sin^2 x+6\sqrt{5}\cos x}=3$. Какое наибольшее значение может принимать $6\sin x$?

Ответ.
4

Решение.
Заметим, что $\dfrac{9\cos^2 x-7+12\sin x}{16-9\sin^2 x+6\sqrt{5}\cos x}=\dfrac{6-(3\sin x-2)^2}{2+(3\cos x+\sqrt{5})^2}$. Полученное выражение может равняться 3, только если $3\sin x-2=0$ и $3\cos x+\sqrt{5}=0$. Поэтому выражение $6\sin x$ может принимать только значение 4.

9. В прямоугольном треугольнике *ABC* (угол *C* – прямой) проведены биссектриса *AL* и медиана *BM*, пересекающиеся в точке *P*. Найдите площадь треугольника *ABC*, если известно, что *AP* = param1, *LP* = param2. Ответ округлите до **ближайшего целого числа**.

Bisector AL and median *BM* of right triangle *ABC* (angle *C* is right) intersect at point *P*. Find the area of triangle *ABC* if *AP*=param1, *LP*=param2. Round the answer to **closest integer**.

param1	param2	Ответ
49	29	2698
25	13	289
16	10	361
36	26	3193
25	17	1216

Условие.
В прямоугольном треугольнике *ABC* (угол *C* – прямой) проведены биссектриса *AL* и медиана *BM*, пересекающиеся в точке *P*. Найдите площадь треугольника *ABC*, если известно, что *AP* = 49, *LP* = 29. Ответ округлите до **ближайшего целого числа**.

Ответ.
2698

Решение.

Пусть $AP = 49 = (m+n)^2$, $LP = 29 = m^2+n^2$. Напишем теорему Менелая для треугольника *ACL* и прямой *BM*: $\dfrac{AP}{PL}\cdot\dfrac{LB}{BC}\cdot\dfrac{CM}{MA}=1$. Отсюда $\dfrac{LB}{BC}=\dfrac{m^2+n^2}{(m+n)^2}$, то есть $\dfrac{LB}{LC}=\dfrac{m^2+n^2}{2mn}$.

Отсюда, по свойству биссектрисы треугольника, $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{m^2+n^2}{2mn}$, то есть

$AB = k(m^2+n^2), AC = 2kmn$. И по теореме Пифагора $BC = k(m^2-n^2)$. Тогда $LC = \frac{2mn}{m^2+2mn+n^2} BC = \frac{2kmn(m^2-n^2)}{(m+n)^2} = \frac{2kmn(m-n)}{m+n}$. И, значит, $AL^2 = \left(\frac{2kmn(m-n)}{m+n}\right)^2 + (2kmn)^2 = 2\left(\frac{2kmn}{m+n}\right)^2 (m^2+n^2)$. И получается равенство $2\left(\frac{2kmn}{m+n}\right)^2 (m^2+n^2) = \left((m+n)^2+(m^2+n^2)\right)^2$. Отсюда $k = \frac{(m^2+mn+n^2)(m+n)}{2mn\sqrt{m^2+n^2}}$. Тогда $S = \frac{1}{2}k(m^2-n^2)\cdot 2kmn = \frac{(m^2+mn+n^2)^2(m+n)^2(m^2-n^2)}{2mn(m^2+n^2)} \approx 2698.$

10. Стрелка часов стоит на 12 часах. Вася в строку пишет последовательность из знаков «плюс» или «минус», суммарное количество которых равно param1. После чего он дает эту последовательность роботу. Робот читает последовательность справа налево. Если ему встречается знак «плюс», то он поворачивает стрелку на 120° по часовой стрелке, а если ему встречается знак «минус», то он поворачивает стрелку на 120° против часовой стрелки. Найдите количество таких последовательностей, после выполнения которых стрелка будет показывать на 12 часов.

A clock hand points to 12. Jack writes a sequence consisting of param1 symbols, each symbol being plus or minus. After that he gives this sequence to a robot. The robot reads it from right to left. If he sees a plus he turns the clock hand 120° clockwise and if he sees a minus he turns it 120° counterclockwise. Find the number of sequences such that after the robot finishes the program the clock hand still points to 12.

param1	Ответ
11	682
12	1366
13	2730
14	5462
15	10922

Условие.

Стрелка часов стоит на 12 часах. Вася в строку пишет последовательность из знаков «плюс» или «минус», суммарное количество которых равно 11. После чего он дает эту последовательность роботу. Робот читает последовательность справа налево. Если ему встречается знак «плюс», то он поворачивает стрелку на 120° по часовой стрелке, а если ему встречается знак «минус», то он поворачивает стрелку на 120° против часовой стрелки. Найдите количество таких последовательностей, после выполнения которых стрелка будет показывать на 12 часов.

Ответ.

682

Решение.

Пусть a_n – количество последовательностей длины n, в результате выполнения которых стрелка будет показывать на 12 часов, а b_n – количество последовательностей длины n, в результате выполнения которых стрелка будет показывать на 4 или 8 часов. Несложно понять, что $a_{n+1} = 2b_n$, $b_{n+1} = a_n + b_n$. Отсюда получаем, что $b_{n+2} = b_{n+1} + 2b_n$, $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$. Так как $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, можно записать формулу $a_n = \dfrac{2^n + 2\cdot(-1)^n}{3}$. В нашем случае получаем ответ $a_{11} = 682$.

11. Обозначим через $S(k)$ сумму цифр числа k. Пусть n – наименьшее натуральное число такое, что S(n) + S(n+1) = param1. В ответ запишите пятизначное число, первые две цифры которого совпадают с первыми двумя цифрами числа n, а последние три – с последними тремя цифрами числа n. Например, если n=1234567890, то в ответ нужно записать число 12890.

Let $S(k)$ denote the sum of all the digits in decimal representation of a positive integer k. Let n be the smallest positive integer satisfying the condition S(n) + S(n+1) = param1. As the answer to the problem write down a five-digit number such that its first two digits coincide with first two digits of n and its last three digits coincide with the last three digits of n. For example, if n=1234567890, then the answer must be 12890.

param1	Ответ
2016	59989
664	49989
1580	39989
4000	79989

Условие.
Обозначим через $S(k)$ сумму цифр числа k. Пусть n – наименьшее натуральное число такое, что S(n) + S(n+1) = 2016. В ответ запишите пятизначное число, первые две цифры которого совпадают с первыми двумя цифрами числа n, а последние три – с последними тремя цифрами числа n. Например, если n=1234567890, то в ответ нужно записать число 12890.

Ответ.
59989

Решение.
Если число n не оканчивается на 9, то $S(n + 1) = S(n) + 1$, и сумма $S(n) + S(n+1)$ – нечетна, то есть не может равняться. 2016. Значит, число n оканчивается на 9. Если на одну девятку, то $S(n + 1) = S(n) – 8$, и тогда $S(n) = 1012$. Наименьшее число с такой суммой цифр есть 599…989 (общее количество девяток равно 111). Если же количество девяток в конце числа n не меньше двух, то сумма $S(n)$ по аналогичным соображениям будет больше, и число n также больше. Таким образом, в ответ записывается число 59989.

12. Пусть AC – наибольшая сторона треугольника ABC. На отрезке AC выбраны точки K и M так, что $AM = AB$ и $CK = CB$. Известно, что радиус окружности, описанной около треугольника *KBM*, равен param1, радиус окружности, вписанной в треугольник *ABC*, равен param2, и эта окружность касается стороны *BC* в точке *T*. Найдите квадрат длины отрезка *BT*.

Let *AC* be the largest side of triangle *ABC*. Points *K* and *M* are chosen on side *AC* so that *AM* = *AB* and *CK* = *CB*. It is given that the radius of the circumcircle of the triangle *KBM* equals to param1, and radius of the incircle of the triangle *ABC* equals to param2. Find the length of *BT* squared if *T* is the point where the incircle of *ABC* touches its side *BC*.

param1	param2	Ответ
7	5	24
8	5	39
9	7	32
11	8	57
13	9	88

Условие.

Пусть *AC* – наибольшая сторона треугольника *ABC*. На отрезке *AC* выбраны точки *K* и *M* так, что *AM* = *AB* и *CK* = *CB*. Известно, что радиус окружности, описанной около треугольника *KBM*, равен 7, радиус окружности, вписанной в треугольник *ABC*, равен 5, и эта окружность касается стороны *BC* в точке *T*. Найдите квадрат длины отрезка *BT*.

Ответ.
24

Решение.

Обозначим *R* – радиус окружности, описанной около треугольника *KBM* и *r* – радиус окружности, вписанной в треугольник *ABC*. Вначале докажем, что центры окружностей, указанных в условии задачи, совпадают. Действительно, центр *I* окружности, вписанной в треугольник *ABC*, лежит на биссектрисе угла *BAC*, то есть на биссектрисе равнобедренного треугольника *BAM*. Из этого следует, что точка *I* лежит на серединном перпендикуляре к отрезка *BM*. Аналогично, она лежит на серединном перпендикуляре к отрезку *BK*. Значит, она является центром окружности, описанной около треугольника *KBM*. Как известно, $BT = \frac{BC + BA - AC}{2} = \frac{CK + AM - AC}{2} = \frac{KM}{2}$. Треугольник *KIM* – равнобедренный: *IK* = *IM* как радиусы окружности, описанной около треугольника *KBM*. Пусть вписанная окружность касается стороны *AC* в точке *S*. Тогда *KM* = 2 *KS* = $= 2\sqrt{IK^2 - IS^2} = 2\sqrt{R^2 - r^2}$, то есть $BT^2 = R^2 - r^2 = 24$.

13. На планете системы Альфа Центавра флаг каждого государства – трехцветный. Известно, что для любых двух государств наборы цветов в их флагах имеют ровно один общий цвет. Какое максимальное число государств может быть на этой планете, если количество цветов, встречающихся на флагах равно param1?

On a planet in Alpha Centauri system each state has a three-coloured flag. For any two states their flags have exactly one common colour. What is the maximum possible number of states on this planet given that param1 different colours can be encountered on the flags?

param1	Ответ
1225	612
715	357
1843	921
1745	872
1463	731

Условие.

На планете системы Альфа Центавра флаг каждого государства – трехцветный. Известно, что для любых двух государств наборы цветов в их флагах имеют ровно один общий цвет. Какое максимальное число государств может быть на этой планете, если количество цветов, встречающихся на флагах равно 1225?

Ответ.

612

Решение.

Выберем один флаг с цветами A, B, C. Каждый из остальных флагов содержит ровно один из цветов A, B, C. Рассмотрим два случая.

1) Все остальные флаги также содержат цвет A. Тогда всего флагов не больше, чем непересекающихся пар, составленных из 1224 цветов, то есть не больше 612. Такое число флагов достигается, если разбить 1224 цвета на 612 пар и к каждой из них добавить цвет A.

2) Есть флаг X с цветами A, D, E, содержащая A, и есть флаг Y, содержащий цвет B. У флагов X и Y должен быть общий цвет. Без ограничения общности можно считать, что это цвет D. То есть флаг Y имеет цвета B, D, F. Рассмотрим любой другой флаг, отличный от рассмотренных трёх. Если он содержит цвет A, то он содержит и F (он должен иметь общий цвет с флагом Y, но это не могут быть цвета B, D), поэтому есть не более одного такого флага. Аналогично, дополнительно найдется не более одного флага, содержащего цвет B, и не более одного, содержащего цвет C. Итак, в этом случае флагов не больше шести.

14. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ на сторон AE взята точка M, а на стороне DE взята точка N. Отрезки CM и BN пересекаются в точке P. Найдите площадь пятиугольника $ABCDE$, если известно, что четырехугольники $ABPM$ и $DCPN$ – параллелограммы, их площади равны соответственно param1 и param2, а площадь треугольника BCP равна param3.

Point M is chosen on the side AE and point N is chosen on the side DE of a convex pentagon $ABCDE$. Segments CM and BN intersect at point P. Find the area of $ABCDE$ if it is given that $ABPM$ and $DCPN$ are parallelograms with areas param1 and param2 respectively and the area of triangle BCP equals param3?

param1	param2	param3	Ответ
5	8	10	25
6	10	3	29
7	9	7	27,5
8	11	20	41,2
9	12	4	38,5

Условие.
В выпуклом пятиугольнике *ABCDE* на сторон *AE* взята точка *M*, а на стороне *DE* взята точка *N*. Отрезки *CM* и *BN* пересекаются в точке *P*. Найдите площадь пятиугольника *ABCDE*, если известно, что четырехугольники *ABPM* и *DCPN* – параллелограммы, их площади равны соответственно 5 и 8, а площадь треугольника *BCP* равна 10.

Ответ.
25

Решение.
Пусть площади параллелограммов *ABPM* и *DCPN*, треугольника *BCP* и четырехугольника *MPNE* равны соответственно S_1, S_2, S_3 и S_4. По условию $AM \parallel BP$ и $PN \parallel CD$. Значит, $AE \parallel BN \parallel CD$. Аналогично, $DE \parallel CM \parallel AB$. Тогда *MPNE* – также параллелограмм, и потому $S_4 : S_1 = NP : PB$ (параллелограммы *ABPM* и *MPNE* имеют равные высоты). Так же равные высоты имеют треугольник *BCP* и параллелограмм *DCPN*, поэтому $S_3 : S_2 = \frac{1}{2} BP : PN$. Перемножая написанные равенства получаем: $\frac{S_4}{S_1} \cdot \frac{S_3}{S_2} = \frac{1}{2}$. Значит, $S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = S_1 + S_2 + S_3 + \frac{S_1 S_2}{2S_3} = 25$.

15. В классе все дети разного роста. Учитель физкультуры хочет построить всех детей класса в шеренгу так, чтобы в шеренге все мальчики стояли по росту (слева – самый высокий мальчик), и все девочки также стояли по росту (слева – самая высокая девочка). Сколькими способами учитель может это сделать, если в классе param1 мальчиков и param2 девочек?

In a class all children are of pairwise different height. Physical education teacher wants to arrange them in a row so that all the boys would stand in increasing order of height (from left to right) and all the girls would stand in increasing order of height (from left to right). Find the number of ways to arrange the children under this condition if there are param1 boys and param2 girls in this class.

param1	param2	Ответ
12	9	293930
11	8	75582

9	13	497420
8	12	125970
11	11	705432

Условие.

В классе все дети разного роста. Учитель физкультуры хочет построить всех детей класса в шеренгу так, чтобы в шеренге все мальчики стояли по росту (слева – самый высокий мальчик), и все девочки также стояли по росту (слева – самая высокая девочка). Сколькими способами учитель может это сделать, если в классе 12 мальчиков и 9 девочек?

Ответ.

293930

Решение.

Всего в шеренге будет стоять 12+9=21 ребёнок. Заметим, что искомое количество равно количеству способов выбрать в этой шеренге места только для мальчиков. Тогда все дети автоматически по росту станут в шеренгу. Значит, искомое число способов равно $C_{21}^{12} = 293930$.

16. Найдите натуральное число n, для которого выполняется равенство param1.

Find a positive integer *n* that satisfy equation param1.

param1	Ответ
$\frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdot\ldots\cdot\frac{n^3-1}{n^3+1}=\frac{601}{900}$	24
$\frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdot\ldots\cdot\frac{n^3-1}{n^3+1}=\frac{703}{1053}$	26
$\frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdot\ldots\cdot\frac{n^3-1}{n^3+1}=\frac{757}{1134}$	27
$\frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdot\ldots\cdot\frac{n^3-1}{n^3+1}=\frac{871}{1305}$	29
$\frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdot\ldots\cdot\frac{n^3-1}{n^3+1}=\frac{331}{496}$	31

Условие.

Найдите натуральное число n, для которого выполняется равенство $\frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdot\ldots\cdot\frac{n^3-1}{n^3+1}=\frac{601}{900}$.

Ответ.

24

Решение.

Преобразуем левую часть равенства:

$$\frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdot\ldots\cdot\frac{n^3-1}{n^3+1}=\frac{(2-1)(2^2+2+1)}{(2+1)(2^2-2+1)}\cdot\frac{(3-1)(3^2+3+1)}{(3+1)(3^2-3+1)}\cdot\ldots\cdot\frac{(n-1)(n^2+n+1)}{(n+1)(n^2-n+1)}.$$

Воспользуемся тождеством: $(m+1)^2-(m+1)+1=m^2+m+1$, из которого следует, что неполные квадраты сумм и разностей, за исключением наибольшего и наименьшего – сокращаются. Поэтому получаем уравнение $\frac{2-1}{2+1}\cdot\frac{3-1}{3+1}\cdot\ldots\cdot\frac{n-1}{n+1}\cdot\frac{n^2+n+1}{2^2-2+1}=\frac{601}{900}$, или $\frac{1\cdot 2}{n(n+1)}\cdot\frac{n^2+n+1}{2^2-2+1}=\frac{601}{900}$, откуда $\frac{n^2+n+1}{n(n+1)}=\frac{601}{600}$, то есть $n(n+1)=600$. Значит, $n=24$, поскольку n – натуральное число.

17. Разность квадратов двух различных действительных чисел в param1 раз больше разности этих чисел, а разность кубов этих чисел в param2 раз больше разности этих чисел. Во сколько раз разность четвертых степеней этих чисел больше разности квадратов этих чисел?

The difference between the squares of two different real numbers is param1 times greater than the difference between these numbers. The difference between the cubes of these numbers is param2 times greater than the difference between these numbers. Find the ratio of difference between the fourth powers of these numbers to the difference between squares of these numbers.

param1	param2	Ответ
37	1069	769
40	1209	818
37	1039	709
40	1201	802
31	741	521

Условие.
Разность квадратов двух различных действительных чисел в 37 раз больше разности этих чисел, а разность кубов этих чисел в 1069 раз больше разности этих чисел. Во сколько раз разность четвертых степеней этих чисел больше разности квадратов этих чисел?

Ответ.
769

Решение.
Из равенств $a^2-b^2=k(a-b)$ и $a^3-b^3=m(a-b)$ (в задаче k = 37, m = 1069) следует, что $a+b=k$ и $a^2+ab+b^2=m$. Возведя первое равенство в квадрат и вычтя из него второе, получим: $ab=k^2-m$. Но тогда отношение
$(a^4-b^4):(a^2-b^2)=a^2+b^2=m-ab=2m-k^2$=769.