1. Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют системе неравенств $\begin{cases} |4y-3x+12| \le 12, \\ (|x|-4)^2+(|y|-3)^2 \le 1 \end{cases}$ и найдите площадь полученной фигуры.

Ответ. $\frac{3\pi}{2}$.

Решение. Второе неравенство системы задаёт четыре круга радиуса 1 с центрами в точках $A(-4;3)$, $B(4;3)$, $C(4;-3)$, $D(-4;-3)$. Второе неравенство определяет полосу между параллельными прямыми $y=\frac{3x}{4}$ и $y=\frac{3x}{4}-6$. При этом прямая $y=\frac{3x}{4}$ проходит через точки B и D, а прямая $y=\frac{3x}{4}-6$ – через точку C.

Множество точек, задаваемых системой – это три полукруга радиуса 1, поэтому площадь равна $\frac{3\pi}{2}$.

2. Решите уравнение $\sqrt{2+\sqrt{6}-\left(6\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)\cos x}=2\cos x-\sqrt{2}$.

Ответ. $x=\pm\frac{\pi}{6}+2k\pi,\ k\in Z$.

Решение. Данное уравнение равносильно следующему:

$$\begin{cases} 2+\sqrt{6}-\left(6\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)\cos x=\left(2\cos x-\sqrt{2}\right)^2, \\ 2\cos x-\sqrt{2}\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\cos^2 x-2\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\cos x-\sqrt{6}=0, \\ \cos x \ge \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Значит, $x=\pm\frac{\pi}{6}+2k\pi,\ k\in Z$.

3. Решите неравенство $\log_{\frac{3x-6}{3x+5}}(3x-9)^{10}\ge -10\log_{\frac{3x+5}{3x-6}}(3x+6)$.

Ответ. $x\in\left(-2;-\frac{5}{3}\right)\cup(2;3)\cup(3;+\infty)$.

Решение. ОДЗ задаётся неравенствами $\frac{3x-6}{3x+5}>0$, $\frac{3x-6}{3x+5}\ne 1$, $3x+6>0$, $3x-9\ne 0$, откуда $x\in\left(-2;-\frac{5}{3}\right)\cup(2;3)\cup(3;+\infty)$. На ОДЗ неравенство равносильно следующему:

$$\log_{\frac{3x-6}{3x+5}}(3x-9)^{10}\ge\log_{\frac{3x-6}{3x+5}}(3x+6)^{10}\Leftrightarrow\left(\frac{3x-6}{3x+5}-1\right)\left((3x-9)^{10}-(3x+6)^{10}\right)\ge 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{-11}{3x+5}\left((3x-9)^2-(3x+6)^2\right)\ge 0\Leftrightarrow\frac{-11}{3x+5}(6x-3)(-15)\ge 0\Leftrightarrow x\in\left(-\infty;-\frac{5}{3}\right)\cup\left[\frac{1}{2};+\infty\right).$$

С учётом ОДЗ получаем $x\in\left(-2;-\frac{5}{3}\right)\cup(2;3)\cup(3;+\infty)$.

4. Одна из боковых сторон трапеции перпендикулярна основаниям и равна $2R$. На этой стороне как на диаметре построена окружность, которая делит другую боковую сторону на три отрезка. Отношение длин этих отрезков равно $7:21:27$ (считая от верхнего основания). Найдите площадь трапеции.

Ответ. $S=\frac{100R^2}{11\sqrt{21}}$

Решение. Обозначим данную трапецию $ABCD$ ($AD=2R$, AB – верхнее основание, точки P и Q – точки пересечения окружности с боковой стороной BC, $BP:PQ:QC=7:21:27$) и пусть $BP=7x$. Тогда $PQ=21x$, $QC=27x$, а по теореме о касательной и секущей находим, что $BA=\sqrt{BP\cdot BQ}=14x$, $CD=\sqrt{CQ\cdot CP}=36x$.

Пусть BH – высота трапеции. Тогда $CH = CD - AB = 22x$ и по теореме Пифагора для треугольника BCH получаем $(55x)^2 = (2R)^2 + (22x)^2$, откуда $x = \frac{2R}{11\sqrt{21}}$. Тогда площадь трапеции равна $S = \frac{AB + CD}{2} \cdot AD = 50xR = \frac{100R^2}{11\sqrt{21}}$.

5. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin^8 x + 8\cos^8 x$.

Ответ. $g_{\min} = \frac{8}{27}$, $g_{\max} = 8$.

Решение. Находим производную: $g'(x) = 8\sin^7 x \cos x - 64\cos^7 x \sin x = 8\sin x \cos x\left(\sin^6 x - 8\cos^6 x\right)$. Критические точки данной функции являются корнями уравнений $\sin x = 0$, $\cos x = 0$ и $\sin^6 x = 8\cos^6 x$, откуда $x = k®$, $x = \frac{®}{2} + k®$, $x = \pm \operatorname{arctg}\sqrt{2} + k®$, $k \in Z$.

Если $x = k®$, то $g(x) = 8$.

Если $x = \frac{®}{2} + k®$, то $g(x) = 1$.

Если $x = \pm \operatorname{arctg}\sqrt{2} + k®$, то $|\sin x| = \sqrt{\frac{2}{3}}$, $|\cos x| = \frac{1}{\sqrt{3}}$, следовательно, $g(x) = \frac{16}{81} + 8 \cdot \frac{1}{81} = \frac{8}{27}$.

Значит, $g_{\min} = \frac{8}{27}$, $g_{\max} = 8$.

6. Принятых в университет первокурсников распределили по учебным группам так, что в каждой группе было одинаковое число студентов. В связи с сокращением числа специальностей число групп уменьшилось на 9, всех первокурсников вновь распределили по группам; при этом группы снова получились равные по численности и в каждой из них менее 30 студентов. Известно, что всего было 2376 первокурсников. Сколько стало групп?

Ответ. 99.

Решение. Пусть новое число групп равно n, тогда изначально было $(n+9)$ групп. В каждой группе было равное число студентов, поэтому $2376 \vdots n$ и $2376 \vdots (n+9)$. Раскладываем 2376 на простые множители ($2376 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 11$) и выписываем все делители: 1, 2, 4, 8, 3, 6, 12, 24, 9, 18, 36, 72, 27, 54, 108, 216, 11, 22, 44, 88, 33, 66, 132, 264, 99, 198, 396, 792, 297, 594, 1188, 2376. По условию группы стали содержать менее 30 студентов, откуда $\frac{2376}{n} < 30 \Leftrightarrow n > 79{,}2$. Значит, нужно найти среди делителей числа 2376 два таких, которые отличаются друг от друга на 9 и больше 79. Это 99 и 108. Следовательно, $n = 99$.

7. Три параллельные прямые в точках K, L и M касаются сферы с центром в точке O. Известно, что радиус сферы равен 5, площадь треугольника OKL равна 12, а площадь треугольника KLM больше 30. Найдите угол KML.

Ответ. $\angle KML = \arccos\frac{3}{5}$.

Решение. Если прямая касается сферы, то плоскость, проходящая через центр сферы перпендикулярно этой прямой, проходит через точку касания. Рассмотрим плоскость $\sim$, проходящую через точку O перпендикулярно трём данным прямым. Сечение сферы плоскостью $\sim$ – окружность радиуса 5, проходящая через точки K, L и M. Обозначим высоту треугольника OKL, опущенную из вершины O через OH, а $\angle KOL = 2\sim$. Возможны два случая.

1) Точка M лежит на большей дуге KL. Площадь треугольника максимальна, если M лежит на прямой OH, и она равна $S_{\max} = \frac{1}{2} MH \cdot KL = (5 + OH)KH = (5 + 5\cos\sim)5\sin\sim = 25(1 + \cos\sim)\sin\sim$.

2) Точка M лежит на меньшей дуге KL. Площадь треугольника максимальна, если M лежит на прямой OH, и она равна $S_{\max} = \frac{1}{2} MH \cdot KL = (5 - OH)KH = (5 - 5\cos\sim)5\sin\sim = 25(1 - \cos\sim)\sin\sim$.

Площадь треугольника KOL равна $S_{KOL} = \frac{1}{2} OK \cdot OL \cdot \sin 2\sim = \frac{25}{2} \sin 2\sim$. По условию $S_{KOL} = 12$, поэтому $\sin 2\sim = \frac{24}{25}$. Тогда $\cos 2\sim = \pm\sqrt{1 - \frac{576}{625}} = \pm \frac{7}{25}$.

Если $\cos 2\sim = -\frac{7}{25}$, то $\cos^2 \sim = \frac{1 + \cos 2\sim}{2} = \frac{9}{25}$, $\cos \sim = \frac{3}{5}$, $\sin \sim = \frac{4}{5}$. Тогда в первом случае $S_{\max} = 25 \cdot \frac{8}{5} \cdot \frac{4}{5} = 32$, а во втором случае – $S_{\max} = 25 \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{5} = 8$. Возможен только первый случай. Тогда $\angle KML = \sim = \arccos \frac{3}{5}$.

Если $\cos 2\sim = \frac{7}{25}$, то $\cos^2 \sim = \frac{1 + \cos 2\sim}{2} = \frac{16}{25}$, $\cos \sim = \frac{4}{5}$, $\sin \sim = \frac{3}{5}$. Тогда в первом случае $S_{\max} = 25 \cdot \frac{9}{5} \cdot \frac{3}{5} = 27$, а во втором случае – $S_{\max} = 25 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{5} = 3$. Оба варианта невозможны.

Значит, $\angle KML = \arccos \frac{3}{5}$.

8. Известно, что уравнение $2x^3 - 7x^2 + 7x + p = 0$ имеет три различных корня, причём эти корни образуют геометрическую прогрессию. Найдите p и решите это уравнение.

Ответ. $p = -2$; корни уравнения: $x = 1$, $x = \frac{1}{2}$, $x = 2$.

Решение. Пусть x, kx, $k^2 x$ – корни данного уравнения, при этом $x \neq 0$, $k \neq 0$, $k \neq \pm 1$ (так как корни различны). Из теоремы Виета следует, что

$$\begin{cases} x + kx + k^2 x = \frac{7}{2}, \\ kx^2 + k^2 x^2 + k^3 x^2 = \frac{7}{2}, \\ k^3 x^3 = -\frac{p}{2}. \end{cases}$$

Разделив второе уравнение этой системы на первое, получаем $kx = 1$. Тогда третье уравнение даёт $p = -2$. Исходное уравнение принимает вид $2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = 0$, откуда $2(x-1)(x^2 + x + 1) - 7x(x-1) = 0$, $(x-1)(2x^2 - 5x + 2) = 0$. Значит, $x = 1$, $x = \frac{1}{2}$ или $x = 2$.

1. Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют системе неравенств $\begin{cases} |3y+5x-15| \le 15, \\ (|x|-3)^2 + (|y|-5)^2 \le 1 \end{cases}$ и найдите площадь полученной фигуры.

Ответ. $\frac{3\pi}{2}$.

Решение. Второе неравенство системы задаёт четыре круга радиуса 1 с центрами в точках $A(-3;5)$, $B(3;5)$, $C(3;-5)$, $D(-3;-5)$. Второе неравенство определяет полосу между параллельными прямыми $y=-\frac{5x}{3}$ и $y=10-\frac{5x}{3}$. При этом прямая $y=-\frac{5x}{3}$ проходит через точки A и C, а прямая $y=10-\frac{5x}{3}$ – через точку B.

Множество точек, задаваемых системой – это три полукруга радиуса 1, поэтому площадь равна $\frac{3\pi}{2}$.

2. Решите уравнение $\sqrt{3+4\sqrt{6}-\left(16\sqrt{3}-8\sqrt{2}\right)\sin x} = 4\sin x - \sqrt{3}$.

Ответ. $x=(-1)^k \frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathrm{Z}$.

Решение. Данное уравнение равносильно следующему:

$$\begin{cases} 3+4\sqrt{6}-\left(16\sqrt{3}-8\sqrt{2}\right)\sin x = \left(4\sin x-\sqrt{3}\right)^2, \\ 4\sin x-\sqrt{3} \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\sin^2 x + 2\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\sin x - \sqrt{6} = 0, \\ \sin x \ge \frac{\sqrt{3}}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Значит, $x=(-1)^k \frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathrm{Z}$.

3. Решите неравенство $\log_{\frac{2x+4}{2x-1}} (x+7)^8 \ge -8\log_{\frac{2x-1}{2x+4}} (2-x)$.

Ответ. $x \in (-\infty;-7) \cup \left(-7;-\frac{5}{2}\right] \cup \left(\frac{1}{2};2\right)$.

Решение. ОДЗ задаётся неравенствами $\frac{2x+4}{2x-1} > 0$, $\frac{2x+4}{2x-1} \ne 1$, $2-x>0$, $x+7 \ne 0$, откуда $x \in (-\infty;-7) \cup (-7;-2) \cup \left(\frac{1}{2};2\right)$. На ОДЗ неравенство равносильно следующему:

$$\log_{\frac{2x+4}{2x-1}} (x+7)^8 \ge \log_{\frac{2x+4}{2x-1}} (2-x)^8 \Leftrightarrow \left(\frac{2x+4}{2x-1}-1\right)\left((x+7)^8-(2-x)^8\right) \ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{2x-1}\left((x+7)^2-(x-2)^2\right) \ge 0 \Leftrightarrow \frac{5}{2x-1}(2x+5)\cdot 9 \ge 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty;-\frac{5}{2}\right] \cup \left(\frac{1}{2};+\infty\right).$$

С учётом ОДЗ получаем $x \in (-\infty;-7) \cup \left(-7;-\frac{5}{2}\right] \cup \left(\frac{1}{2};2\right)$.

4. Одна из боковых сторон трапеции перпендикулярна основаниям и равна $2R$. На этой стороне как на диаметре построена окружность, которая делит другую боковую сторону на три отрезка. Отношение длин этих отрезков равно $12:15:5$ (считая от нижнего основания). Найдите площадь трапеции.

Ответ. $S=\frac{7R^2}{\sqrt{15}}$.

Решение. Обозначим данную трапецию $ABCD$ ($AD=2R$, AB – верхнее основание, точки P и Q – точки пересечения окружности с боковой стороной BC, $BP:PQ:QC=5:15:12$) и пусть $BP=5x$. Тогда $PQ=15x$, $QC=12x$, а по теореме о касательной и секущей находим, что $BA=\sqrt{BP\cdot BQ}=10x$, $CD=\sqrt{CQ\cdot CP}=18x$.

Пусть BH – высота трапеции. Тогда $CH = CD - AB = 8x$ и по теореме Пифагора для треугольника BCH получаем $(32x)^2 = (2R)^2 + (8x)^2$, откуда $x = \frac{R}{4\sqrt{15}}$. Тогда площадь трапеции равна $S = \frac{AB + CD}{2} \cdot AD = 28xR = \frac{7R^2}{\sqrt{15}}$.

5. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = 27\sin^8 x + 8\cos^8 x$.

Ответ. $g_{\min} = \frac{432}{125}$, $g_{\max} = 27$.

Решение. Находим производную: $g'(x) = 27 \cdot 8\sin^7 x\cos x - 64\cos^7 x\sin x = 8\sin x\cos x\left(27\sin^6 x - 8\cos^6 x\right)$. Критические точки данной функции являются корнями уравнений $\sin x = 0$, $\cos x = 0$ и $27\sin^6 x = 8\cos^6 x$, откуда $x = k\text{®}$, $x = \frac{\text{®}}{2} + k\text{®}$, $x = \pm \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{2}{3}} + k\text{®}$, $k \in \mathrm{Z}$.

Если $x = k\text{®}$, то $g(x) = 8$.

Если $x = \frac{\text{®}}{2} + k\text{®}$, то $g(x) = 27$.

Если $x = \pm \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{2}{3}} + k\text{®}$, то $|\sin x| = \sqrt{\frac{2}{5}}$, $|\cos x| = \sqrt{\frac{3}{5}}$, следовательно, $g(x) = 27 \cdot \frac{8}{125} + 8 \cdot \frac{27}{125} = \frac{432}{125}$.

Значит, $g_{\min} = \frac{432}{125}$, $g_{\max} = 27$.

6. Принятых в университет первокурсников распределили по учебным группам так, что в каждой группе было одинаковое число студентов. В связи с сокращением числа специальностей число групп уменьшилось на 4, всех первокурсников вновь распределили по группам; при этом группы снова получились равные по численности и в каждой из них менее 30 студентов. Известно, что всего было 2808 первокурсников. Сколько стало групп?

Ответ. 104.

Решение. Пусть новое число групп равно n, тогда изначально было $(n+4)$ групп. В каждой группе было равное число студентов, поэтому $2808 \vdots n$ и $2808 \vdots (n+4)$. Раскладываем 2808 на простые множители ($2376 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 11$) и выписываем все делители: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 13, 18, 24, 26, 27, 36, 39, 52, 54, 72, 78, 104, 108, 117, 156, 216, 234, 312, 351, 468, 702, 936, 1404, 2808. По условию группы стали содержать менее 30 студентов, откуда $\frac{2808}{n} < 30 \Leftrightarrow n > 93{,}6$. Значит, нужно найти среди делителей числа 2376 два таких, которые отличаются друг от друга на 4 и больше 93. Это 104 и 108. Следовательно, $n = 104$.

7. Три параллельные прямые в точках K, L и M касаются сферы с центром в точке O. Известно, что радиус сферы равен $5\sqrt{2}$, площадь треугольника OKL равна 7, а площадь треугольника KLM больше 50. Найдите угол KML.

Ответ. $\angle KML = \arccos\frac{1}{5\sqrt{2}}$.

Решение. Если прямая касается сферы, то плоскость, проходящая через центр сферы перпендикулярно этой прямой, проходит через точку касания. Рассмотрим плоскость $\sim$, проходящую через точку O перпендикулярно трём данным прямым. Сечение сферы плоскостью $\sim$ – окружность радиуса 5, проходящая через точки K, L и M. Обозначим высоту треугольника OKL, опущенную из вершины O через OH, а $\angle KOL = 2\sim$. Возможны два случая.

1) Точка M лежит на большей дуге KL. Площадь треугольника максимальна, если M лежит на прямой OH, и она равна

$$S_{\max} = \frac{1}{2}MH \cdot KL = \left(5\sqrt{2} + OH\right)KH = \left(5\sqrt{2} + 5\sqrt{2}\cos\sim\right)5\sqrt{2}\sin\sim = 50(1 + \cos\sim)\sin\sim .$$

2) Точка M лежит на меньшей дуге KL. Площадь треугольника максимальна, если M лежит на прямой OH, и она равна

$$S_{\max} = \frac{1}{2} MH \cdot KL = (5 - OH)KH = \left(5\sqrt{2} - 5\sqrt{2}\cos\alpha\right)5\sqrt{2}\sin\alpha = 50(1 - \cos\alpha)\sin\alpha .$$

Площадь треугольника KOL равна $S_{KOL} = \frac{1}{2} OK \cdot OL \cdot \sin 2\alpha = 25\sin 2\alpha$. По условию $S_{KOL} = 7$, поэтому $\sin 2\alpha = \frac{7}{25}$. Тогда $\cos 2\alpha = \pm\sqrt{1 - \frac{49}{625}} = \pm\frac{24}{25}$.

Если $\cos 2\alpha = -\frac{24}{25}$, то $\cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} = \frac{1}{50}$, $\cos\alpha = \frac{1}{5\sqrt{2}}$, $\sin\alpha = \frac{7}{5\sqrt{2}}$. Тогда в первом случае $S_{\max} = 50 \cdot \left(1 + \frac{1}{5\sqrt{2}}\right) \cdot \frac{7}{5\sqrt{2}} = 35\sqrt{2} + 7$, а во втором случае – $S_{\max} = 50 \cdot \left(1 - \frac{1}{5\sqrt{2}}\right) \cdot \frac{7}{5\sqrt{2}} = 35\sqrt{2} - 7$.

Возможен только первый случай. Тогда $\angle KML = \alpha = \arccos\frac{1}{5\sqrt{2}}$.

Если $\cos 2\alpha = \frac{24}{25}$, то $\cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} = \frac{49}{50}$, $\cos\alpha = \frac{7}{5\sqrt{2}}$, $\sin\alpha = \frac{1}{5\sqrt{2}}$. Тогда в первом случае $S_{\max} = 50 \cdot \left(1 + \frac{7}{5\sqrt{2}}\right) \cdot \frac{1}{5\sqrt{2}} = 5\sqrt{2} + 7$, а во втором случае – $S_{\max} = 50 \cdot \left(1 - \frac{7}{5\sqrt{2}}\right) \cdot \frac{1}{5\sqrt{2}} = 5\sqrt{2} - 7$. Оба варианта невозможны.

Значит, $\angle KML = \arccos\frac{1}{5\sqrt{2}}$.

8. Известно, что уравнение $x^3 + 7x^2 + 14x - p = 0$ имеет три различных корня, причём эти корни образуют геометрическую прогрессию. Найдите p и решите это уравнение.

Ответ. $p = -8$; корни уравнения: $x = -1$, $x = -2$, $x = -4$.

Решение. Пусть x, kx, $k^2 x$ – корни данного уравнения, при этом $x \neq 0$, $k \neq 0$, $k \neq \pm 1$ (так как корни различны). Из теоремы Виета следует, что

$$\begin{cases} x + kx + k^2 x = -7, \\ kx^2 + k^2 x^2 + k^3 x^2 = 14, \\ k^3 x^3 = p. \end{cases}$$

Разделив второе уравнение этой системы на первое, получаем $kx = -2$. Тогда третье уравнение даёт $p = -8$. Исходное уравнение принимает вид $x^3 + 7x^2 + 14x + 8 = 0$, откуда $(x+2)\left(x^2 - 2x + 4\right) + 7x(x+2) = 0$, $(x+2)\left(x^2 + 5x + 4\right) = 0$. Значит, $x = -1$, $x = -2$ или $x = -4$.