olimp.tech

# МЕЖДИСЦИПЛИНАРНАЯ МНОГОПРОФИЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА «ТЕХНОЛОГИЧЕСКОЕ ПРЕДПРИНИМАТЕЛЬСТВО»

**Профиль «Новые технологии»**

**Очный этап**

**Задания для 10-11 класса**

### *1. Решить задачу (Максимум 3 баллов)*

Удельная поверхность открытых одностенных углеродных нанотрубок в 1 г материала равна 1000 м²/г, а плотность составляет 1.3 г/см³. Считая, что у всего материала отношение объема к поверхности – такое же, как и у одной трубки, оцените диаметр нанотрубки.

**Решение**

Найдем объем материала:

$V = \frac{m}{\rho} = \frac{1}{1,3} = 0,77$ см³ = $7.7 \cdot 10^{-7}$ м³,

Площадь поверхности, по условию, составляет 1000 м².

Найдем отношение объема к поверхности:

$V / S = 7.7 \cdot 10^{-7}$ м³ / 1000 м² = $7.7 \cdot 10^{-10}$ м.

Открытые одностенные нанотрубки можно представить в виде цилиндра диаметром $d$ и длиной $l$. Для цилиндра отношение объема к поверхности равно:

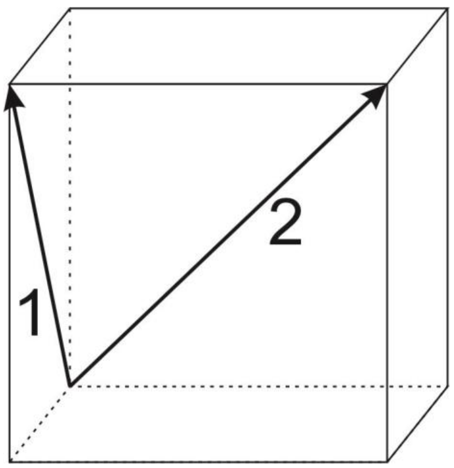
$$\frac{V}{S} = \frac{\left(\frac{\pi d^2}{4}\right) l}{\pi d l} = \frac{d}{4}$$

Отсюда $d = 4 \cdot 7.7 \cdot 10^{-10} = 3.1 \cdot 10^{-9}$ м ≈ **3 нм**.

На самом деле, у материала отношение $V/S$ больше, чем у одной трубки, так как трубки не могут плотно заполнить весь объем, и между ними существует свободное пространство. Поэтому реальный диаметр таких нанотрубок – меньше, чем 3 нм.

### *2. Решить задачу (Максимум 3 баллов)*

Из физики известно, что все кристаллические материалы состоят из мельчайших повторяющихся элементов, называемых элементарными ячейками. На представленном ниже рисунке изображена элементарная ячейка кубического кристалла (к таким, например, относятся, чистое железо, никель, алюминий, поваренная соль и д.р). С целью упрощения показаны только контуры ячейки, но не показаны располагающиеся в ней атомы. Одна из часто встречающихся задач в физике кристаллов заключается в определении углов между направлениями и плоскостями кристаллов. В данной задаче необходимо найти угол между направлениями в кристалле, которые показаны жирными стрелками.




**Решение**

Так как в условии задачи задан куб, то, приняв грань за *a* диагональ одной из граней (вектор 1) равна $a*\sqrt{2}$.

Тогда диагональ куба равна $a*\sqrt{3}$

Имеем длины сторон образованного треугольника $a$, $a*\sqrt{2}$, $a*\sqrt{3}$.

Чтобы найти угол *a*, образованный векторами 1 и 2, воспользуемся теоремой косинусов.

$a^2 = 2*a^2+3*a^2-2* a*\sqrt{2}* a*\sqrt{3}*\cos(a)$

$\cos(a) = \sqrt{\frac{2}{3}}$, значит $a = \arccos(\sqrt{\frac{2}{3}})$.

**Ответ**

$\arccos(\sqrt{\frac{2}{3}})$.

***3. Решить задачу (Максимум 6 баллов)***

Поверхность какой площади можно покрыть 1 мг полония толщиной в один атомный слой? Считать известными справочные данные: кристаллический полоний имеет простую кубическую решетку; атомная масса полония $\mu = 210$ г/моль; плотность полония 9.4 г/см$^3$; число Авогадро $N_A = 6.022*10^{23}$ моль$^{-1}$.

**Решение**

Вычислим объем, приходящийся на 1 атом полония, и длину ребра простой кубической ячейки, содержащейся в одном атоме

$$v = \frac{\mu}{N_A\rho}; \qquad a = \sqrt[3]{v} = \left(\frac{\mu}{N_A\rho}\right)^{\frac{1}{3}} \approx 3{,}335 * 10^{-8} \text{ см.}$$

Вычислим объем полония массой $m$

$$V = {}^{m}/_{\rho} \approx 1{,}064 * 10^{-4} \text{ см}^3$$

Площадь поверхности, покрытой полонием толщиной в один атомный слой:

$$S = \frac{V}{a} = \frac{m}{\rho} * \left(\frac{N_A\rho}{\mu}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{10^{-3}}{9.4} * \left(\frac{6.022*10^{23}*9.4}{210}\right)^{\frac{1}{3}} \approx 3200 \text{ см}^2$$

**Ответ**

Площадь поверхности, покрытой 1 мг полония толщиной в 1 атомный слой, примерна равна 3200 см$^2$.

***4. Решить задачу (Максимум 6 баллов)***

Предохранитель из свинцовой проволоки, площадь сечения которой $S_1$=0,2мм$^2$, поставлен в сеть, проложенную медным проводом с площадью поперечного сечения $S_2$=2мм$^2$. При коротком замыкании сила тока достигает значения 30А. Удельная теплоемкость свинца $c_1$=134 Дж/(кг*К), меди $c_2$=381 Дж/(кг*К). Удельное сопротивление свинца равно 0,22мкОм*м, меди – 0,017мкОм*м. Плотность свинца $D_1$=11300кг/м3, меди $D_2$=8900кг/м3. Температура плавления свинца $t_{пл}$=327$^0$C. Температура медных проводов до замыкания $t_0$=20$^0$ С. Через какое время τ после короткого замыкания начнет плавиться свинцовый предохранитель?

Насколько за это время нагреются медные провода? Потерями энергии вследствие теплопроводности пренебречь.

**Решение:**

Количество теплоты, выделяющееся на проволоке предохранителя $Q_1 = I^2 \frac{\rho_1 L}{S_1}\tau$.

Количество теплоты, необходимое для нагревания этой проволоки до температуры плавления, $Q_2 = c_1 D_1 L S_1(t_{пл} - t_0)$. $\qquad Q_1 = Q_2$

С учетом этого получим

$$\tau = \frac{c_1 D_1 S_1^2}{I^2 \rho_1}(t_{пл} - t_0) = 0{,}09\text{c}$$

Уравнение для расчета нагревания медного провода имеют такой же вид.

$$t - t_0 = \frac{I^2 \rho_2}{c_2 D_2 S_2^2}\tau = \frac{c_1 D_1 S_1^2 \rho_1}{c_2 D_2 S_2^2 \rho_1}(t_{пл} - t_0) = 0{,}1^0\text{C}.$$

**Ответ**

Провода нагреются на $0{,}1^0$C.

olimp.tech

***5. Решить задачу (Максимум 7 баллов)***

Предприятие выпускает два вида мебели столы и тумбочки. Процесс отделки мебели состоит из этапов:

1) грунтование;
2) крашение;
3) лакирование.

На грунтование одного стола тратится 15 минут, на крашение – 30 минут и лакирование – 30 минут, а затем, продав его, получают прибыль 60 условных денежных единиц. При отделке одной тумбочки на грунтование тратится 30 минут, на крашение – 30 минут и лакирование – 15 минут, продав ее, получают прибыль 45 условных денежных единиц.

Найдите наибольшую прибыль от продажи мебели, если одновременно можно отделывать не более одного изделия и укажите, какое количество столов и тумбочек можно изготовить, если на грунтование выделено 10 часов, на крашение – 12 часов и лакирование – 10 часов.

**Ответ:**

наибольшая прибыль 1320 условных денежных единиц, необходимо производить 16 столов и 8 тумбочек.

**Варианты решения задачи**

**Вариант 1 (методом подбора)**

Составим таблицу:

| | **Грунтование** | **Крашение** | **Лакирование** |
|---|---|---|---|
| **Столы** | 15 | 30 | 30 |
| **Тумбочки** | 30 | 30 | 15 |
| **Ресурс (время), минут** | $10 \cdot 60 = 600$ | $12 \cdot 60 = 720$ | $10 \cdot 60 = 600$ |

Заметим, что на крашение столов и тумбочек требуется одинаковое время, следовательно, максимально можно покрасить $720 : 30 = 24$ изделия.

Предположим, что изготавливается равное количество столов и тумбочек (12 и 12, может быть и другое начальное сочетание количества столов и тумбочек). Проверим, достаточно ли будет ресурса (время) на производство такого количества мебели:

грунтование $15 \cdot 12 + 30 \cdot 12 = 180 + 360 = 540 < 600;$

крашение $30 \cdot 12 + 30 \cdot 12 = 360 + 360 = 720 = 720;$

лакирование $30 \cdot 12 + 15 \cdot 12 = 360 + 180 = 540 < 600.$

Тогда, **прибыль** будет равна $60 \cdot 12 + 45 \cdot 12 = 720 + 540 = 1260$ условных денежных единиц.

Видим, что ресурс (время) на грунтование и лакирование используется не полностью, следовательно, возможно получили не наибольшую прибыль. Проверим это.

Предположим, что столов изготавливается 13 штук, тогда тумбочек – 11 штук. Проверим, достаточно ли будет ресурса (время) на производство такого количества мебели:

грунтование $15 \cdot 13 + 30 \cdot 11 = 195 + 330 = 525 < 600$;

крашение $30 \cdot 13 + 30 \cdot 11 = 390 + 330 = 720 = 720$;

лакирование $30 \cdot 13 + 15 \cdot 11 = 390 + 165 = 555 < 600$.

**Прибыль** в этом случае будет равна $60 \cdot 13 + 45 \cdot 11 = 780 + 495 = 1275$ условных денежных единиц.

Видим, что ресурс (время) на грунтование и лакирование опять используется не полностью, следовательно, возможно получили не наибольшую прибыль. Проверим это.

Аналогично проверяем, если столов изготавливается 14 штук, тогда тумбочек – 10 штук:

грунтование $15 \cdot 14 + 30 \cdot 10 = 210 + 300 = 510 < 600$;

крашение $30 \cdot 14 + 30 \cdot 10 = 420 + 300 = 720 = 720$;

лакирование $30 \cdot 14 + 15 \cdot 10 = 420 + 150 = 570 < 600$.

**Прибыль** - $60 \cdot 14 + 45 \cdot 10 = 840 + 450 = 1290$ условных денежных единиц.

Проверяем, если столов изготавливается 15 штук, тогда тумбочек – 9 штук:

грунтование $15 \cdot 15 + 30 \cdot 9 = 225 + 270 = 495 < 600$;

крашение $30 \cdot 15 + 30 \cdot 9 = 450 + 270 = 720 = 720$;

лакирование $30 \cdot 15 + 15 \cdot 9 = 450 + 135 = 585 < 600$.

**Прибыль** - $60 \cdot 15 + 45 \cdot 9 = 900 + 405 = 1305$ условных денежных единиц.

Проверяем, если столов изготавливается 16 штук, тогда тумбочек – 8 штук:

грунтование $15 \cdot 16 + 30 \cdot 8 = 240 + 240 = 480 < 600$;

крашение $30 \cdot 16 + 30 \cdot 8 = 480 + 240 = 720 = 720$;

лакирование $30 \cdot 16 + 15 \cdot 8 = 480 + 120 = 600 = 600$.

**Прибыль** - $60 \cdot 16 + 45 \cdot 8 = 960 + 360 = 1320$ **условных денежных единиц**.

Проверяем, если столов изготавливается 17 штук, тогда тумбочек – 7 штук:

грунтование $15 \cdot 17 + 30 \cdot 7 = 255 + 210 = 465 < 600$;

крашение $30 \cdot 17 + 30 \cdot 7 = 510 + 210 = 720 = 720$;

лакирование $30 \cdot 17 + 15 \cdot 7 = 510 + 105 = 615 > 600$.

Таким образом, если производить столов 17 штук, а тумбочек – 7 штук, время на крашение будет недостаточно $(615 > 600)$. Следовательно, более 16 столов изготавливать нельзя.

Выясним, если наоборот, столов будем производить 11 штук, а тумбочек 13 штук:

грунтование $15 \cdot 11 + 30 \cdot 13 = 165 + 390 = 555 < 600$;

крашение $30 \cdot 11 + 30 \cdot 13 = 330 + 390 = 720 = 720$;

лакирование $30 \cdot 11 + 15 \cdot 13 = 330 + 195 = 525 < 600$.

**Прибыль** - $60 \cdot 11 + 45 \cdot 13 = 660 + 585 = 1245$ условных денежных единиц.

Если столов будем производить 10 штук, а тумбочек 14 штук:

грунтование $15 \cdot 10 + 30 \cdot 14 = 105 + 420 = 525 < 600$;

крашение $30 \cdot 10 + 30 \cdot 14 = 300 + 420 = 720 = 720$;

лакирование $30 \cdot 10 + 15 \cdot 14 = 300 + 210 = 510 < 600$.

**Прибыль** - $60 \cdot 10 + 45 \cdot 14 = 600 + 630 = 1230$ условных денежных единиц.

Если столов будем производить 9 штук, а тумбочек 15 штук:

грунтование $15 \cdot 9 + 30 \cdot 15 = 135 + 450 = 585 < 600$;

крашение $30 \cdot 9 + 30 \cdot 15 = 270 + 450 = 720 = 720$;

лакирование $30 \cdot 9 + 15 \cdot 15 = 270 + 225 = 495 < 600$.

**Прибыль** - $60 \cdot 9 + 45 \cdot 15 = 540 + 675 = 1215$ условных денежных единиц.

Если столов будем производить 8 штук, а тумбочек 16 штук:

грунтование $15 \cdot 8 + 30 \cdot 16 = 120 + 480 = 600 = 600$;

крашение $30 \cdot 8 + 30 \cdot 16 = 240 + 480 = 720 = 720$;

лакирование $30 \cdot 8 + 15 \cdot 16 = 240 + 240 = 480 < 600$.

**Прибыль** - $60 \cdot 8 + 45 \cdot 16 = 480 + 720 = 1200$ условных денежных единиц.

Если столов будем производить 7 штук, а тумбочек 17 штук:

грунтование $15 \cdot 7 + 30 \cdot 17 = 105 + 510 = 615 > 600$.

Следовательно, если производить столов 7 штук, а тумбочек – 17 штук, то время на грунтование будет недостаточно $(615 > 600)$.

**Таким образом, наибольшая прибыль составит 1320 условных денежных единиц, если предприятие будет производить 16 столов и 8 тумбочек.**

**Вариант 2 (методом перебора вершин)**

Составим таблицу:

| | Грунтование | Крашение | Лакирование |
|---|---|---|---|
| **Столы** | 15 | 30 | 30 |
| **Тумбочки** | 30 | 30 | 15 |
| **Ресурс (время), минут** | $10 \cdot 60 = 600$ | $12 \cdot 60 = 720$ | $10 \cdot 60 = 600$ |

Пусть предприятие производит $x$ штук столов и $y$ штук тумбочек. Используя таблицу, запишем систему неравенств (время можно либо все использовать, либо недоиспользовать):

$$\begin{cases} 15x + 30y \le 600 \\ 30x + 30y \le 720 \\ 30x + 15y \le 600 \end{cases}, \text{ или } \begin{cases} x + 2y \le 40 \\ x + y \le 24 \\ 2x + y \le 40 \end{cases}.$$

Решим каждое неравенство на плоскости, а затем найдем общую область допустимых решений. Для этого запишем уравнения границ (прямых):

$$\begin{cases} x + 2y = 40 & (1) \\ x + y = 24 & (2) \\ 2x + y = 40 & (3) \end{cases}$$ и построим их на плоскости:

(1)

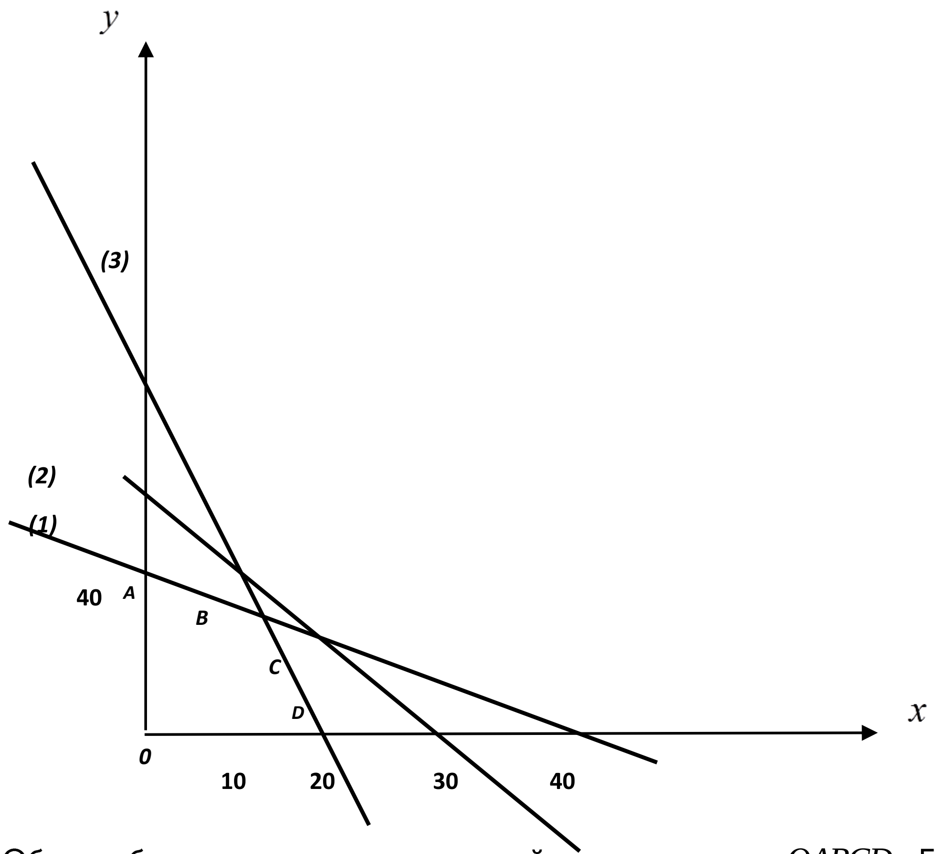
| $x$ | 0 | 40 |
|---|---|---|
| $y$ | 20 | 0 |

(2)

| $x$ | 0 | 24 |
|---|---|---|
| $y$ | 24 | 0 |

(3)

| $x$ | 0 | 20 |
|---|---|---|
| $y$ | 40 | 0 |




Общая область допустимых решений многоугольник $OABCD$. Если наилучшее решение существует, то оно достигается в угловой точке этого многоугольника. Решим задачу, сравнивая прибыль в каждой угловой точке, а для этого найдем координаты вершин многоугольника $OABCD$.

В точке *O(0;0)* очевидно, что решение наилучшим быть не может.

Точка $A = (1) \bigcap \text{оси } OY$: $\begin{cases} x + 2y = 40 \\ x = 0 \end{cases}$, следовательно, $\begin{cases} y = 20 \\ x = 0 \end{cases}$, т.е. $x = 0$ будет производиться столов, $y = 20$ штук будет производиться тумбочек. Тогда **прибыль** будет равна: $60 \cdot x + 45 \cdot y = 60 \cdot 0 + 45 \cdot 20 = 0 + 720 = 900$ условных денежных единиц.

Точка $B = (1) \bigcap (2)$: $\begin{cases} x + 2y = 40 \\ x + y = 24 \end{cases}$, следовательно, $\begin{cases} y = 16 \\ x = 8 \end{cases}$, т.е. $x = 8$ будет производиться столов, $y = 16$ штук будет производиться тумбочек. Тогда **прибыль** будет равна: $60 \cdot x + 45 \cdot y = 60 \cdot 8 + 45 \cdot 16 = 480 + 720 = 1200$ условных денежных единиц.

Точка $C=(2)\bigcap(3)$: $\begin{cases} x+y=24 \\ 2x+y=40 \end{cases}$, следовательно, $\begin{cases} y=8 \\ x=16 \end{cases}$, т.е. $x=16$ будет производиться столов, $y=8$ штук будет производиться тумбочек. Тогда **прибыль** будет равна: $60\cdot x+45\cdot y=60\cdot 16+45\cdot 8=960+360=1320$ условных денежных единиц.

Точка $D=(3)\bigcap оси\ OX$: $\begin{cases} 2x+y=40 \\ y=0 \end{cases}$, следовательно, $\begin{cases} y=0 \\ x=20 \end{cases}$, т.е. $x=20$ будет производиться столов, $y=0$ штук будет производиться тумбочек. Тогда **прибыль** будет равна: $60\cdot x+45\cdot y=60\cdot 20+45\cdot 0=1200+0=1200$ условных денежных единиц.

Следовательно, наибольшую **прибыль 1320 условных денежных единиц предприятие получит, если будет производить 16 столов и 8 тумбочек.**

**Вариант 3 (решение графическим методом)**

Составим таблицу:

| | **Грунтование** | **Крашение** | **Лакирование** |
|---|---|---|---|
| **Столы** | 15 | 30 | 30 |
| **Тумбочки** | 30 | 30 | 15 |
| **Ресурс (время), минуты** | $10\cdot 60=600$ | $12\cdot 60=720$ | $10\cdot 60=600$ |

Пусть предприятие производит $x$ штук столов и $y$ штук тумбочек. Используя таблицу, запишем систему неравенств:

$$\begin{cases} 15x+30y\le 600 \\ 30x+30y\le 720 \\ 30x+15y\le 600 \end{cases},\ \text{или}\ \begin{cases} x+2y\le 40 \\ x+y\le 24 \\ 2x+y\le 40 \end{cases}.$$

Решим каждое неравенство на плоскости, а затем найдем общую область допустимых решений. Для этого запишем уравнения границ (прямых):

$$\begin{cases} x+2y=40 & (1) \\ x+y=24 & (2) \\ 2x+y=40 & (3) \end{cases}$$ и построим их на плоскости:

(1)

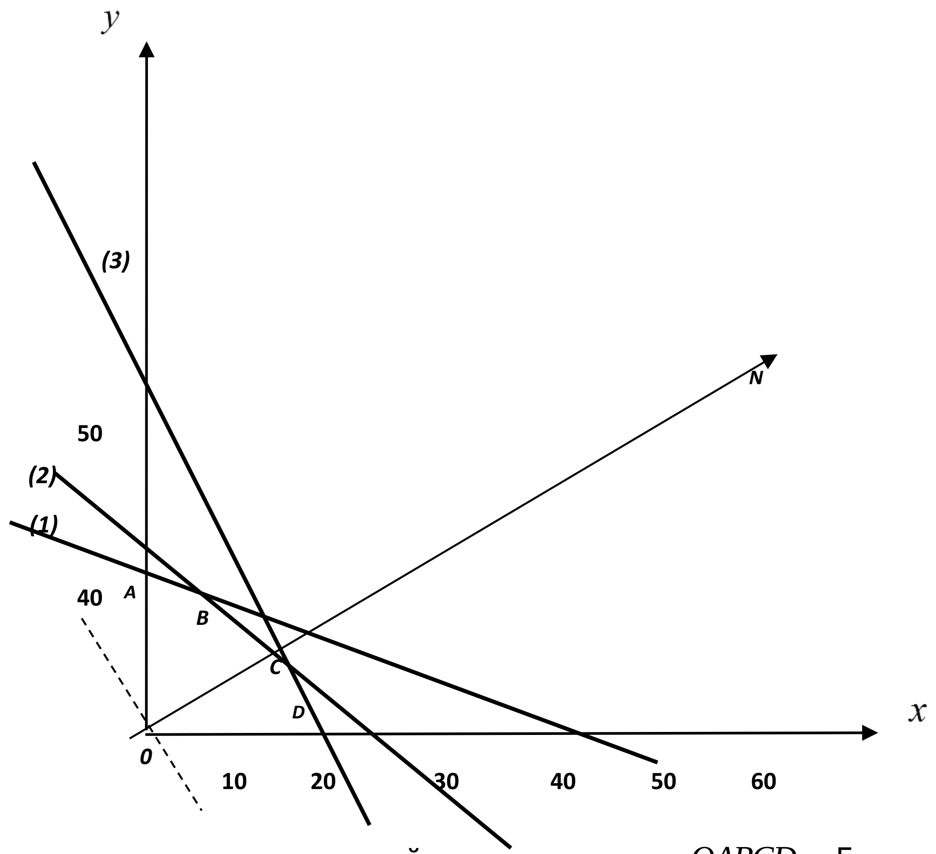
| | | |
|---|---|---|
| $x$ | 0 | 40 |
| $y$ | 20 | 0 |

(2)

| | | |
|---|---|---|
| $x$ | 0 | 24 |
| $y$ | 24 | 0 |

(3)

| | | |
|---|---|---|
| $x$ | 0 | 20 |
| $y$ | 40 | 0 |




Общая область допустимых решений многоугольник $OABCD$. Если наилучшее решение существует, то оно достигается в угловой точке этого многоугольника. Выясним, в какой точке будет наилучшее решение задачи.

Прибыль предприятия будет находиться как $60 \cdot x + 45 \cdot y$. Построим вектор $\overrightarrow{ON}$, проходящий через точки $O(0;0)$ и $N(60;45)$, и построим прямую $60 \cdot x + 45 \cdot y = 0$ (пунктирная линия на графике):

| | | | |
|---|---|---|---|
| $x$ | 0 | 15 | -15 |
| $y$ | 0 | -20 | 20 |

Прямая $60 \cdot x + 45 \cdot y = 0$ перпендикулярна вектору $\overrightarrow{ON}$. Перемещая прямую $60 \cdot x + 45 \cdot y = 0$ параллельно самой себе по направлению вектора $\overrightarrow{ON}$ (рост прибыли), найдем последнюю точку выхода из области допустимых решений. Это будет точка $C$. Найдем ее координаты:

$C = (2) \bigcap (3) : \begin{cases} x + y = 24 \\ 2x + y = 40 \end{cases}$, следовательно, $\begin{cases} y = 8 \\ x = 16 \end{cases}$, т.е. $x = 16$ **будет производиться столов,** $y = 8$ **штук будет производиться тумбочек. Тогда прибыль будет равна:** $60 \cdot x + 45 \cdot y = 60 \cdot 16 + 45 \cdot 8 = 960 + 360 = 1320$ **условных денежных единиц.**

**Вариант 4 (на смекалку)**

Составим таблицу:

| | Грунтование | Крашение | Лакирование |
|---|---|---|---|
| **Столы** | 15 | 30 | 30 |
| **Тумбочки** | 30 | 30 | 15 |
| **Ресурс (время), минуты** | $10 \cdot 60 = 600$ | $12 \cdot 60 = 720$ | $10 \cdot 60 = 600$ |

Обозначим через $x$ (штук) количество столов, производимых предприятием, через $y$ (штук) - тумбочек. Тогда, используя таблицу, можно записать систему неравенств:

$$\begin{cases} 15x + 30y \le 600 \\ 30x + 30y \le 720 \\ 30x + 15y \le 600 \end{cases}.$$

Учитывая, что прибыль найдется как $60 \cdot x + 45 \cdot y$, заметим, что если сложить второе и третье неравенства в системе, то получим: $60 \cdot x + 45 \cdot y \le 1320$. Следовательно, наибольшая прибыль 1320 условных денежных единиц. Найдем, при каких значениях $x$ и $y$ она достигается. Для этого решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 60x + 45y = 1320 \\ 30x + 15y = 600 \end{cases}, \text{ следовательно, } \begin{cases} x = 16 \\ y = 8 \end{cases}.$$

Таким образом, $x = 16$ **будет производиться столов**, $y = 8$ **штук будет производиться тумбочек. Прибыль при этом будет равна:** $60 \cdot x + 45 \cdot y = 60 \cdot 16 + 45 \cdot 8 = 960 + 360 = 1320$ **условных денежных единиц.**