Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации

Олимпиада школьников РАНХиГС по Экономике

2019 - 2020 учебный год

Заключительный (очный) этап

10 – 11 классы

1 вариант

Задание 1
Максимум 15 б

Решить уравнение

$$\sqrt{3+2\sqrt{3+2\sqrt{1+\frac{2}{\cos^2 x}}}}=\operatorname{tg}^2 x$$

Решение:

Поскольку $1+\operatorname{tg}^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$, постольку уравнение примет вид:

$$\sqrt{3+2\sqrt{3+2\sqrt{3+2\operatorname{tg}^2 x}}}=\operatorname{tg}^2 x.$$

Сделаем замену $a=\operatorname{tg}^2 x$, уравнение примет вид:

$$\sqrt{3+2\sqrt{3+2\sqrt{3+2a}}}=a.$$

Пусть $f(x)=\sqrt{3+2x}$, несложно понять, что уравнение имеет вид

$$f\left(f\left(f(a)\right)\right)=a.$$

Но $f(x)$ монотонно возрастает, следовательно, уравнение равносильно уравнению

$$f(a)=a \Leftrightarrow \sqrt{3+2a}=a \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-2a-3=0 \\ a\geq 0 \end{cases}$$

Отсюда $a = 3$. И $\operatorname{tg}^2 x = 3 \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $\pm\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Критерии проверки:

1. Все решено верно, переходы обоснованы – **15 баллов.**
2. Применен верный метод, нет достаточных объяснений, но получен верный ответ – **до 10 баллов.**
3. Применен верный метод, нет достаточных объяснений, ответ не получен – **до 5 баллов.**
4. В остальных случаях – **0 баллов.**

Задание 2
Максимум 15 б

Решить уравнение $2\sqrt{2}sin^3\left(\frac{\pi x}{4}\right) = cos\left(\frac{\pi}{4}(1-x)\right)$.

Сколько решений этого уравнения удовлетворяет условию:

$0 \le x \le 2020$?

Решение. Обозначим $t = \frac{\pi x}{4}$. Тогда уравнение приобретает вид

$2\sqrt{2}sin^3t = cos\left(\frac{\pi}{4} - t\right)$.

$2\sqrt{2}sin^3t = cos\frac{\pi}{4}cost + sin\frac{\pi}{4}sint$

$2\sqrt{2}sin^3t = \frac{\sqrt{2}}{2}cost + \frac{\sqrt{2}}{2}sint$

$4sin^3t = cost + sint$; $4sin^3t - sint = cost$

1 случай: $sint = 0 \to cost = 0 \to \emptyset$

2 случай: $sint \ne 0$. Делим обе части уравнения на $sint$. Получим:

$4sin^2t - 1 = ctgt$. Учитывая, что $sin^2t = \frac{1}{1+ctg^2t}$ и обозначив $y = ctgt$, получаем

$\frac{4}{1+y^2} - 1 = y$, или после преобразования $y^3 + y^2 + y - 3 = 0$

$(y-1)(y^2 + 2y + 3) = 0$, единственным корнем которого является $y = 1$.

Делаем обратные замены: $ctgt = 1 \to t = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$.

$\frac{\pi x}{4} = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$, откуда $x = 1 + 4n,\ n \in Z$.

$0 \le x \le 2020$; $0 \le 1 + 4n \le 2020$, $-0{,}25 \le n \le 504{,}75$.

Так как $n -$ целое, то $0 \le n \le 504$. Количество целых n равно 505.

Ответ: 505.

Экономика

Критерии проверки:

1. Сделана правильная замена, найдено решение, сделан отбор – **15 баллов.**
2. Сделана правильная замена, но на различных этапах допущена арифметическая (не смысловая) ошибка, потеряна или приобретена лишнее семейство корней – **до 10 баллов.**
3. Сделана правильная замена, но решение не доведено до конца – **не более 5 баллов.**
4. В остальных случаях – **0 баллов.**

Задание 3
Максимум 15 б

Фермер Йохансен получает с одного гектара 10 тонн пшеницы, затем продает ее по цене 300 евро за тонну. При продажах на сумму свыше 10 000 евро на доход с продаж вводится повышенный налог, который фермер не хочет платить. Границы поля (в га) для посевов заданы линией:

$$2|2|x|-a|+|6|y|+3|=12$$

Значение параметра $\boldsymbol{a}$ Йохансен может выбрать сам. Помогите найти фермеру все возможные целые значения параметра $\boldsymbol{a}$ таким образом**,** чтобы ему не пришлось платить повышенный налог.

Решение:

1. Найдем ограничение на площадь поля. Пусть площадь поля S га, тогда

$$10*300*S\leq 10\ 000$$

$$S\leq 10/3$$

Далее отметим еще несколько очевидных моментов, вытекающих из смысла задачи: площадь поля не может быть равной нулю, площадь поля состоит из одной части, а не из нескольких участков.

Также заметим, что поле, очевидно (за счет x и y под знаком модуля) симметрично относительно осей координат при любом значении параметра.

Рассмотрим $|6|y|+3|$, значение этого выражения, очевидно, не менее трех
Тогда на $2|2|x|-\boldsymbol{a}|$ приходится не более 9, отсюда, очевидно $\boldsymbol{a}$ **≥-4,5,** при меньших значениях параметра площади не существует.

Также заметим, что в связи с отсутствием параметра во втором модуле, происходит «растягивание» границы вдоль оси x.

При *a* >4,5 точка (0;0) не лежит внутри ограниченной линией области, область представляется в виде двух частей, что противоречит логическому смыслу задачи

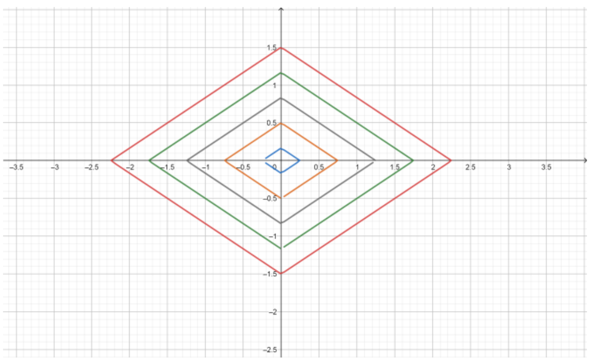
Отсюда имеем ограничение от -4,5 до 4,5, а с учетом того, что при возрастании значения a площадь растет (иллюстрация на рисунках 1 и 2), а также что нам нужны только целые значения, имеем конечный набор параметров: ±4, ±3, ±2, ±1,0

Пойдем в порядке возрастания. Пусть a = -4
2(2x+4) + (6y+3) = 12
x=0, y=1/6
y=0, x=1/4
s=2*1/6*1/4=1/12<10/3

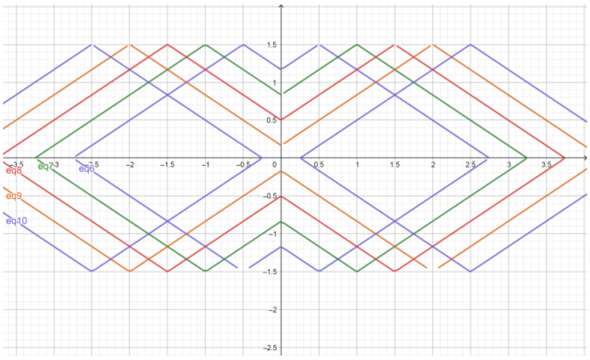
пусть a = -3
4x+6+6y+3=12
4x+6y=3
x=0, y=1/2
y=0, x=3/4
s=2*1/2*3/4=3/4<10/3

пусть a = -2
4x+4+6y+3=12
4x+6y=5
x=0, y=5/6
y=0, x=5/4
s=2*5/6*5/4=25/12<10/3
пусть a = -1
4x+2+6y+3=12
4x+6y=7
x=0, y=7/6
y=0, x=7/4
s=2*7/6*7/4=49/12>10/3; уже не подходит
См. графическое решение на рисунках ниже.

Ответ: -4,-3 или -2



Экономика



Критерии проверки:

1. Полностью обоснованное верное решение – **20 баллов.**
2. Задание решено логически верно, но допущены арифметические (не смысловые) ошибки – **до 10 баллов.**
3. Выделен и полностью разобран случай неположительных значений параметра – **до 5 баллов.**
4. В остальных случаях – **0 баллов.**

Задание 4

Мария Ивановна, высококлассный преподаватель английского языка, занимается репетиторством со школьниками и студентами. Стоимость одного часа (60 мин) урока Марии Ивановны – 2 тыс. рублей (после вычета всех налогов). Помимо доходов от репетиторства у нее есть постоянный доход от инвестиционной деятельности, который составляет 30 тыс. рублей в месяц. Выходные дни Мария Ивановна полностью посвящает семье и не работает. Мария Ивановна очень дисциплинированная и строго следит за распределением своего времени и доходов. В рабочие дни, которых в каждом месяце ровно 20, девять часов в сутки она спит, некоторое время работает, часть времени посвящает своему хобби – вязанию, а остальное время тратит на отдых и домашние дела. Занятие хобби она считает важной составляющей своей жизни, поэтому если в день она работает L часов, то на вязание обязательно потратит $2L$ часов. Вязанные вещи она не продает, а дарит друзьям, знакомым и отдает нуждающимся. Помимо этого, Мария Ивановна является активным благотворителем и перечисляет деньги в фонд помощи больным детям. Каждый рабочий день она откладывает на благотворительность ровно $k/3$ тыс. рублей, если в этот день на отдых и домашние дела она потратила всего k часов. На все бытовые расходы, хобби и ведение домашнего хозяйства (кроме расходов на благотворительность) Мария Ивановна тратит 60 тыс. рублей в месяц, других расходов у нее нет. Конечно, Мария Ивановна очень любит отдыхать и заниматься домашними делами, но ей приходится работать, и каждый рабочий день она сама решает, сколько уроков с учениками ей сегодня проводить.

(а) Какую максимальную сумму денег может ежемесячно перечислять Мария Ивановна на благотворительность?

(б) Поскольку Мария Ивановна является высококлассным преподавателем английского языка, родители учеников, у которых Мария Ивановна ведет уроки, готовы предложить ей повышенную оплату дополнительных уроков (сверх тех, которые она уже проводит с учениками ежедневно). Мария Ивановна уже давно позаботилась о тех днях, когда не сможет больше работать, поэтому она уверенно тратит весь получаемый ежемесячный доход. Согласится ли Мария Ивановна на их предложение? Если да, то какова должна быть оплата сверхурочных занятий, чтобы Мария Ивановна согласилась их проводить? Если нет, то объясните, почему она откажется от такого предложения.

Решение и схема оценивания:

(а) Ежедневно Мария Ивановна работает $(24-9-2L_i-k_i)=15-2L_i-k_i$ часов в день, где L_i – количество часов, которое она работает как репетитор в i-ый рабочий день, а k_i – количество часов, которое она тратит в i-ый рабочий день на отдых и домашние дела. Причем количество рабочих часов в один рабочий день может отличаться от количество рабочих часов в другой рабочий день.

Тогда $15-2L_i-k_i=L_i$, или $L_i=(15-k_i)/3$

Ее ежедневный заработок от уроков равен $2L_i=2(15-k_i)/3$.

За месяц уроками Мария Ивановна зарабатывает

$$2L_1+2L_2+\cdots+2L_{20}=2(15-k_1)/3+2(15-k_2)/3+\cdots+2(15-k_{20})/3$$
$$2(L_1+L_2+\cdots+L_{20})=20*2*5-2(k_1+k_2+\cdots+k_{20})/3$$

Или $2L^*=200-2K^*/3$,

где L^*- совокупное количество рабочих часов в месяц, а K^* - совокупное количество часов в месяц, которое Мария Ивановна тратит на отдых и домашние дела.

При этом ее ежемесячные расходы составляют $60+(k_1+k_2+\cdots+k_{20})/3=60+K^*/3$.

Поскольку она тратит все заработанные деньги, включая доход от инвестиционной деятельности, то

$30+200-2K^*/3=60+K^*/3$, откуда и находим максимальное количество часов в месяц, которое тратится Марией Ивановной на отдых и домашние дела: $K^*=170$.

Тогда на благотворительность в месяц Мария Ивановна потратит максимум $\frac{K^*}{3}=170/3$ тыс. рублей.

За полное решение – 10 баллов.

При неполном решении в предположении, что количества часов работы, досуга и т.п. по дням месяца одинаковы – 6 баллов.

Если выписаны только уравнения на количества часов – 2 балла.

(б) Если Мария Ивановна отклоняет предложение работать больше, то в месяц она будет работать L^* =(200-2*170/3)/2=130/3 часов.

Предположим, что Мария Ивановна согласилась бы работать дополнительно за повышенную ставку заработной платы A>2. Тогда ее месячный заработок за уроки составит

$2*130/3+A(\tilde{L}-130/3)$=260/3-130A/3+A$\tilde{L}$

Поскольку $L_i=(15-k_i)/3$, то при новом распределении своего рабочего времени, как и ранее

$\tilde{L}=L_1+L_2+\cdots+L_{20}=(15-k_1)/3+(15-k_2)/3+\cdots+(15-k_{20})/3=100-\tilde{K}/3.$

Тогда в месяц с учетом инвестиций Мария Ивановна заработает

$\frac{260}{3}-\frac{130A}{3}+A\left(100-\frac{\tilde{K}}{3}\right)+30$ тыс. рублей.

Поскольку максимальные расходы будут равны доходам при соблюдении пропорций в распределении времени между трудом и отдыхом, то

$$\frac{260}{3}-\frac{130A}{3}+A\left(100-\frac{\widetilde{K}}{3}\right)+30=60+\frac{\widetilde{K}}{3}$$

$$\frac{170}{3}(\mathrm{A}+1)=\frac{\widetilde{K}}{3}(A+1)$$

И, как и в пункте (а) получаем: $K^*=170$. То есть, Мария Ивановна не согласится работать сверх тех часов, которые она работает при ставке 2 тыс. руб./час ни при какой повышенной ставке оплаты.

Полное обоснование – 10 баллов,

Частичное обоснование – 5 баллов

Задание 5

Компания «Сибрур» занимается добычей углеводородов. Данной компании был поставлен контракт на обработку участка земли, площадью 9 км2. Рабочие компании «Сибрур» страдают синдромом усталости из-за работы в трудных условиях, что приводит к снижению их производительности в 2 раза с каждым днем работы. Количество земли, которое может обработать любой из рабочих в первый день работы составляет ½ км^2. Зарплата одного рабочего на весь период работы – 2 денежные единицы (ден.ед.), а суточная оплата аренды используемой для обработки земли – 6 ден. ед. Договор с бригадой рабочих, которая может состоять из любого количества работников, можно заключать только в первый день вступления в силу контракта по обработке участка земли.

(а) Найдите минимальное количество работников, необходимых для обработки указанного участка земли.

(б) Найдите количество работников, которые смогут обработать участок земли за сутки.

(в) Если «Сибрур» минимизирует свои издержки по обработке участка земли, то какое количество работников она наймет и сколько дней будет продолжаться эта обработка? Каковы будут затраты компании на аренду участка земли и оплату труда работников?

Решение:

(а) Ответ: 10.

Докажем от противного, что никакое меньшее число работников не справится с заданием. Пусть n работников обработали весь участок земли за k дней, где $n \le 9$. Тогда каждый из них обработал не более

$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^k}=1-\frac{1}{2^k}$

квадратных километров земли, что строго меньше 1.

Значит, в сумме все работники обработали не более

$$n\left(1-\frac{1}{2^k}\right)=n-\frac{n}{2^k}\le 9-\frac{9}{2^k}<9$$

квадратных километров земли, что строго меньше площади всего участка. Противоречие. Значит, меньше 10 работников не справятся с обработкой всего участка земли.

Нетрудно убедиться также, что 10 работников сумеют обработать весь участок не более чем за 4 дня, поскольку

$$10\left(1-\frac{1}{2^4}\right)=\frac{10*15}{16}>9$$

Значит, 10 — минимальное количество работников, необходимых для обработки данного участка земли.

Полное обоснование – 5 баллов

(б) Ответ: 18.

Действительно, в первые сутки каждый работник обрабатывает $\frac{1}{2}$ квадратных километра земли, а значит, для обработки всего участка потребуется $9:\frac{1}{2}=18$ работников.

Полное обоснование – 5 баллов

(в) Ответ: компания наймет 12 рабочих на 2 дня; затраты составят 36 ден.ед.

Если компания заключит договор с бригадой из n рабочих на k дней, то ее издержки составят $2n+6k$ ден.ед.

Из пункта (а) следует, что если бригада справляется с обработкой данного участка земли, то она состоит не менее чем из 10 человек. Если в бригаде есть хотя бы 10 человек, то эта бригада успеет обработать весь участок не более чем за 4 дня (см. решение пункта (а)). Следовательно, любая бригада, которая справится с заданием, сделает это не более чем за 4 дня. Значит, для решения задачи достаточно найти минимальные издержки для k = 1, 2, 3, 4.

При $k\ =\ 4$ потребуется не менее 10 рабочих. Тогда издержки составят не менее

$2\cdot 10+6\cdot 4=44$ ден.ед.

При $k=3$ потребуется не менее
$9:\left(1-\frac{1}{2^3}\right)=\frac{9*8}{7}=10\frac{2}{3}$ рабочих, то есть, хотя бы 11 рабочих. Тогда издержки составят не менее $2\cdot 11+6\cdot 3=40$ ден.ед.

При $k = 2$ потребуется не менее

$9 : \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) = \frac{9*4}{3} = 12$ рабочих. Тогда издержки составят не менее 2 · 12 + 6 · 2 = 36 ден.ед.

При $k = 1$ потребуется не менее 18 рабочих (см. решение пункта (б)). Тогда издержки составят не менее 2 · 18 + 6 · 1 = 42 ден.ед.

Значит, издержки компании составят не менее 36 ден.ед. Это значение достигается только при заключении контракта с 12 рабочими на 2 дня.

Полное решение – 10 баллов

Частичное решение (сравнение только вариантов п.а и п.б) – 4 балла.

Задание 6

С марта 2016 года ПАО «Мосэнергосбыт» ввел новую прогрессивную шкалу наказания неплательщиков за потребленную электроэнергию. Для обычных граждан пеня за несвоевременную уплату электроэнергии составляет 1/300 ставки рефинансирования ЦБ за каждый день неуплаты, начиная с 31 дня просрочки. В случае, когда оплата не производится более 91 дня, размер пени увеличивается до 1/130 ставки рефинансирования ЦБ за каждый день просрочки, начиная с 91 дня неуплаты. По сообщениям компании «Мосэнергосбыт» (https://www.mosenergosbyt.ru) к таким мерам пришлось прибегнуть в связи с большим ростом задолженности у населения. Однако с 1 ноября по 31 декабря 2019 года включительно АО «Мосэнергосбыт» провел акцию «Пени исчезают в полночь». По правилам акции пени потребителя электроэнергии среди населения списываются, если

1. Потребитель оплатил задолженность и текущие начисления за электроэнергию в счетах за октябрь и ноябрь 2019 года;
2. Своевременно в период с 15 до 26 декабря (включительно) передал показания счетчиков электроэнергии (при условии, что показания счетчиков не считываются у потребителя автоматически).

При этом акция не распространялась на:

1. Потребителей электрической энергии, добровольно оплативших предъявленные пени до 1 ноября 2019 года в части оплаченных пеней;
2. Пени, в отношении которых имеется решение суда об их взыскании в пользу организатора акции;
3. Потребителей, у которых по состоянию на 15 декабря 2019 года отсутствует или признан вышедшим из строя прибор учёта электроэнергии.

Почему компания осуществляет такую акцию? Почему потребители электроэнергии готовы участвовать в ней? Приведите экономические обоснования.

Для справки: Пе́ня — вид неустойки, штрафная санкция за невыполнение в срок или несвоевременное выполнение установленных законом или договором обязательств, зачисляющаяся в процентах от оговорённой в договоре суммы за каждый просроченный день

Краткое решение:
Для компании выгодно, т.к. 1) списать пени для нее может быть выгоднее, чем требовать от некрупных должников оплаты задолженности в суде; 2) получить оплату задолженности без пени сейчас может быть выгоднее, чем когда-то в будущем оплаты с пенями; 3) передача потребителями показаний позволяет учитывать потребление более точно (выявлять злоупотребления).
Для потребителей выгодно, т.к. 1) позволяет сэкономить на оплате пени, 2) избавляет от ощущения долгов перед наступлением Нового года.

Полное обоснование – 10 баллов, частичное обоснование – 5 баллов.

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации

Олимпиада школьников РАНХиГС по Экономике

2019 - 2020 учебный год

Заключительный (очный) этап

10 – 11 классы

2 вариант

Задание 1
Максимум 15 б

Решить уравнение

$$\sqrt{4+3\sqrt{4+3\sqrt{1+\frac{3}{\sin^2 x}}}}=\operatorname{ctg}^2 x.$$

Решение:

Поскольку $1+\operatorname{ctg}^2 x=\frac{1}{\sin^2 x}$, постольку уравнение примет вид:

$$\sqrt{4+3\sqrt{4+3\sqrt{4+3\operatorname{ctg}^2 x}}}=\operatorname{ctg}^2 x.$$

Сделаем замену $a=\operatorname{ctg}^2 x$, уравнение примет вид:

$$\sqrt{4+3\sqrt{4+3\sqrt{4+3a}}}=a.$$

Пусть $f(x)=\sqrt{4+3x}$, несложно понять, что уравнение имеет вид

$$f\Big(f\big(f(a)\big)\Big)=a.$$

Но $f(x)$ монотонно возрастает, следовательно, уравнение равносильно уравнению

$$f(a)=a \Leftrightarrow \sqrt{4+3a}=a \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-3a-4=0 \\ a\geq 0 \end{cases}$$

Отсюда $a=4$. И $\operatorname{ctg}^2 x=4 \Leftrightarrow x=\operatorname{arcctg} 2+\pi n, n\in\mathbb{Z}$ и $x=\pi-\operatorname{arcctg} 2+\pi k, k\in\mathbb{Z}$.

Экономика

Ответ: $\operatorname{arcctg} 2 + \pi n, n \in \mathbb{Z}, \pi - \operatorname{arcctg} 2 + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Критерии проверки:

1. Все решено верно, переходы обоснованы – **15 баллов.**
2. Применен верный метод, нет достаточных объяснений, но получен верный ответ – **до 10 баллов.**
3. Применен верный метод, нет достаточных объяснений, ответ не получен – **до 5 баллов.**
4. В остальных случаях – **0 баллов.**

Задание 2
Максимум 15 б

Решить уравнение $2\sqrt{2} sin^3\left(\frac{\pi x}{4}\right) = sin\left(\frac{\pi}{4}(1+x)\right)$.

Сколько решений этого уравнения удовлетворяет условию: $2000 \leq x \leq 3000$?

Решение:

$sin\left(\frac{\pi}{4}(1+x)\right) = cos\left(\frac{\pi}{4}(1-x)\right)$. Уравнение приобретает вид

$2\sqrt{2} sin^3\left(\frac{\pi x}{4}\right) = cos\left(\frac{\pi}{4}(1-x)\right)$, т.е. получаем задачу 2 из 1 варианта, решение которой:

$x = 1 + 4n,\ n \in Z.$ $2000 \leq x \leq 3000$, $2000 \leq 1 + 4n \leq 3000$, $499{,}75 \leq n \leq 749{,}75$.

Так как $n -$ целое, то $500 \leq n \leq 749$. Количество целых n равно 250.

Ответ: 250.

Критерии проверки:

1. Сделана правильная замена, найдено решение, сделан отбор – **15 баллов.**
2. Сделана правильная замена, но на различных этапах допущена арифметическая (не смысловая) ошибка, потеряна или приобретена лишнее семейство корней – **до 10 баллов.**
3. Сделана правильная замена, но решение не доведено до конца – **не более 5 баллов.**
4. В остальных случаях – **0 баллов.**

Экономика

Задание 3

Максимум 20 б

Фермер Йохансен получает с одного гектара 10 тонн пшеницы, затем продает ее по цене 300 евро за тонну. При продажах на сумму свыше 10 000 евро на доход с продаж вводится повышенный налог, который фермер не хочет платить. Границы поля (в га) для посевов заданы линией:

$$2|2|x| + 2a| + |6|y| + 3| = 12$$

Значение параметра ***a*** Йохансен может выбрать сам. Помогите найти фермеру все возможные целые значения параметра ***a*** такие, чтобы ему не пришлось платить повышенный налог.

Решение:

1. Найдем ограничение на площадь поля. Пусть площадь поля S га, тогда
10*300*S≤10 000
S≤10/3
Далее отметим еще несколько очевидных моментов, вытекающих из смысла задачи: площадь поля не может быть равной нулю, площадь поля состоит из одной части, а не из нескольких участков.

Также заметим, что поле, очевидно (за счет x и y под знаком модуля) симметрично относительно осей координат при любом значении параметра.
Пусть ***2a=-b*, отсюда *a=-b/a***
Рассмотрим $|6|y| + 3|$, значение этого выражения, очевидно, не менее трех
Тогда на $2|2|x| - b|$ приходится не более 9, отсюда, очевидно b **≥-4,5,** при меньших значениях параметра площади не существует.

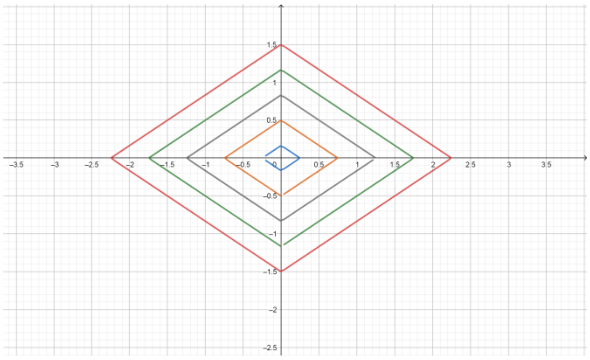
Также заметим, что в связи с отсутствием параметра во втором модуле, происходит «растягивание» границы вдоль оси x.

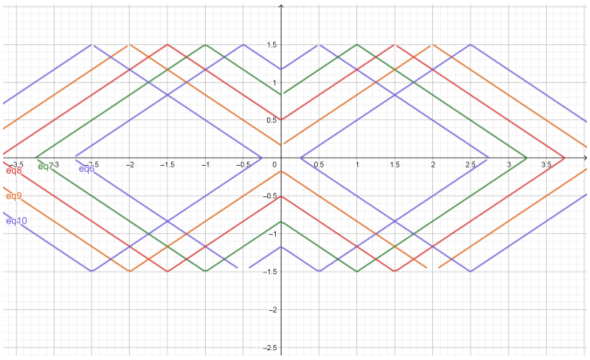
При b >4,5 точка (0;0) не лежит внутри ограниченной линией области, область представляется в виде двух частей, что противоречит логическому смыслу задачи
Отсюда имеем ограничение от -4,5 до 4,5, а с учетом того, что при возрастании значения b площадь растет (иллюстрация на рисунках 1 и 2), а также что нам нужны только целые значения, имеем конечный набор параметров: ±4, ±3, ±2, ±1,0

Пойдем в порядке возрастания. Пусть b = -4
2(2x+4) + (6y+3) = 12
x=0, y=1/6
y=0, x=1/4
s=2*1/6*1/4=1/12<10/3, a=2

пусть b = -3
4x+6+6y+3=12
4x+6y=3
x=0, y=1/2
y=0, x=3/4
s=2*1/2*3/4=3/4<10/3 a=1,5 –не является целым

пусть b = -2
4x+4+6y+3=12
4x+6y=5
x=0, y=5/6
y=0, x=5/4
s=2*5/6*5/4=25/12<10/3, a=1
пусть b = -1
4x+2+6y+3=12
4x+6y=7
x=0, y=7/6
y=0, x=7/4
s=2*7/6*7/4=49/12>10/3; уже не подходит
См. иллюстрацию решения на рисунках ниже.
Ответ: 2;1





Критерии проверки:

1. Полностью обоснованное верное решение – **20 баллов.**
2. Задание решено логически верно, но допущены арифметические (не смысловые) ошибки – **до 10 баллов.**
3. Выделен и полностью разобран случай неотрицательных значений параметра – **до 5 баллов.**
4. В остальных случаях – **0 баллов.**

Задание 4

Максим Андреевич, в прошлом преподаватель вуза, дает уроки математики группам школьников. Стоимость одного часа (60 мин) урока Максима Андреевича с группой школьников составляет 3 тыс. рублей (после вычета всех налогов). Помимо доходов от репетиторства у него есть постоянный доход от инвестиционной деятельности, который составляет 14 тыс. рублей в месяц. Выходные дни Максим Андреевич полностью посвящает семье и не работает. Максим Андреевич очень дисциплинированный и строго следит за распределением своего времени и доходов. В рабочие дни, которых в каждом месяце ровно 21, восемь часов в сутки он спит, некоторое время работает, часть времени посвящает своему хобби – создает гравюры по металлу, а остальное время тратит на отдых и домашние дела. Занятие хобби он считает важной составляющей своей жизни, поэтому если в день он работает L часов, то на создание гравюр обязательно потратит 2L часов. Гравюры он не продает, а дарит друзьям и знакомым. Помимо этого, Максим Андреевич является активным благотворителем и перечисляет деньги в фонд помощи больным детям. Каждый рабочий день он откладывает на благотворительность ровно k/3 тыс. рублей, если в этот день на отдых и домашние дела он потратила всего k часов. На все бытовые расходы, хобби и ведение домашнего хозяйства (кроме расходов на благотворительность) Максим Андреевич тратит 70 тыс. рублей в месяц, других расходов у него нет. Конечно, Максим Андреевич очень любит отдыхать и заниматься домашними делами, но ему приходится работать, и каждый рабочий день он сам решает, сколько уроков с учениками он сегодня будет проводить.

(а) Какую максимальную сумму денег может ежемесячно перечислять Максим Андреевич на благотворительность?

(б) Поскольку Максим Андреевич очень хороший преподаватель математики, родители учеников, у которых он ведет уроки, готовы предложить ему повышенную оплату дополнительных уроков (сверх тех, которые он уже проводит с учениками ежедневно). Максим Андреевич уже давно позаботился о тех днях, когда не сможет больше работать, поэтому он уверенно тратит все получаемые ежемесячно деньги. Согласится ли Максим Андреевич на их предложение? Если да, то какова должна быть оплата сверхурочных занятий, чтобы он согласился проводить дополнительные уроки? Если нет, то объясните, почему он откажется от такого предложения.

Решение и схема оценивания:

(а) Ежедневно Максим Андреевич работает $(24-8-2L_i-k_i)=16-2L_i-k_i$ часов в день, где L_i – количество часов, которое он работает как репетитор в i-ый рабочий день, а k_i – количество часов, которое он тратит в i-ый рабочий день на отдых и домашние дела. Причем количество рабочих часов в один рабочий день может отличаться от количество рабочих часов в другой рабочий день.

Тогда $16-2L_i-k_i=L_i$, или $L_i=(16-k_i)/3$

Ее ежедневный заработок от уроков равен $3L_i=3(16-k_i)/3=16-k_i$.

За месяц уроками Максим Андреевич зарабатывает

$$3L_1+3L_2+\cdots+3L_{20}=(16-k_1)+(16-k_2)+\cdots+(16-k_{20})$$
$$3(L_1+L_2+\cdots+L_{20})=21*16-(k_1+k_2+\cdots+k_{20})$$

Или $3L^*=336-K^*$,

где L^*- совокупное количество рабочих часов в месяц, а K^* - совокупное количество часов в месяц, которое Максим Андреевич тратит на отдых и домашние дела.

При этом ее ежемесячные расходы составляют $70 + (k_1 + k_2 + \cdots + k_{20})/3 = 70 + K^*/3$. Поскольку она тратит все заработанные деньги, включая доход от инвестиционной деятельности, то

$14 + 336 - K^* = 70 + K^*/3$, откуда и находим максимальное количество часов в месяц, которое тратится Максимом Андреевичем на отдых и домашние дела: $K^* = 210$.

Тогда на благотворительность в месяц Максим Андреевич потратит максимум $\frac{K^*}{3} = \frac{210}{3} =$ 70 тыс. рублей.

За полное решение – 10 баллов.

При неполном решении в предположении, что количества часов работы, досуга и т.п. по дням месяца одинаковы – 6 баллов.

Если выписаны только уравнения на количества часов – 2 балла.

(б) Если Максим Андреевич отклоняет предложение работать больше, то в месяц он будет работать L^* =(336-70)/3=42 часа.

Предположим, что Мария Ивановна согласилась бы работать дополнительно за повышенную ставку заработной платы A>3. Тогда ее месячный заработок за уроки составит

$3 * 42 + A(\tilde{L} - 42)$=126-42A+A$\tilde{L}$

Поскольку $L_i = (16 - k_i)/3$, то при новом распределении своего рабочего времени, как и ранее

$\tilde{L} = L_1 + L_2 + \cdots + L_{20} = (16 - k_1)/3 + (16 - k_2)/3 + \cdots + (16 - k_{20})/3 = 16 * 21/3 - \tilde{K}/3$.

Тогда в месяц с учетом инвестиций Максим Андреевич заработает

$126 - 42A + A\left(112 - \tilde{K}/3\right) + 14$ тыс. рублей.

Поскольку максимальные расходы будут равны доходам при соблюдении пропорций в распределении времени между трудом и отдыхом, то

$$126 - 42A + A\left(112 - \tilde{K}/3\right) + 14 = 70 + \tilde{K}/3$$

$$70(A + 1) = \frac{\tilde{K}}{3}(A + 1)$$

И, как и в пункте (а) получаем: $K^* = 210$. То есть, Мария Ивановна не согласится работать сверх тех часов, которые она работает при ставке 2 тыс. руб./час ни при какой повышенной ставке оплаты.

Полное обоснование – 10 баллов,

Частичное обоснование – 5 баллов

Задание 5

Компания «Золотник» занимается добычей золота и драгоценных камней. «Золотник» заключил контракт на обработку квадратного участка земли, площадью 10 км^2. Рабочие компании «Золотник» страдают синдромом постоянной усталости из-за очень трудоемкой работы, что приводит к снижению их производительности в 2 раза с каждым днем работы. Количество земли, которое может обработать любой из рабочих в первый день работы составляет ½ км^2. Зарплата одного рабочего на весь период работы – 3 денежные единицы (ден.ед.), а суточная оплата аренды оборудования для обработки всего участка земли – 7 ден. ед. Договор с бригадой рабочих, которая может состоять из любого количества работников, можно заключать только в первый день вступления в силу контракта по обработке участка земли.

(а) Найдите минимальное количество рабочих, необходимых для обработки указанного участка земли.

(б) Найдите количество работников, которые смогут обработать участок земли за сутки.

(в) Если «Золотник» минимизирует свои издержки по обработке участка земли, то какое количество работников наймет компания и сколько дней будет продолжаться эта обработка? Каковы будут совокупные затраты компании на аренду оборудования и оплаты труда работников?

(а) Ответ: 11.

Докажем от противного, что никакое меньшее число работников не справится с заданием. Пусть n работников обработали весь участок земли за k дней, где $n \leq 10$. Тогда каждый из них обработал не более

$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^k}=1-\frac{1}{2^k}$

квадратных километров земли, что строго меньше 1.

Значит, в сумме все работники обработали не более

$$n\left(1-\frac{1}{2^k}\right)=n-\frac{n}{2^k}\leq 10-\frac{10}{2^k}<10$$

квадратных километров земли, что строго меньше площади всего участка. Противоречие. Значит, меньше 11 работников не справятся с обработкой всего участка земли.

Нетрудно убедиться также, что 11 работников сумеют обработать весь участок не более чем за 4 дня, поскольку

$$11\left(1-\frac{1}{2^4}\right)=\frac{10*15}{16}>10$$

Значит, 11 — минимальное количество работников, необходимых для обработки данного участка земли.

Полное обоснование – 5 баллов

Экономика

(б) Ответ: 20.

Действительно, в первые сутки каждый работник обрабатывает $\frac{1}{2}$ квадратных километра земли, а значит, для обработки всего участка потребуется $10:\frac{1}{2} = 20$ работников.

Полное обоснование – 5 баллов

(в) Ответ: компания наймет 14 рабочих на 2 дня; затраты составят 56 ден.ед.

Если компания заключит договор с бригадой из n рабочих на k дней, то ее издержки составят $3n + 7k$ ден.ед.

Из пункта (а) следует, что если бригада справляется с обработкой данного участка земли, то она состоит не менее чем из 11 человек. Если в бригаде есть хотя бы 11 человек, то эта бригада успеет обработать весь участок не более чем за 4 дня (см. решение пункта (а)). Следовательно, любая бригада, которая справится с заданием, сделает это не более чем за 4 дня. Значит, для решения задачи достаточно найти минимальные издержки для k = 1, 2, 3, 4.

При $k = 4$ потребуется не менее 11 рабочих. Тогда издержки составят не менее

$3 \cdot 11 + 7 \cdot 4 = 61$ ден.ед.

При $k = 3$ потребуется не менее
$10:\left(1 - \frac{1}{2^3}\right) = \frac{10*8}{7} = 11\frac{3}{7}$ рабочих, то есть, хотя бы 12 рабочих. Тогда издержки составят не менее $3 \cdot 12 + 7 \cdot 3 = 57$ ден.ед.

При $k = 2$ потребуется не менее
$10:\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) = \frac{10*4}{3} = 13\frac{1}{3}$ рабочих, то есть хотя бы 14 рабочих. Тогда издержки составят не менее $3 \cdot 14 + 7 \cdot 2 = 56$ ден.ед.
При $k = 1$ потребуется не менее 20 рабочих (см. решение пункта (б)). Тогда издержки составят не менее $3 \cdot 20 + 7 \cdot 1 = 67$ ден.ед.
Значит, издержки компании составят не менее 56 ден.ед. Это значение достигается только при заключении контракта с 14 рабочими на 2 дня.

Полное решение – 10 баллов

Частичное решение (сравнение только вариантов п.а и п.б) – 4 балла.

Экономика

Задание 6

С марта 2016 года ПАО «Мосэнергосбыт» ввел новую прогрессивную шкалу наказания неплательщиков за потребленную электроэнергию. Для обычных граждан пеня за несвоевременную уплату электроэнергии составляет 1/300 ставки рефинансирования ЦБ за каждый день неуплаты, начиная с 31 дня просрочки. В случае, когда оплата не производится более 91 дня, размер пени увеличивается до 1/130 ставки рефинансирования ЦБ за каждый день просрочки, начиная с 91 дня неуплаты. По сообщениям компании «Мосэнергосбыт» (https://www.mosenergosbyt.ru) к таким мерам пришлось прибегнуть в связи с большим ростом задолженности у населения. Однако с 1 ноября по 31 декабря 2019 года включительно АО «Мосэнергосбыт» провел акцию «Пени исчезают в полночь».

По правилам акции пени потребителя электроэнергии среди населения списываются, если Потребитель оплатил задолженность и текущие начисления за электроэнергию в счетах за октябрь и ноябрь 2019 года;

Своевременно в период с 15 до 26 декабря (включительно) передал показания счетчиков электроэнергии (при условии, что показания счетчиков не считываются у потребителя автоматически).

При этом акция не распространялась на:

Потребителей электрической энергии, добровольно оплативших предъявленные пени до 1 ноября 2019 года в части оплаченных пеней;

Пени, в отношении которых имеется решение суда об их взыскании в пользу организатора акции;

Потребителей, у которых по состоянию на 15 декабря 2019 года отсутствует или признан вышедшим из строя прибор учёта электроэнергии.

Почему компания осуществляет такую акцию? Почему потребители электроэнергии готовы участвовать в ней? Приведите экономические обоснования.

Для справки: Пе́ня — вид неустойки, штрафная санкция за невыполнение в срок или несвоевременное выполнение установленных законом или договором обязательств, зачисляющаяся в процентах от оговорённой в договоре суммы за каждый просроченный день.

Краткое решение:

Для компании выгодно, т.к. 1) списать пени для нее может быть выгоднее, чем требовать от некрупных должников оплаты задолженности в суде; 2) получить оплату задолженности без пени сейчас может быть выгоднее, чем когда-то в будущем оплаты с пенями; 3) передача потребителями показаний позволяет учитывать потребление более точно (выявлять злоупотребления).

Для потребителей выгодно, т.к. 1) позволяет сэкономить на оплате пени, 2) избавляет от ощущения долгов перед наступлением Нового года.

Полное обоснование – 10 баллов, частичное обоснование – 5 баллов.