

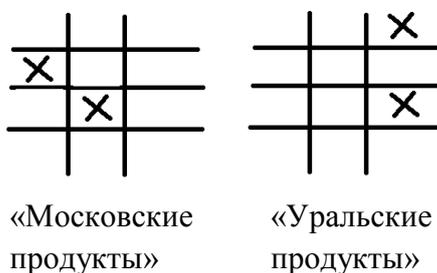
**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
Российская академия народного хозяйства и государственной службы  
при Президенте Российской Федерации  
Олимпиада школьников РАНХиГС по Экономике  
2017-2018 учебный год  
Заочный этап  
10-11 классы**

Уважаемый участник!

Вы приступаете к выполнению заданий Олимпиады школьников РАНХиГС. Прежде, чем Вы начнете, оргкомитет просит учесть несколько правил, выполнение которых необходимо:

1. Вы можете выполнять задания и загружать работу до окончания приема работ в 23:59 часов по московскому времени 26 ноября 2017 года. Иного таймера нет.
2. Просим не задерживать выполнение: при опоздании даже на 5 секунд система закроет прием работ, и Ваша работа не будет принята к рассмотрению.
3. Работа выполняется ТОЛЬКО самостоятельно. Коллективное выполнение работ запрещено: все одинаковые работы будут аннулированы.
4. Все решения необходимо печатать, а не писать от руки, затем сохранять файл как PDF и после этого загружать в Личный кабинет. Пример для MS WORD: Файл→Сохранить как...→Тип файла PDF (\*.pdf).
5. Прием работы через электронную почту не производится. Только через Личный кабинет.
6. Запрещено «переконвертировать» файл, просто переименовав у него расширение на PDF: в таком виде он не читается и не будет проверен. За него будет выставлена оценка 0 баллов.
7. После загрузки работы Вам будет направлено письмо. У Вас есть 24 часа (или менее, если до конца приема работ осталось меньше времени) на проверку загруженного файла и его замену. Просим не пренебрегать этой возможностью и проверять загруженный файл, в том числе на отсутствие технических сбоев при загрузке, препятствующих открытию и чтению файла.
8. Необходимо загружать работу только в специально отведенное поле, не путая профили.
9. Запрещено производить заимствования без указания ссылки на первоисточник. Первоисточником являются труды известных ученых, философов, научные работы, опубликованные в рецензируемых ВАК научных изданиях либо индексируемых в Scopus или Web of Science, нормативные правовые акты и др. Ссылки на статьи без указания автора не являются корректными. Работы с некорректными заимствованиями будут аннулированы.
10. Запрещено подписывать работы или иным способом указывать на автора. Работа с указанными персональными данными участника будет аннулирована.
11. Необходимо четко выполнять требования к объему работы, если он указан в задании.

1. Торговые сети «Московские продукты» и «Уральские продукты» хотят открыть в городе N по одному своему магазину. Чтобы равномерно и справедливо разделить прибыль от продажи товаров и услуг магазинов, аналитический отдел «Московские продукты» предлагает построить два магазина с таким условием, чтобы они не встречались на одном перекрестке (так как люди не будут переходить перекресток ради того, чтобы зайти во второй магазин). Аналитический отдел «Уральские продукты» считает, что главным условием является отсутствие двух магазинов на одной улице по ходу движения автотранспорта, так как, заехав в один магазин, покупатели уже не поедут во второй, расположенный по ходу движения. Ниже приведенный рисунок иллюстрирует два примера расположения магазинов, которые исключают торговые сети. Так и не придя к соглашению, обе торговые сети открывают два магазина. Топографическая съемка показала, что в городе N 7 радиальных и 7 параллельных улиц. Какому условию с большей вероятностью удовлетворяет расположение этих магазинов?



**Решение:** Рассмотрим схему города на карте планеты (рис.1.). Улицы считаются параллельными, если у них нет общих домов (по аналогии с схемой меридианов и параллелей на карте земли)

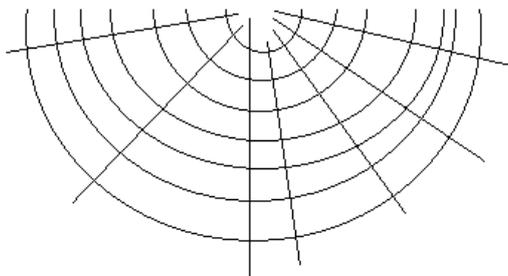


Рис.1.

Этой схеме соответствует следующая (условная) схема расположения зданий под магазины (для определенности пусть все здания имеют одинаковый размер рис.2.)

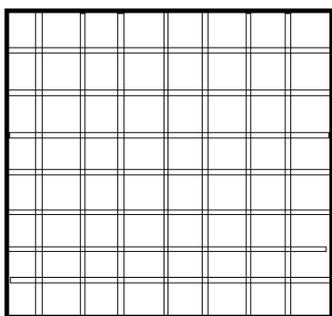


Рис.2.

Вычислим сколько всего вариантов расположения магазинов. Первый магазин можно поставить в одну из 64 клеток схемы 2, тогда для второго остается 63 варианта. 4032 варианта.

При этом условию первого магазина соответствуют следующие категории вариантов:  $4 \cdot (64-4)$  [на углах схемы города] +  $6 \cdot 4 \cdot (64-6)$  [на границах без углов] +  $36 \cdot (64-9)$  [внутри границ] = 3612 вариантов. То есть вероятность первой торговой сети  $\frac{3612}{4032}$

Для второго варианта расположения магазинов, и с учетом схемы движения покупателей, невозможными являются варианты расположения двух магазинов либо на одной вертикали, либо на одной горизонтали. Тогда, для вариантов расположить магазины:  $64 \cdot (64-15) = 3136$  и вероятность второй сети  $\frac{3136}{4032}$ .

Поэтому вероятность первой сети выше.

**Ответ:** Первому условию.

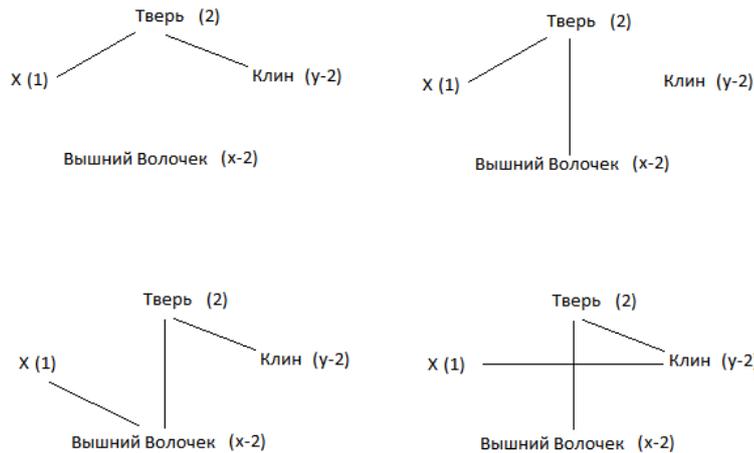
Критерии оценивания задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	10
Получен верный ответ, но решение либо не до конца обосновано, либо содержит арифметическую ошибку, не влияющую на результат	5
Ответ либо неверен, либо угадан, обоснования ответа нет	0

2. Между Москвой и Санкт-Петербургом находится семь населенных пунктов: Ярославль, Тверь, Клин, Вышний Волочек, Шестихино, Завидово и Бологое. Известно, что Москва соединена прямым железнодорожным сообщением с семью пунктами, Санкт-Петербург с пятью, Тверь с четырьмя, Ярославль с двумя, Бологое с двумя, Шестихино с двумя, а Завидово с одним. Со сколькими населенными пунктами прямым сообщением соединен Вышний Волочек? Сколькими способами можно проехать из Москвы в Санкт-Петербург?

**Решение:** построим графическую интерпретацию задачи. Сумма степеней вершин графа должна быть четна. Пусть степень вершины ВВ –  $x$ , а Клин –  $y$ . Тогда степени вершин графа железных дорог 7,5,4,2,2,2,1, $x$ , $y$ . Сумма всех вершин  $7+5+4+2+2+2+1+x+y = 23+x+y$ . Так как эта сумма должна быть четна, следовательно  $x+y =$  нечетно. Обратим внимание, что Клин и Вышний Волочек вообще говоря совершенно равнозначны по условию, это значит, что любая пара чисел, которая может быть у Клина =  $a$ , ВВ =  $b$ , так же может быть заменена на Клин =  $b$ , ВВ =  $a$ (\*). Построим какую-нибудь одну схему дорог и рассмотрим какие варианты можно из нее получить: раз Москва соединена с 7 пунктами, значит, прямое железнодорожное сообщение у нее со всеми городами, кроме Санкт-Петербурга (так как по условию города находятся между Москвой и Санкт-Петербургом, следовательно, по дороге мы обязательно встретим один из населенных пунктов). Тогда Завидово больше не соединен дорогой ни с одним. Уберем из рассмотрения Москву и Завидово, тогда степени всех вершин

уменьшатся на единицу. Новая последовательность вершин: 5,3,1,1,1,  $x-1$ ,  $y-1$ . Рассмотрим Санкт-Петербург (дорог из которого по условию 5), то есть он соединен со всеми городами, кроме Москвы, Завидово и еще кого-то одного города.

Случай 1. Пусть этот город X имеет степень вершины 1 (то есть это либо Ярославль, либо Шестихино, либо Бологое), тогда Санкт-Петербург соединен с остальными пятью городами, и, как минимум, два города имеют степени 1. Уберем Санкт-Петербург. Тогда новые степени вершин: Тверь (2), Клин( $y-1$ ), Вышний Волочек( $x-1$ ) и X(1). Тогда Тверь, соединена с какой-то парой городов: X-Вышний Волочек, Клин-Вышний Волочек, Волочек, X-Клин. (см. рис1)



Тогда степень Вышнего Волочка либо 2, либо 3, либо 4. С учетом того, что возможно существует соединение Клин-Вышний Волочек, возможно, что степень одного из городов увеличится на 1, то есть итоговая степень Вышнего Волочка = 2,3,4 или 5

Случай 2. Пусть Санкт-Петербург не соединен с Тверью. Тогда, убрав Санкт-Петербург мы получим, что у Твери степень остается 4, но ее не с чем соединить, так как остается всего два города (Клин и Вышний Волочек), следовательно, ситуация невозможна

Случай 3. Пусть Санкт-Петербург не соединен либо с Клином, либо с Вышним Волочком (согласно (\*)). Тогда Тверь соединена с Клином и с Вышним Волочком. Поэтому степень Вышнего Волочка либо 4, либо 3, либо 2. (пример на рис.2)



Вычислим варианты проезда от Москвы до Санкт-Петербурга

Случай 1. Если X – либо Ярославль, либо Шестихино, либо Бологое, то в каждом из случаев вариантов 9. С учетом возможности соединить Клин-Вышний Волочек, вариантов 15.

Случай2. Если X – либо Клин, либо Вышний Волочек, то вариантов 9 или 10 (в зависимости от того, соединен Клин-Вышний Волочек или нет).

Рис.3. иллюстрирует все дороги, если X – Ярославль

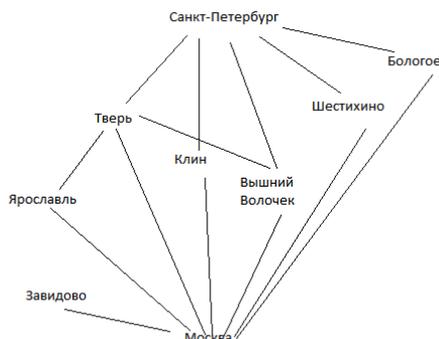


Рис.3.

**Ответ:** Вышний Волочек можно соединить с 2,3, 4,5 пунктами. Способов проехать 9 или 10 или 15.

Критерии оценивания задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	10
Получен верный ответ, но не рассмотрен случай, когда Клин и Вышний Волочек соединяются друг с другом отдельной дорогой	9
Получен не до конца верный ответ, в множество решений отдельно входит случай соединения Москвы Санкт-Петербург напрямую	8
Получен верный ответ, но решение либо не до конца обосновано, либо содержит арифметическую ошибку, не влияющую на результат	5
Получены частные случаи схемы дорог, но не все	2
Ответ либо неверен, либо угадан, обоснования ответа нет	0

3. Число 2458710411 написали 98 раз подряд, при этом получилось 980-значное число. Из этого числа требуется вычеркнуть 4 цифры. Чему равно количество способов, которыми это можно сделать так, чтобы вновь полученное 976-значное число делилось нацело на 6?

**Решение.** Если число делится на 6, то оно делится на 3 и на 2. Число делится на 2 тогда и только тогда, когда его последняя цифра чётная. Полученное в условии 980-значное число заканчивается на 2458710411, то есть имеет вид ...2458710411. Для того, чтобы данное число делилось на 2, необходимо зачеркнуть последние 2 единицы, чтобы число заканчивалось на чётную цифру. Полученное число будет иметь вид 2458710411...245871041124587104. Теперь необходимо, чтобы оно делилось на 3. Число делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 3. Сумма цифр полученного числа равна:

$$(2+4+5+8+7+1+0+4+1+1)*97+(2+4+5+8+7+1+0+4)=33*97+31=3232.$$

Остаток от деления числа 3232 на 3 равен 1. Это означает, что числа надо зачёркивать таким образом, чтобы их сумма делилась на 3 и в остатке давала 1. Тогда при вычитании будет получаться число, сумма цифр которого будет в

точности делиться на 3. Максимальную сумму, которую можно получить, вычёркивая цифры, равна 16 (8+8). Значит необходимо рассмотреть все числа от 0 до 16, которые делятся на 3 и в остатке дают 1, и все возможные комбинации их получения. Эти числа: 1, 4, 7, 10, 13, 16. Комбинации, которыми их можно получить, устроены следующим образом:

1 (0+1); 4 (0+4, 2+2); 7 (2+5, 7+0); 10 (5+5, 2+8); 13 (8+5); 16 (8+8).

Осталось лишь для каждой комбинации посчитать количество способов, которыми эту комбинацию можно получить. Первую комбинацию можно получить, вычеркнув одну 1 и один 0. Единиц в нашем числе  $97 \cdot 3 + 1 = 292$ , а нулей 98. Значит количество способов, которыми это можно сделать, равно  $(97 \cdot 3 + 1) \cdot 98 = 28616$ . Для последующих комбинаций получим.

(0+4):  $98 \cdot 98 = 9604$ ;

(2+2):  $98 \cdot 97 / 2 = 4753$ ;

(2+5):  $98 \cdot 98 = 9604$ ;

(7+0):  $98 \cdot 98 = 9604$ ;

(5+5):  $98 \cdot 97 / 2 = 4753$ ;

(2+8):  $98 \cdot 98 = 9604$ ;

(5+8):  $98 \cdot 98 = 9604$ ;

(8+8):  $98 \cdot 97 / 2 = 4753$ .

Суммируя все полученные комбинации получим число способов 90895. Однако стоит учесть, что один из предложенных способов нам не подходит. Если мы зачеркнем последние цифры 0 и 4, то наше число будет заканчиваться на 1, то есть не будет делиться на 2, следовательно, не будет делиться на 6. Значит искомое число комбинаций равно  $90895 - 1 = 90894$  (способа).

**Ответ:** 90 894 способа.

Критерии оценки выполнения задания	Баллы
Приведена верная и обоснованная последовательность всех шагов решения. Верно выполнены все преобразования и вычисления. Получен верный ответ.	<b>10</b>
Приведена верная последовательность всех шагов решения. Допущены пробелы в обосновании выбора комбинаций чисел (например, не учтено одно лишнее решение (0+4), комбинации парных цифр не поделены на 2 и т.д.) или вычислительная ошибка или описка, не влияющие на дальнейший ход решения. В результате этой ошибки или описки может быть получен неверный ответ.	<b>6</b>
Задача не решена, но ее решение значительно продвинуто, т.е.: - существенная часть решения выполнена верно, возможно, неточно (например, учтена и верно посчитана часть комбинаций); - другая часть либо не выполнена, либо выполнена неверно, возможно, даже с логическими ошибками (например, не учтено большинство комбинаций или учтены лишние комбинации, комбинации неправильно посчитаны, не учтены случаи вычёркивания одной и той же цифры (2+2,	<b>3</b>

5+5, 8+8) и т. д.); При этом решение может быть не завершено.	
Все случаи решения, которые не соответствуют вышеуказанным критериям выставления оценок в 3 и 6 баллов.	<b>0</b>

4. Найдите все значения параметра  $\alpha$ , при каждом из которых система

$$\begin{cases} \sqrt{-5y + 4 + 4\alpha} - \sqrt{\alpha - x} = 0 \\ y - \sqrt{x} = 0 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение относительно переменных  $y$  и  $x$ .

**Решение.** С учётом ОДЗ для данной задачи, исходная система трансформируется в:

$$\begin{cases} -5y + 4 + 4\alpha \geq 0 \\ \alpha - x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x \geq 0 \\ -5y + 4 + 4\alpha = \alpha - x \\ y = \sqrt{x} \end{cases} .$$

Выразим в явном виде ограничения на переменные  $y$  и  $x$ . Также в первом равенстве выразим  $x$  через  $y$ . Получим:

$$\begin{cases} 0 \leq y \leq \frac{4(1 + \alpha)}{5} \\ 0 \leq x \leq \alpha \\ x = 5y - 4 - 3\alpha \\ y = \sqrt{x} \end{cases} .$$

Подставим вместо  $x$  в последнее равенство  $5y - 4 - 3\alpha$  и возведём левую и правую часть в квадрат. Получим:

$$y^2 = 5y - 4 - 3\alpha.$$

Данное квадратное уравнение имеет хотя бы одно решение, если его дискриминант неотрицателен. Имеем неравенство  $D = (-5)^2 - 4(4 + 3\alpha) > 0$ . Получаем, что данное квадратное уравнение имеет решением только при  $\alpha \leq \frac{3}{4}$ . Тогда корни уравнения имеют вид:

$$y_{1,2} = \frac{1}{2}(5 \pm \sqrt{9 - 12\alpha}).$$

Проверим меньше ли данные корни, чем  $\frac{4(1+\alpha)}{5}$ . Проверим это сначала для  $y_1$ :

$$\frac{1}{2}(5 + \sqrt{9 - 12\alpha}) \leq \frac{4(1 + \alpha)}{5};$$

$$(25 + 5\sqrt{9 - 12\alpha}) \leq 8\alpha + 8;$$

$$5\sqrt{9 - 12\alpha} \leq 8\alpha - 17.$$

В данном неравенстве левая часть больше нуля и определена, так как  $a \leq \frac{3}{4}$ , значит для того, чтобы данное неравенство имело место, необходимо, чтобы  $8\alpha - 17 \geq 0 \Rightarrow \alpha \geq \frac{17}{8}$ . Получим противоречие. Проверим выполнение данного неравенства для  $y_2$ :

$$\frac{1}{2}(5 - \sqrt{9 - 12\alpha}) \leq \frac{4(1 + \alpha)}{5};$$

$$(25 - 5\sqrt{9 - 12\alpha}) \leq 8\alpha + 8;$$

$$-5\sqrt{9 - 12\alpha} \leq 8\alpha - 17;$$

$$5\sqrt{9 - 12\alpha} \geq 17 - 8\alpha;$$

$$25(9 - 12\alpha) \geq (8\alpha - 17)^2;$$

$$64\alpha^2 - 272\alpha + 289 \leq 225 - 300\alpha;$$

$$64\alpha^2 + 28\alpha + 64 \leq 0$$

У квадратного уравнения  $64\alpha^2 + 28\alpha + 64 = 0$  дискриминант меньше 0. Так как ветви параболы направлены вверх, значит не существует  $\alpha$ , таких что  $64\alpha^2 + 28\alpha + 64 \leq 0$ . Получим противоречие. Это означает, что не существует таких  $\alpha$ , для которых одновременно существует хотя бы один корень уравнения  $y^2 = 5y - 4 - 3\alpha$  и выполнены условия ОДЗ.

**Ответ:** Решений нет.

Критерии оценки выполнения задания	Баллы
Приведена верная и обоснованная последовательность всех шагов решения. Верно выполнены все преобразования и вычисления. Получен верный ответ.	10
Приведена верная последовательность всех шагов решения. Допущены пробелы в обосновании решения (например, <i>при сравнении полученных корней с ОДЗ</i> ) или вычислительная ошибка или описка, не влияющие на дальнейший ход решения. В результате этой ошибки или описки может быть получен неверный ответ.	6
Задача не решена, но ее решение значительно продвинуто, т.е.: - существенная часть решения выполнена верно, возможно, неточно (например, <i>верно найдена ОДЗ и получено квадратное уравнение <math>y^2 = 5y - 4 - 3\alpha</math></i> ); - другая часть либо не выполнена, либо выполнена неверно,	3

возможно, даже с логическими ошибками (например, <i>неверно найдены корни квадратного уравнения <math>y^2 = 5y - 4 - 3a</math>, неправильно произведены сравнения полученных корней с ОДЗ</i> ). При этом решение может быть не завершено.	
Все случаи решения, которые не соответствуют вышеуказанным критериям выставления оценок в 3 и 6 баллов.	<b>0</b>

5. В последние годы в нашей стране с появлением негосударственных пенсионных фондов возникла комплексная программа увеличения будущей пенсии граждан. В частности ряд таких фондов предлагает своим клиентам создать индивидуальный пенсионный план. Согласно этому плану клиент добровольно и самостоятельно может выбирать размер и периодичность взносов на свой индивидуальный счет. Доходность клиента по такому вкладу определяется ставкой доходности фонда и не зависит от суммы и частоты взносов. Соответствующие проценты до достижения вкладчиком пенсионного возраста начисляются один раз в год ежегодно на остаток суммы на счете индивидуального пенсионного плана клиента. По достижению вкладчиком пенсионного возраста накопленная на счете к этому моменту сумма фиксируется, равномерно распределяется и выплачивается ежемесячно клиенту в виде надбавки к государственной пенсии в течение установленного в договоре периода. Условия досрочного закрытия такого вклада определяются фондом и фиксируются в договоре.

Предположим, что ваш 39-летний знакомый, которому в следующем месяце исполнится 40 лет, размышляет, не заключить ли со следующего месяца с одним из подобных фондов договор индивидуального пенсионного плана. Считайте для простоты, что доходность фонда стабильна и будет составлять в течение всего срока возможного договора 9% годовых. Знакомый посчитал, что до наступления пенсионного периода (60-летнего возраста) сможет ежемесячно вносить на свой индивидуальный пенсионный счет в фонде 7000 рублей. Определите, какую ежемесячную надбавку к государственной пенсии за счет участия в программе индивидуального пенсионного плана сможет получать в течение пятнадцати лет после достижения пенсионного возраста ваш знакомый.

Возможно, для ответа на поставленный вопрос задания вам придется воспользоваться дополнительной информацией о комплексной программе увеличения будущей пенсии, предоставленной одним из подобных фондов.

### Решение:

До выхода на пенсию в течении 20 лет клиент будет вносить на свой счет по  $7000 \cdot 12 = 84000$  руб.

После первого года накоплений сумма на его пенсионном счету составит  $84000 + 84000 \cdot 0,09 = 91560$  руб.

Через 2 года:  $91560 + 84000 + (91560 + 84000) \cdot 0,09 = 191360$  руб. и т.д.

Или:

$(\dots ((7000 \cdot 12)(1 + 0,09) + (7000 \cdot 12))(1 + 0,09) + (7000 \cdot 12)) \dots)$

Таким образом, через 20 лет на его пенсионном счете окажется 4684220,554 руб. В таком случае ежемесячная надбавка в течение 15 лет составит  $4684220,554/15/12 \approx 26023,45$  руб.

**Критерии:**

15 баллов – полностью верное обоснованное решение.

10 баллов – допущены ошибки при учете капитализации.

5 баллов – неверно использованы формулы подсчета финальной суммы на счете при условии, что верно описана процедура накопления.

0 баллов – неверно описана процедура накопления.

6. На четвертом году обучения в Хогвартсе Гермиона возмутилась ущемлением прав домовых эльфов и создала Ассоциацию Восстановления Независимости Эльфов. Разумеется, даже самая светлая и благородная идея требует средств для продвижения, поэтому Гермиона решила, что может финансировать свою кампанию выпуском атрибутики и начала с производства значков. Всем в Хогвартсе эта идея понравилась, а Гермиона закрепила за собой право на производство таких значков, оформив соответствующий патент. Рон, с детства знающий нюансы магических технологий, убедил Гермиону, что издержки изготовления значков будут равны  $TC(Q) = 5Q^2$ , где  $Q$  – количество выпущенных значков. Гарри же с помощью своих друзей и оборотного зелья выяснил, что спрос на значки ребят со всех факультетов, кроме Слизерина, представим функцией спроса  $q_{ws} = 26 - 2P$ , а со стороны Слизерина – функцией спроса  $q_s = 10 - P$  (учащиеся Слизерина предвзято относятся к идеям гриффиндорцев, особенно магловского происхождения, однако, не отказались бы поддержать Ассоциацию). Какую максимальную сумму в поддержку своей компании сможет заработать Гермиона на продаже значков, если цены одного и того же товара для различных факультетов Хогвартса должны быть одинаковыми?

**Решение:**

Поскольку цены должны быть одинаковыми для факультетов, то Гермиона-монополист должна учитывать при ценообразовании совокупный спрос на значки имеет вид:

$$Q(P) = q_{ws} + q_s = \begin{cases} 26 - 2P, & P \geq 13 \\ 36 - 3P, & P < 13 \end{cases}$$

Функция обратного спроса:

$$P(Q) = \begin{cases} 13 - Q/2, & Q \leq 6 \\ 12 - Q/3, & Q > 6 \end{cases}$$

Тогда предельный доход монополии Гермионы имеет вид

$$MR(Q) = (P(Q)Q)' = \begin{cases} 13 - Q, & Q \leq 6 \\ 12 - 2Q/3, & Q > 6 \end{cases}$$

Поскольку предельный доход монополии убывает, а предельные издержки возрастают, то максимум прибыли предприятия Гермионы будет достигнут при условии  $MR(Q^*) = MC(Q^*)$ . Таким образом, получаем

$$MR(Q^*) = MC(Q^*)$$

$$\rightarrow \begin{cases} 13 - Q = 10Q, & Q = 13/11 \leq 6 \\ 12 - \frac{2Q}{3} = 10Q, & Q = \frac{9}{8}, \text{ что не удовлетворяет условию } Q > 6 \end{cases}$$

Таким образом, покупать товар будут только учащиеся всех факультетов, кроме слизеринцев.

При этом будет продано  $13/11$  единиц товара по цене  $P = 13 - \frac{13}{22} = \frac{273}{22}$

Следует заметить, что в условии не сказано, в каких единицах считается количество значков (например, это могут быть пары, десятки, дюжины и т.п.).

Тогда Ассоциация заработает  $\frac{13}{11} * \frac{273}{22} - 5 * \left(\frac{13}{11}\right)^2 \approx 7,682$

### Критерии:

15 баллов за полное обоснованное решение.

10 баллов за решение при неполном обосновании. (Наиболее часто встречаемый недочет: участник не объяснил, на каком из участков кусочно-заданного спроса стоит искать решение оптимизационной задачи.)

5 баллов за неполное решение. (Наиболее часто встречаемые недочеты: участник решал задачу перебором целочисленных значений количества, участник не учел, что совокупный спрос на значки представляет собой кусочно-заданную функцию.)

0 баллов за неверное решение.

Отсутствие обоснования достаточности условий получения максимума функции штрафвалось в 1 балл.

Округление финального ответа до целочисленного значения штрафуются в 1 балл.

7. Предположим, вы живете в маленьком городке и очень хорошо знакомы со всеми его жителями. Поскольку, вполне заслуженно, горожане считают вас экономически грамотным человеком, у некоторых из них возникла идея открытия вами кадрового агентства, где только вы будете представлять работодателям всех трудоспособных жителей на рынке труда. За это горожане будут платить вам 1% от полученных трудовых доходов, при этом иных способов устроиться на работу у горожан не будет. Вы рассчитали, что ваши издержки на устройство горожан на работу составят  $TC(L) = \frac{1}{3200} L^2$ , где  $L$  - количество часов труда, которое горожане будут работать на предприятиях. (Горожане настолько вам доверяют, что готовы трудиться за любую зарплату, если именно вы представляли их интересы перед работодателем.) В городке есть только одно градообразующее предприятие, которое производит готовый продукт по технологии  $q = 16\sqrt{L}$  (рабочие из других городов на предприятие не приезжают) и продает его на совершенно конкурентном рынке по цене, равной 1.

Поразмыслив, вы поняли, что существуют две возможные схемы переговоров с предприятием:

- 1) Вы называете ставку заработной платы  $w$ , а предприятие принимает решение о том, какой объем труда (в часах) оно будет использовать при этой заработной плате;
- 2) Предприятие называет вам ставку заработной платы  $w$ , а вы принимаете решение о том, какой объем занятости (в часах) вы предложите работать горожанам.

Какая бы схема ни была реализована, все трудоспособные граждане городка трудятся одинаковое количество часов.

- (а) Какую схему предпочли бы лично вы, какую сумму при этом заработало бы ваше кадровое агентство?
- (б) Действительно ли жителям города выгодно, что бы вы представляли их интересы? Ответ обоснуйте.

**Решение:**

(а) Вам выгоднее выбрать схему, при которой у вас лидерская позиция: вы принимаете решение первым, предугадывая, как затем поступит предприятие. Покажем это.

- 1) Предскажем, как будет отвечать предприятие после того, как вы назовете ему ставку заработной платы, и учтем это, когда будем сами выбирать заработную плату.

Предприятие максимизирует свою прибыль:

$$16\sqrt{L} - wL \rightarrow \max_L$$

Можно взять производную или обойтись заменой переменной, чтобы привести функцию к виду параболы с ветвями вниз и найти затем ее вершину:  $L = \frac{64}{w^2}$

Вы максимизируете свою прибыль:

$$0,01wL - \frac{1}{3200}L^2 \rightarrow \max_w \text{ при условии, что } L = \frac{64}{w^2}, \text{ т.е. подставив количество часов труда, получаем вашу задачу.}$$

Оптимальная  $w = 2$ , тогда  $L = 16$  и прибыль агентства 0,24.

- 2) В этом случае предприятие пытается предугадать мой ход:

$$0,01wL - \frac{1}{3200}L^2 \rightarrow \max_L \text{ или } wL - \frac{1}{32}L^2 \rightarrow \max_L.$$

Получим  $L = 16w$ .

Предприятие максимизирует свою прибыль, учтя, сколько труда я им буду предлагать:

$$16\sqrt{L} - wL \rightarrow \max_w \text{ при } L = 16w, \text{ т.е. } 16 \cdot 4\sqrt{w} - 16w^2 \rightarrow \max_w \text{ или } 4\sqrt{w} - w^2 \rightarrow \max_w.$$

Возьмем производную – получим  $w = 1$ .

$$\text{Тогда } L = 16 \text{ и прибыль агентства } 0,01wL - \frac{1}{3200}L^2 = 0,08.$$

Действительно видим, что быть лидером выгоднее.

- (б) Если бы жители нанимались бы сами, то предприятие было бы просто монополистом на рынке труда и максимизировало бы свою прибыль. В случае, когда вы являетесь посредником, то у жителей бы появлялось больше рыночной власти – их нанимали бы в результате на более выгодных для них условиях в целом. Но агентство за это получает плату и если бы жители объединились в профсоюз с меньшими издержками (меньшими транзакционными издержками в том числе), то им было бы выгоднее.

**Критерии:**

(а) Промежуточные и штрафные баллы:

- 5 баллов, если только одна схема просчитана верно и найдена прибыль.
- 10 баллов, если оба варианта просчитаны верно
- Если не обоснован максимум любым способом – минус 1 балл
- 3 балла, если решена только задача максимизации прибыли одного агента при фиксированной переменной (цене) второго агента

(б) Промежуточные баллы:

- 1-5 баллов, если присутствуют рассуждения про невыгодность/выгодность монополии/профсоюза + обоснование (в зависимости от полноты обоснования).

15 баллов - за полное верное обоснованное решение задачи.