

**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
Российская академия народного хозяйства и государственной службы
при Президенте Российской Федерации
Олимпиада школьников РАНХиГС по экономике
2016-2017 учебный год
Заочный этап
8-9 классы**

Уважаемый участник!

Вы приступаете к выполнению заданий Олимпиады школьников РАНХиГС. Прежде, чем Вы начнете, оргкомитет просит учесть несколько правил, выполнение которых необходимо:

1. Вы можете выполнять задания и загружать работу до окончания приема работ в 23:59 часов по московскому времени 28 ноября 2016 года. Иного таймера нет.
2. Просим не задерживать выполнение: при опоздании даже на 5 секунд система закроет прием работ, и Ваша работа не будет принята к рассмотрению.
3. Работа выполняется ТОЛЬКО самостоятельно. Коллективное выполнение работ запрещено: все одинаковые работы будут аннулированы.
4. Все решения необходимо печатать, а не писать от руки, затем сохранять файл как PDF и после этого загружать в Личный кабинет. Пример для MS WORD: Файл→Сохранить как...→Тип файла PDF (*.pdf).
5. Прием работы через электронную почту не производится. Только через Личный кабинет.
6. Запрещено «переконвертировать» файл, просто переименовав у него расширение на PDF: в таком виде он не читается и не будет проверен. За него будет выставлена оценка 0 баллов.
7. После загрузки работы Вам будет направлено письмо. У Вас есть 24 часа (или менее, если до конца приема работ осталось меньше времени) на проверку загруженного файла и его замену. Просим не пренебрегать этой возможностью и проверять загруженный файл, в том числе на отсутствие технических сбоев при загрузке, препятствующих открытию и чтению файла.
8. Необходимо загружать работу только в специально отведенное поле, не путая профили.
9. Запрещено производить заимствования без указания ссылки на первоисточник. Первоисточником являются труды известных ученых, философов, научные работы, опубликованные в рецензируемых ВАК научных изданиях либо индексируемых в Scopus или Web of Science, нормативные правовые акты и др. Ссылки на статьи без указания автора не являются корректными. Работы с некорректными заимствованиями будут аннулированы.
10. Запрещено подписывать работы или иным способом указывать на автора. Работа с указанными персональными данными участника будет аннулирована.
11. Необходимо четко выполнять требования к объему работы, если он указан в задании.

Задание 1 (Максимум 12 баллов)

Пусть в стране Альфа имеется 5 банков. Вероятность того что банк закроется одинакова для всех банков и равна 0,05. Банки закрываются независимо в совокупности друг от друга. В какой-то момент в стране Альфа наступил кризис и вероятность того что банк закроется стала равна 0,25 (по-прежнему она одинакова для всех банков и банки закрываются независимо в совокупности друг от друга). Найдите, насколько в абсолютном выражении изменилась вероятность того, что хотя бы один банк закроется. Ответ округлите до сотых.

Решение:

Введём в рассмотрение следующие события: событие A – хотя бы 1 банк в стране Альфа закрылся, событие A_i – i -ый банк закрылся, событие B_i – i -ый банк не закрылся. Тогда противоположное к событию A событие утверждает, что ни один банк не закрылся (обозначим его, как событие B). Сумма вероятностей этих событий равна 1. Тогда $P(A) = 1 - P(B)$. Событие B подразумевает, что первый банк не закрылся, второй банк не закрылся, ..., пятый банк не закрылся. Очевидно, что событие B складывается из пересечения событий B_i . По теореме умножения вероятностей для независимых событий получаем, что $P(B)$ равна произведению $P(B_i)$. Для каждого i выполнено: $P(B_i) = 1 - P(A_i)$. Поэтому:

$$P(A) = 1 - P(B) = 1 - (1 - P(A_i))^5 = 1 - (1 - p)^5$$

Решая эту задачу для двух ситуаций (до кризиса и после) получим, что:

$$P(A_{\text{до кризиса}}) = 1 - (1 - 0,05)^5 = 0,2262191;$$

$$P(A_{\text{после кризиса}}) = 1 - (1 - 0,25)^5 = 0,7626953;$$

$$|\Delta P(A)| = |P(A_{\text{до кризиса}}) - P(A_{\text{после кризиса}})| = 0,5364762 \approx 0,54.$$

Ответ: 0,54.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
12	Приведена верная и обоснованная последовательность всех шагов решения. Верно выполнены все преобразования и вычисления. Получен верный ответ.
8	Приведена верная последовательность всех шагов решения. Допущены пробелы в обосновании выбора формул теории вероятностей или вычислительная ошибка или описка, не влияющие на дальнейший ход решения. В результате этой ошибки или описки может быть получен неверный ответ.
4	Задача не решена, но ее решение значительно продвинуто, т.е.: — существенная часть решения выполнена верно, возможно, неточно (например, верно получена вероятность того, что ни один банк не закроется); — другая часть либо не выполнена, либо выполнена неверно, возможно, даже с логическими ошибками (например, не найдено изменение вероятности того, что хотя бы один банк закроется). При этом решение может быть не завершено.
0	Все случаи решения, которые не соответствуют вышеуказанным критериям выставления оценок в 4 и 8 баллов.

Задание 2 (Максимум 15 баллов)

Экономист Игорь получил зарплату 49-ю купюрами (номиналом 50, 100, 500 и 1000 д. е.). Найдите минимально возможное значение максимального числа купюр одного достоинства у Игоря.

Решение:

Для того чтобы получить минимально возможное значение максимального числа купюр одного достоинства, необходимо набрать как можно больше купюр другого достоинства. Так как типов купюр всего 4, это означает, что по принципу Дирихле, существует как минимум 13 ($48/4 + 1 = 13$) купюр одного достоинства. Это и будет ответом, так как при отклонении от

распределения по 12 купюр трёх достоинств и 13 купюр одного достоинства, максимально возможное число купюр одного достоинства будет либо становиться больше, либо будет оставаться неизменным.

Ответ: 13 купюр.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
15	Приведена верная и обоснованная последовательность всех шагов решения. Верно выполнены все преобразования и вычисления. Получен верный ответ.
10	Приведена верная последовательность всех шагов решения. Допущены пробелы в обосновании минимально возможного значения максимального числа купюр одного достоинства или вычислительная ошибка или описка, не влияющие на дальнейший ход решения. В результате этой ошибки или описки может быть получен неверный ответ.
5	-Задача не решена, но ее решение значительно продвинуто, т.е.: -существенная часть решения выполнена верно, возможно, неточно (например, найдено минимально возможное значение максимального числа купюр одного достоинства); -другая часть либо не выполнена, либо выполнена неверно, возможно, даже с логическими ошибками (например, неверно обоснован минимум). При этом решение может быть не завершено.
0	Все случаи решения, которые не соответствуют вышеуказанным критериям выставления оценок в 5 и 10 баллов.

Задание 3 (Максимум 18 баллов)

Первокурсница Маша взяла 10 книги по экономике в библиотеке. Две из них – это разные книги одного и того же автора (Адама Смита), и одна книга Джона Кейнса. Кто авторы остальных книг – Машу не интересует (это не Кейнс и не Смит). Ей важно, чтобы на её книжной полке книги Смита стояли рядом, а книга Кейнса не стояла рядом ни с одной из книг Смита. Сколькими способами Маша может расставить все 10 книг на книжной полке?

Решение:

Так как книги Смита должны стоять вместе на книжной полке, будем рассматривать их, как одну книгу. Итак, теперь у нас есть 9 книг и 9 мест на книжной полке. Рассмотрим следующие ситуации:

- 1) Книги Смита с краю. Таких ситуаций две (левый край и правый край). Допустим, мы будем рассматривать левый край. Осталось 8 книг. Очевидно, что рядом с книгами Смита мы можем поставить одну из 7 книг, так как Кейнс не должен стоять рядом со Смитом. На третьем месте слева мы также можем расположить одну из 7 книг, так как Кейнса уже туда ставить можно; на четвёртом месте одну из 6 книг и т. д. По правилу перемножения получим количество вариантов $N_1 = 2 * 7 * 7!$ (не забыть умножить на 2, так как мы можем Смита поставить на правый край);
- 2) Теперь пусть книги Смита стоят не с краю. Таких вариантов существует 7 штук. Тогда с каждой стороны от них мы должны поставить по одной книге. Получается, что справа от книг Смита мы можем поставить одну из 7 книг, а слева одну из 6 книг, так как Кейнс не должен стоять рядом со Смитом. Осталось 6 мест и 6 книг. Можем их расставлять, как угодно. По правилу перемножения получим количество вариантов $N_2 = 7 * 7 * 6 * 6!$ (не забыть умножить на 7, так как мы можем Смита поставить на одну из 7 позиций на книжной полке);
- 3) Так как ситуации «1)» и «2)» исключают друг друга, то число расстановок, объединяющих случаи «1)» и «2)», будет равно сумме N_1 и N_2 . Однако не стоит

забывать, что сами книги Смита мы можем расставить двумя способами. Получается, что итоговое число способов будет равно $N = 2 * (N_1 + N_2) = 2 * (2 * 7 * 7! + 7 * 7 * 6 * 6!) = 14 * 8! = 564\,480$ способов.

Ответ: 564 480 способами.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
18	Приведена верная и обоснованная последовательность всех шагов решения. Верно выполнены все преобразования и вычисления. Получен верный ответ.
12	Приведена верная последовательность всех шагов решения. Допущены пробелы в обосновании числа способов расстановки книг или вычислительная ошибка или описка, не влияющие на дальнейший ход решения. В результате этой ошибки или описки может быть получен неверный ответ.
6	— Задача не решена, но ее решение значительно продвинуто, т.е.: существенная часть решения выполнена верно, возможно, неточно (например, верно получено число способов расстановки книг в одной из ситуаций); — другая часть либо не выполнена, либо выполнена неверно, возможно, даже с логическими ошибками (например, неверно получено число способов расстановки книг в другой из ситуаций). При этом решение может быть не завершено.
0	Все случаи решения, которые не соответствуют вышеуказанным критериям выставления оценок в 6 и 12 баллов.

Задание 4 (Максимум 15 баллов)

Владелец земельного участка построил двухэтажный торговый центр. На каждом этаже есть несколько помещений, которые он может сдать в аренду магазинам, с ежемесячной оплатой. Цена аренды одного помещения на первом и втором этаже установлены владельцем и, вообще говоря, могут быть различны, в зависимости от того, на каком этаже находится помещение. Известно, что цена аренды помещения на первом этаже не менее одного миллиона, а цена аренды на втором этаже не более восьми миллионов. В январе владелец сдал в аренду два помещения, одно на первом этаже и одно помещение на втором, что принесло ему доход не менее шести миллионов. В феврале владелец сдал один магазин на первом этаже и два магазина на втором, его доход не превысил 21 миллион. В марте из-за грамотно проведенного анализа рынка, владелец сдал два помещения на первом этаж и три помещения на втором, что принесло ему не менее четырнадцати миллионов. В апреле из-за хорошей рекламной компании, владелец сдал пять помещений на первом этаже и шесть на втором. Оцените минимальный и максимальный уровень дохода, который владелец мог получить в апреле.

Решение:

Обозначим стоимость аренды помещения на первом этаже x , а на втором y . Заметим, что согласно условию задачи оба неизвестных x и y являются неотрицательными величинами.

Тогда условия задачи отвечают следующей системе неравенств

$$x \geq 1, y \leq 8$$

$$x + y \geq 6$$

$$x + 2y \leq 21$$

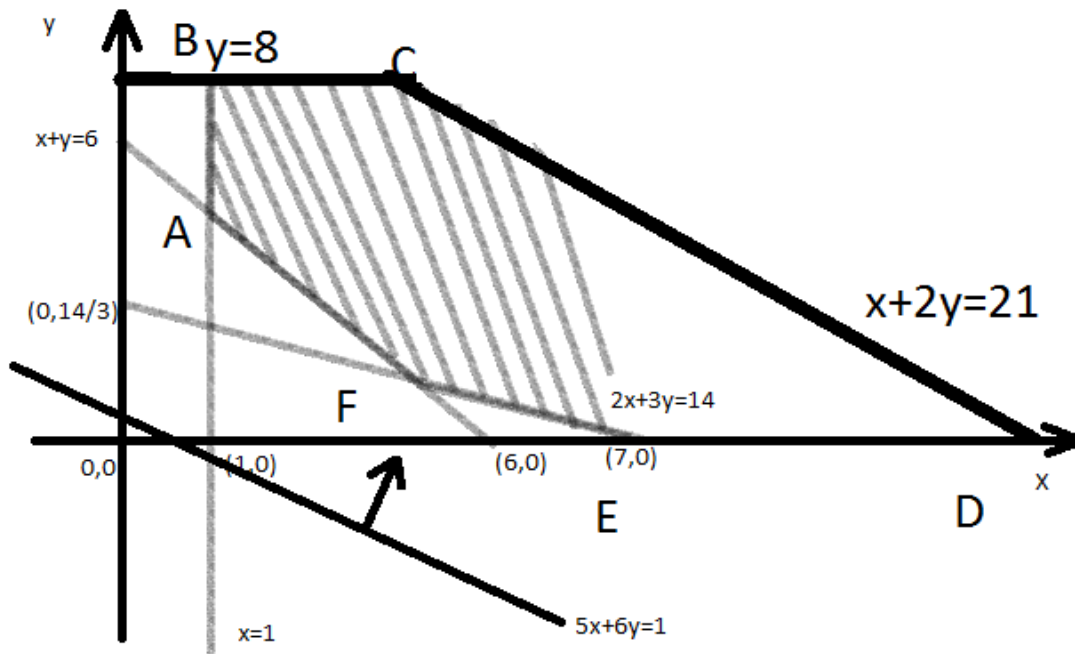
$$2x + 3y \geq 14$$

где первое условие – по условию задачи ограничения на арендные платежи, второе соответствует доходу за январь, третье – доходу за февраль, четвертое – доходу за март. Тогда, в апреле необходимо найти минимум и максимум $5x + 6y$. Введем систему координат, и построим области, соответствующие каждому из неравенств. На рисунке 1 представлена

система координат, заштрихованная область внутри многоугольника ABCDEF отвечает системе неравенств

Выражение $5x + 6y = t$ определяет множество параллельных прямых на этой плоскости.

Построим прямую $5x + 6y = 1$ и будем двигать ее в сторону области решения систем неравенств.



Место первого пересечения некоторой прямой $5x + 6y = t$ с областью решения неравенств очевидно и есть минимальный гарантированный уровень дохода девелопера в апреле. Место последнего пересечения многоугольника ABCDEF с прямой-максимально возможный доход. Найдём координаты точки F пересечения прямых: $2x + 3y = 14$ и $x + y = 6$, следовательно, минимум достигается при $x = 4$ и $y = 2$. Тогда $5x + 6y$ в этой точке равно 32 миллиона.

Для оценки максимума, заметим, что кандидатов на точку максимума два, точка C и D.

Вариант 1. В какой именно точке достигается максимум зависит от угла наклона прямой, которой принадлежит отрезок CD, тангенс угла наклона этой прямой равен -1 , а тангенс угла наклона любой прямой $5x + 6y = t$ равен -5 . Тогда максимальное значение достигается в точке D. Значение выражение $5x + 6y$ равно 105 миллионов

Вариант 2. Сравним значение выражения $5x + 6y$ в точках C и D. В точке C $5 \cdot 5 + 6 \cdot 8$, 73 миллиона, в точке D 105 миллионов.

Ответ: 32 и 105

Баллы	Критерии оценки выполнения задания № 4
15	Приведена верная и обоснованная последовательность всех шагов решения. Верно выполнены все преобразования и вычисления. Получен верный ответ.
10	Приведена верная последовательность всех шагов решения. Построен верный многоугольник системы неравенств, однако в результате ошибки или описки может быть получен неверный ответ.
5	Ответ дан верный, однако нет обоснования, почему предложенные числа являются максимумом и минимумом.
0	Задача не решена

Задание 5 (Максимум 15 баллов)

После того, как Маленький Принц покинул Землю, он поселился на планете ФИНАНСляндия, на которой возможны любые операции со звездочками (звездочки – валюта планеты ФИНАНСляндия). Попав на планету, Принц сразу решил пойти в Государственный банк и открыть вклад в звездочках. Прошло 3 года, у Принца на счете оказалось 172800 звездочек. Считайте, что проценты во всех банках ФИНАНСляндии начисляются один раз в конце каждого года (время отсчитывается от момента создания вклада) и капитализируются.

(а) Каков был первоначальный вклад Принца 3 года назад при ставке по депозиту в Государственном банке 20% годовых?

(б) Спустя 3 года Маленький Принц решил рассмотреть и другие варианты размещения своего депозита. Он узнал, что Коммерческий банк предлагает следующий вариант размещения депозита на 3 года: в первый год начисляется % от суммы вклада, во второй год % от накопленной на депозите суммы, в третий год - 20% от накопленной на депозите суммы. При этом Коммерческий банк предлагает клиенту самому подобрать положительные значения a и b , однако, при условии $(a + b)/2 = 20$ и $a \neq b$. Маленький Принц решил, что при смене банка для размещения своего депозита он точно не проиграет, поскольку средний процент по вкладу остается таким же, как и в Государственном банке. Верное ли решение принял Маленький Принц, вложив свои средства в размере 172800 звездочек в Коммерческий банк на описанный выше депозит? Если да, то приведите пример таких значений a и b , которые стоит выбрать Принцу. Если нет, то объясните, почему он принял неверное решение.

Решение.

(а) Находим первоначальный вклад:

$$\frac{172800}{1,2^3} = 100000$$

Ответ: 100 000.

(б) Покажем, что Принц принял неверное решение и, оставив деньги в Государственном банке, получил бы больший выигрыш от своего вклада.

Пусть A – исходная сумма вклада, $x = 1 + a/100$, $y = 1 + b/100$, $c = (x + y)/2$ (в нашем случае $c=1,2$)

Тогда сравним $Axyc$ (сумма на счете Принца по прошествии 3 лет в Коммерческом банке) и Ac^3 (сумма на счете Принца по прошествии 3 лет, если бы свои деньги он вложил в Государственный банк).

Заметим, что $\frac{x+y}{2} > \sqrt{xy}$, так как $x + y - 2\sqrt{xy} = (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 > 0$, поскольку $x \neq y$. Тогда $Ac^2 = A\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 > Axy$. Откуда следует, что $Ac^3 > Axyc$.

Задание 6 (Максимум 15 баллов)

В государстве Ленивия открылось производство усовершенствованных кресел-качалок с подогревом и массажными устройствами. Рынок кресел-качалок является совершенно конкурентным: функция предложения кресел-качалок $q^s = 4p - 20$, функция спроса на кресла-качалки $q^d = 60 - 2p$. Для того чтобы граждане Ленивии стали покупать меньше кресел-качалок, государство предполагает ввести следующие системы налогообложения:

(а) Какой должна быть ставка потоварного налога t (потоварный налог по ставке t – налог в размере t денежных единиц, взимаемый за каждую единицу продукции) для покупателей, чтобы государство смогло сократить количество продаваемых кресел-качалок в 2 раза?

(б) Один из представителей правительства Ленивии утверждает, что, собирая ту же самую сумму налогов в госбюджет, можно сократить количество кресел-качалок, которое поставляется на рынок. Для этого необходимо ввести пропорциональный налог на выручку производителей (в этом случае с каждой денежной единицы выручки производителя товара в госбюджет будет выплачен фиксированный процент). Если член правительства Ленивии прав, то помогите ему подобрать соответствующий процент пропорционального налога. Если он ошибается, то обоснуйте почему.

Решение.

(а) Найдем первоначальное равновесие: $4p - 20 = 60 - 2p$, $\Rightarrow p^* = 10$, $q^* = 20$.

Т.к. количество кресел-качалок должно снизиться вдвое, то в равновесии оно должно стать равным 10. С учетом введения налога, находим новое равновесие:

$$\begin{cases} 60 - 2p^d = 10 \\ 4p^s - 20 = 10 \\ p^d = p^s + t \end{cases}$$

Где p^d – цена, которую заплатят покупатели кресел с учетом введенного налога, p^s – цена, которую получать продавцы кресел за свою продукцию, t – величина налога.

Находим: $p^d = 25$, $p^s = 7,5$, $t = 17,5$. То есть искомый налог должен составить 17,5 денежных единиц.

(б) Если бы правительство ввело налог на выручку производителей, то за каждое кресло (на рынке совершенной конкуренции цена его воспринимается как данная), приобретаемое покупателем по цене p^d , продавцы получали бы выручку в размере $p^d(1 - \tau)$, где τ – доля от выручки, которую производитель отдает в бюджет государства.

Тогда новое равновесие при пропорциональном налоге на выручку можно найти, решая систему уравнений:

$$\begin{cases} 60 - 2p_{new}^d = 4p_{new}^s - 20 \\ p_{new}^s = p_{new}^d(1 - \tau) \end{cases}$$

Заметим, что при нейтральной к госбюджету замене политики ($p_{new}^s q_{new} \tau = tq$) количество приобретаемых кресел качалок не изменилось бы, поскольку всегда можно подобрать такое значение τ , при котором $p_{new}^s = p_{new}^d(1 - \tau) = p^d - t$ при том же объеме продукции. А следовательно, объем продукции в 10 единиц при соответствующем подборе величины τ является единственным решением системы линейных уравнений. Таким образом, вопреки утверждению представителя правительства Ленивии, сохраняя поступления в госбюджет на том же уровне, невозможно сократить объем выпускаемой продукции, вводя налог на выручку для производителей.

Задание 7 (Максимум 10 баллов)

Почему бутылка Соса-Сола в некоторых аэропортах стоит значительно дороже, чем в продуктовом магазине в городе? Аргументируйте свой ответ.

Решение.

1) С одной стороны, приехав в аэропорт, людям больше негде купить бутылку сладкой газированной воды, кроме как в самом здании, поэтому сеть киосков и кафе, торгующих напитком в здании аэропорта, становится монополистом по продаже этого напитка, что влечет повышение его цены. Стоит заметить, что в больших международных аэропортах, где продукты в дорогу (в том числе и газированные напитки) можно приобрести в сетевых продуктовых магазинах, расположенных в здании аэропортов, «городские» и «аэропортовые» цены не отличаются значительно.

2) С другой стороны, скорей всего, людям уже будет неудобно покидать здание аэропорта в поисках аналогичного товара за более низкую цену (небольшое время до вылета, расходы на

поездку до ближайшего магазина и т.д.). Индивидуальный спрос на напиток для пассажиров, которые любят его употреблять, возрастает, поскольку теперь за бутылку газировки они будут готовы отдать большую сумму, чем ранее. Те же пассажиры, которые готовы отказаться от напитка даже при незначительном росте его цены, не будут вовсе его приобретать. Поэтому, даже в условиях конкуренции между кафе в здании аэропорта (при их значительных издержках на арендную плату за торговое место, за доставку малых партий товаров при отсутствии большого пространства для хранения продуктов, например), цена напитка может возрасть.

3) С третьей стороны, кафе могут осуществлять ценовую дискриминацию, устанавливая высокие цены на напиток. Как уже было сказано выше, индивидуальный спрос на напиток для пассажиров, которые любят его употреблять, возрастает, поскольку теперь за бутылку газировки они будут готовы отдать значительно большую сумму, чем ранее; те же пассажиры, которые готовы отказаться от напитка даже при незначительном росте его цены, не будут вовсе его приобретать (спрос таких покупателей можно считать неэластичным). Поэтому, устанавливая высокую цену напитка, кафе фактически отказываются от обслуживания клиентов с неэластичным спросом, получая наибольшую выгоду от тех покупателей, спрос которых оказывается неэластичным.