

**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Российская академия народного хозяйства и государственной службы  
при Президенте Российской Федерации»  
Олимпиада школьников по экономике  
Очный этап  
8-9 класс**

1. Пусть  $a_1, \dots, a_{2015}$  – целые числа,  $b_1, \dots, b_{2015}$  – те же числа в другом порядке. Может ли выполняться равенство  $(a_1 - b_1) \dots (a_{2015} - b_{2015}) = 2017^{2016}$ .

Ответ обосновать. (8 баллов)

**Решение:**

Равенство выполняться не может, иначе все  $(a_i - b_i)$ - целые нечётные числа и их нечетное количество. Следовательно, их сумма должна быть нечётной, а она равна 0.

**Ответ: Нет, не может.**

Баллы	Критерии оценки выполнения задания № 1
<b>8</b>	Приведена верная и обоснованная последовательность всех шагов решения. Получен верный ответ.
<b>5</b>	Приведена верная последовательность всех шагов решения. Допущены пробелы в обосновании нечетности суммы чисел.
<b>0</b>	Все случаи решения, которые не соответствуют вышеуказанным критериям выставления оценок в 5 и 8 баллов.

**2. Решить неравенство:**

$$\{x\}([x]-1) < x-2,$$

где  $[x]$  и  $\{x\}$  – соответственно целая и дробная части числа  $x$  (**9 баллов**).

**Решение:**

Пусть  $a=[x]$ ,  $b=\{x\}$ , тогда  $x=a+b$ . Учитывая это, получим:

$$b(a-1) < (a+b)-2,$$

$$ab-b-(a+b)+2 < 0,$$

$$ab-2b-a+2 < 0,$$

$$(a-2)(b-1) < 0.$$

Так как  $b$  - это дробная часть числа, отсюда следует, что  $0 \leq b < 1$ , т.е.  $(b-1)$  всегда меньше нуля. Из этого следует, что исходное неравенство будет верно тогда и только тогда, когда  $(a-2) > 0$ ,  $a > 2$ ,  $[x] > 2$ . Последнее неравенство эквивалентно тому, что  $x \geq 3$ . Это и будет искомым решением.

Ответ:  $x \geq 3$ .

Баллы	Критерии оценки выполнения задания № 2
9	Приведена верная и обоснованная последовательность всех шагов решения. Верно выполнены все преобразования и вычисления. Получен верный ответ.
5	Задача не решена, но ее решение значительно продвинуто, т.е.: - существенная часть решения выполнена верно, возможно, неточно (например, выполнено разложение на множители); - другая часть либо не выполнена, либо выполнена неверно, возможно, даже с логическими ошибками (например, не проанализированы знаки множителей). При этом решение может быть не завершено.
0	Все случаи решения, которые не соответствуют вышеуказанным критериям выставления оценок в 5 и 9 баллов.

3. Имеется 48 спичек. Они раскладываются на три неравные кучки. Затем выполняется три перекладывания спичек из кучки в кучку. Сначала из первой кучки во вторую перекладывается столько спичек, сколько в этой второй кучке имелось. Потом из второй кучки в третью перекладывается столько спичек, сколько находится в третьей. Наконец из третьей кучки в первую перекладывается столько спичек, сколько в этой первой кучке спичек. В результате таких трех перекладываний число спичек во всех кучках стало одинаково. Сколько спичек было в каждой кучке первоначально? (10 баллов)

**Решение:**

Задачу решаем с конца. В результате всех трех перекладываний число спичек во всех кучках стало одинаково, т.е. по  $48:3=16$  спичек в каждой кучке. При третьем перекладывании в первую кучку было прибавлено столько спичек, сколько в ней имелось, т.е. число спичек в ней было удвоено. Следовательно, *перед* третьим перекладыванием в первой кучке было  $16:2=8$  спичек. В третьей же кучке, из которой 8 спичек было взято, имелось *перед* третьим перекладыванием  $16+8=24$  спички. Таким образом, *перед* третьим перекладыванием распределение спичек по кучкам было следующим: первая кучка – 8 спичек, вторая кучка – 16 спичек, третья кучка – 24 спички. При втором перекладывании в третью кучку было прибавлено столько спичек, сколько в ней имелось, т.е. число спичек в ней было удвоено. Следовательно, *перед* вторым перекладыванием в третьей кучке было  $24:2=12$  спичек. Во второй же кучке, из которой 12 спичек было взято, имелось *перед* вторым перекладыванием  $16+12=28$  спичек. Таким образом, *перед* вторым перекладыванием распределение спичек по кучкам было следующим: первая кучка – 8 спичек, вторая кучка – 28 спичек, третья кучка – 12 спичек. При первом перекладывании во вторую кучку было прибавлено столько спичек, сколько в ней имелось, т.е. число спичек в ней было удвоено. Следовательно, *перед* первым перекладыванием во второй кучке было  $28:2=14$  спичек. В первой же кучке, из которой 14 спичек было взято, имелось *перед* первым перекладыванием  $8+14=22$  спички. Таким образом, *перед* первым перекладыванием, т.е. первоначально, распределение спичек по кучкам было следующим: первая кучка – 22 спички, вторая кучка – 14 спичек, третья кучка – 12 спичек.

**Ответ:** {22; 14; 12}.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания № 3
10	Приведена верная и обоснованная последовательность всех шагов решения. Верно выполнены все преобразования и вычисления. Получен верный ответ.
8	Приведена верная последовательность всех шагов решения. Допущены пробелы в обосновании решения или вычислительная ошибка или описка, не влияющие на дальнейший ход решения. В результате этой ошибки или описки может быть получен неверный ответ.
5	Задача не решена, но ее решение значительно продвинуто, т.е.: - существенная часть решения выполнена верно, возможно, неточно (например, найдено распределение спичек после отдельного перекладывания); - другая часть либо не выполнена, либо выполнена неверно, возможно, даже с логическими ошибками (например, распределение спичек после всех перекладываний найдено неверно). При этом решение может быть не завершено.
0	Все случаи решения, которые не соответствуют вышеуказанным критериям выставления оценок в 5, 8 и 10 баллов.

4. В квадрате  $ABCD$  со стороной 2 точка  $A_1$  лежит на  $AB$ , точка  $B_1$  лежит на  $BC$ , точка  $C_1$  лежит на  $CD$ , точка  $D_1$  лежит на  $DA$ . Точки  $A_1, B_1, C_1, D_1$  являются вершинами квадрата наименьшей возможной площади. Найти площадь треугольника  $AA_1D_1$ . (11 баллов)

**Решение:**

Надо доказать, что квадрат наименьшей площади получается при условии, что точки  $A_1, B_1, C_1, D_1$  - середины сторон исходного квадрата. Это равносильно тому, что минимальная длина отрезка  $A_1D_1$  получается при условии, что точки  $A_1$  и  $D_1$  - середины сторон исходного квадрата. Докажем это. Пусть  $a$  - расстояние от  $A_1$  до  $A$ , а  $b$  - расстояние от  $A$  до  $D_1$ . Требуется доказать, что  $\sqrt{a^2 + b^2} \geq \sqrt{2}$ . Так как  $a + b = 2, (a + b)^2 = 4, (a - b)^2 \geq 0$ . Следовательно,  $(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2) \geq 4, \sqrt{a^2 + b^2} \geq \sqrt{2}$ .

Искомая площадь равна  $\frac{1}{2}$ .

**Ответ:** 0,5.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания № 4
11	Приведена верная и обоснованная последовательность всех шагов решения. Верно выполнены все преобразования и вычисления. Получен верный ответ.
9	Приведена верная последовательность всех шагов решения. Допущены пробелы в обосновании решения или вычислительная ошибка или описка, не влияющие на дальнейший ход решения. В результате этой ошибки или описки может быть получен неверный ответ.
5	Задача не решена, но ее решение значительно продвинуто, т.е.: - существенная часть решения выполнена верно, возможно, неточно (например, утверждается, что квадрат наименьшей площади получается при условии, что точки $A_1, B_1, C_1, D_1$ - середины сторон исходного квадрата и верно найдена площадь треугольника $AA_1D_1$ ); - другая часть либо не выполнена, либо выполнена неверно, возможно, даже с логическими ошибками (например, это утверждение не доказано). При этом решение может быть не завершено.
0	Все случаи решения, которые не соответствуют вышеуказанным критериям выставления оценок в 5, 9 и 11 баллов.

5. Существует ли такое натуральное число, которое при делении на сумму своих цифр как в остатке, так и в частном дает число 2014? Если существует более одного такого числа, в ответ запишите их сумму. Если таких чисел не существует, в ответ запишите 0. (12 баллов)

**Решение:**

Предположим, что существует натуральное число  $n$  с суммой цифр  $s$ , для которого  $n=2014s+2014$ , откуда  $n-s=2013s+2014$ . По признакам делимости имеем, что  $n-s$  делится на 3. Но число  $2013s+2014$  на 3 не делится, т.к. число  $2013s$  кратно 3, а число  $2014$  – нет. Противоречие.

**Ответ: 0.**

Баллы	Критерии оценки выполнения задания № 5
12	Приведена верная и обоснованная последовательность всех шагов решения. Верно выполнены все преобразования и вычисления. Получен верный ответ.
10	Приведена верная последовательность всех шагов решения. Допущены пробелы в обосновании делимости на 3 или вычислительная ошибка или описка, не влияющие на дальнейший ход решения. В результате этой ошибки или описки может быть получен неверный ответ.
5	Задача не решена, но ее решение значительно продвинуто, т.е.: - существенная часть решения выполнена верно, возможно, неточно (например, верно записано уравнение для искомого числа); - другая часть либо не выполнена, либо выполнена неверно, возможно, даже с логическими ошибками (например, искомое число найдено или его отсутствие обоснованно неверно). При этом решение может быть не завершено.
0	Все случаи решения, которые не соответствуют вышеуказанным критериям выставления оценок в 5, 10 и 12 баллов.

6. На рынке совершенной конкуренции функция спроса на некоторый товар имеет вид  $Q_d(p)=150-p$ , а функция предложения этого товара:  $Q_s(p)=3p-10$ . В результате резкого увеличения числа потребителей данного товара, при прочих равных условиях, спрос на него увеличился в  $\alpha$  раз при каждом возможном уровне цен. В результате чего цена товара повысилась на 25%. Найдите величину  $\alpha$ . (8 баллов)

**Решение:**

Новая функция спроса будет иметь вид  $Q_d^{\text{new}}(p)=a(150-p)$ .

Найдем новую равновесную цену из условия равенства спроса и предложения:

$3p-10 = Q_s(p)=Q_d^{\text{new}}(p)=a(150-p): p^{\text{new}} = \frac{150a+10}{3+a}$ . Заметим, что первоначальная цена

$p_0 = 40$  (при  $\alpha = 1$ ). Тогда, зная, что цена выросла на 25%, запишем уравнение

$p^{\text{new}} = \frac{150\alpha + 10}{3 + \alpha} = 40 \cdot (1 + 0,25) = 50$ . Получим,  $a = 1,4$ .

**Критерии оценивания:**

Верно найдена и старая равновесная цена – по 2 балла.

Верно составлено уравнение, позволяющее найти  $\alpha$  - 4 балла.

Верно найдено значение  $\alpha$  - 2 балла.

7. Пусть в стране Чудо производятся и потребляются только три товара: товар альфа, товар бетта и товар гамма. Объем их потребления и цены в 2009 и 2015 гг приведены в таблице ниже. (9 баллов)

	2009 год		2015 год	
	Цена	Количество	Цена	Количество
Товар альфа	5	12	6	15
Товар бетта	7	8	5	10
Товар гамма	9	6	10	2

(а) Исходя из данных таблицы, вычислите:

1) номинальный и реальный ВВП 2009 и 2015гг, полагая, что базовым является 2009 год;

2) прирост реального ВВП в %;

(б) В качестве оценки уровня инфляции в интересующем экономистов году некоторые страны используют значение индекса потребительских цен (ИПЦ), который рассчитывается как результат деления стоимости потребительской корзины базового года в ценах интересующего года на стоимость потребительской корзины базового года в ценах базового года, умноженный на 100%. Рассчитайте ИПЦ для 2015 года по имеющимся в таблице данным.

(в) Экономисты полагают, что ИПЦ искажает реальный уровень инфляции. Одной из причин такого искажения они называют то, что ИПЦ рассчитывается по потребительской корзине базового года, а не интересующего их года. Приведите хотя бы один пример, подтверждающий предположение экономистов и аргументированно его обоснуйте.

#### Решение:

(а) Т.к. 2009г. – базовый, то реальный и номинальный ВВП в этом году совпадают и равны:

$$Y_n^{09} = \sum p_i^0 q_i^0 = 5 \cdot 12 + 7 \cdot 8 + 9 \cdot 6 = 60 + 56 + 54 = 170.$$

$$\text{Номинальный за 2015г: } Y_n^{15} = \sum p_i^t q_i^t = 6 \cdot 15 + 5 \cdot 10 + 10 \cdot 2 = 90 + 50 + 20 = 160.$$

$$\text{Реальный ВВП 2015г: } Y_r^{15} = \sum p_i^0 q_i^t = 5 \cdot 15 + 7 \cdot 10 + 9 \cdot 2 = 75 + 70 + 18 = 163.$$

$$\text{Прирост реального ВВП равен } (Y_r^{15} - Y_r^{09}) / Y_r^{09} = (163 - 170) / 170 = -0,0412 = -4,12\%$$

(б) ИПЦ равен  $(12 \cdot 6 + 8 \cdot 5 + 6 \cdot 10) / 170 = (72 + 40 + 60) / 170 = 101,17\%$ .

(в) В качестве требуемого примера можно привести ситуацию, когда за рассматриваемый период (несколько лет) значительно меняется потребительская корзина. Например, развитие техники позволяет переключиться на устройства другого функционала, что естественно снижает спрос на ранее используемую технику, и, как следствие, снижает ее цену. ИПЦ, рассчитанный по прежней потребительской корзине, в этом случае, учитывает изменение цен товаров, от использования которых отказалось большое количество потребителей, и не учитывает реальное положение дел с ценами «новых» товаров, которые потребляются в интересующий экономистов год.

#### Критерии оценивания:

(а) Верно рассчитан каждый из видов ВВП – по 1 баллу (всего 3 балла).

Верно рассчитан прирост реального ВВП – 1 балл.

(б) Верно рассчитан ИПЦ – 2 балла.

(в) Приведен пример – 3 балла.

8. Расчетливый Самсон любит обедать в итальянском ресторане «У Пабло». В очередное посещение ресторана Самсону предложили приобрести карту постоянного клиента сроком на 1 год по цене 30 000 рублей, которая дает клиенту скидку в 30% от суммы чека.

(а) Пусть в течение недели Самсон посещает ресторан трижды (вне зависимости от того, есть у него карта клиента или нет) со средней суммой в чеке в 900 рублей без учета скидки. Выгодно ли ему приобретать карту постоянного клиента?

(б) По данным информационного портала средняя сумма чека на одного человека в данном ресторане составляет 600 рублей. Сколько, в среднем, посещений в год нужно совершать одному клиенту, чтобы ему было безразлично, покупать карту ресторана или нет?

(в) В последнее время многие магазины и организации, работающие в сфере услуг, выпускают так называемые карты клиента. Некоторые из этих карт являются накопительными и дающими скидки лишь при накоплении определенной суммы на счете карты, а некоторые карты сразу предоставляют клиенту скидку, которой он может воспользоваться при любой покупке. Приведите по меньшей мере две веские причины и аргументированно обоснуйте, почему предприятиям торговли и сферы услуг выгодно осуществлять выпуск таких карт и использовать их при работе с клиентами. **(10 баллов)**

#### **Решение:**

(а) После покупки карты один обед будет стоить клиенту на  $900 \cdot 0,3 = 270$  руб. дешевле. Так как в году 52 целых недели ( $365/7 = 52,14$ ), то за год Самсон сэкономит на скидках  $270 \cdot 3 \cdot 52 = 42120$  руб., что больше, чем стоимость карты. Поэтому ему выгодно покупать карту.

(б) В среднем обед при пользовании картой будет стоить на  $600 \cdot 0,3 = 180$  руб. дешевле. Тогда из условия равенства расходов определим, что нужно посещать  $30000/180 = 166,6$ , т.е. при посещении ресторана 167 раз в год и более приобретать карту будет выгодно, а при посещении ресторана 166 раз и менее приобретать карту будет невыгодно.

(в) Использование карт с накопительной системой скидок позволяет фирмам «удерживать» постоянных клиентов, препятствуя им, таким способом, «переключаться» на услуги других фирм.

Использование карт, предоставляющих скидки без накопительной системы, позволяет также привлекать скидками новых, «удерживать» старых клиентов.

Часто предоставление таких карт клиентам требует авторизации их в базах данных компаний. В этом случае компании могут информировать своих клиентов о планируемых акциях, а также небескорыстно предоставлять клиентские базы данных своим партнерам. Кроме того, выпуск подобных карт требует от владельцев компаний дополнительных расходов. Поэтому может сигнализировать клиентам о стабильности компании, о ее заботе о своих клиентах и готовности предоставлять им скидки.

#### **Критерии оценивания:**

(а) Верно произведены расчёты, позволяющие сравнить расходы - **3 балла**,

Сделан верный вывод о выгодности приобретения карты

(б) Верно найдено количество посещений - **3 балла**,

(в) по 2 балла **(всего 4 балла)** за причину и соответствующее объяснение.



9. Рассмотрите две страны, А и В, которые имеют одинаковые посевные площади. На них они могут выращивать только баклажаны и кукурузу. Альтернативные издержки производства любой из культур в каждой из стран постоянны. Урожайность обеих культур в случае, если вся территория будет засажена только одной из культур, приведена в таблице ниже: **(11 баллов)**

Страна		
	Баклажаны	Кукуруза
А	10 тонн	8 тонн
В	18 тонн	12 тонн

(а) Определите, какие страны обладают абсолютным и сравнительным преимуществами в производстве кукурузы и баклажан. Постройте кривые производственных возможностей каждой из стран.

(б) Известно, что на мировом рынке, куда свою сельхозпродукцию поставляют обе страны, цены кукурузы и баклажан одинаковы и равны Р, каждая из стран может продать или купить любой желаемый объем овощей. Жители каждой из стран питаются только данными продуктами и всегда предпочитают употреблять их только в пропорции 1:1 (то есть, употребляя в пищу 1 количественную единицу баклажанов, жители обязательно должны съесть и 1 количественную единицу кукурузы и не употребляют ни один овощ без другого). Какой объем каждой сельхозпродукции будет поставлять на мировой рынок каждая из стран, и какой объем каждой продукции будет потребляться жителями этих стран? Считайте, что правительства стран А и В заботятся о своих гражданах и стараются обеспечить их как можно большим объемом овощей.

**Решение:**

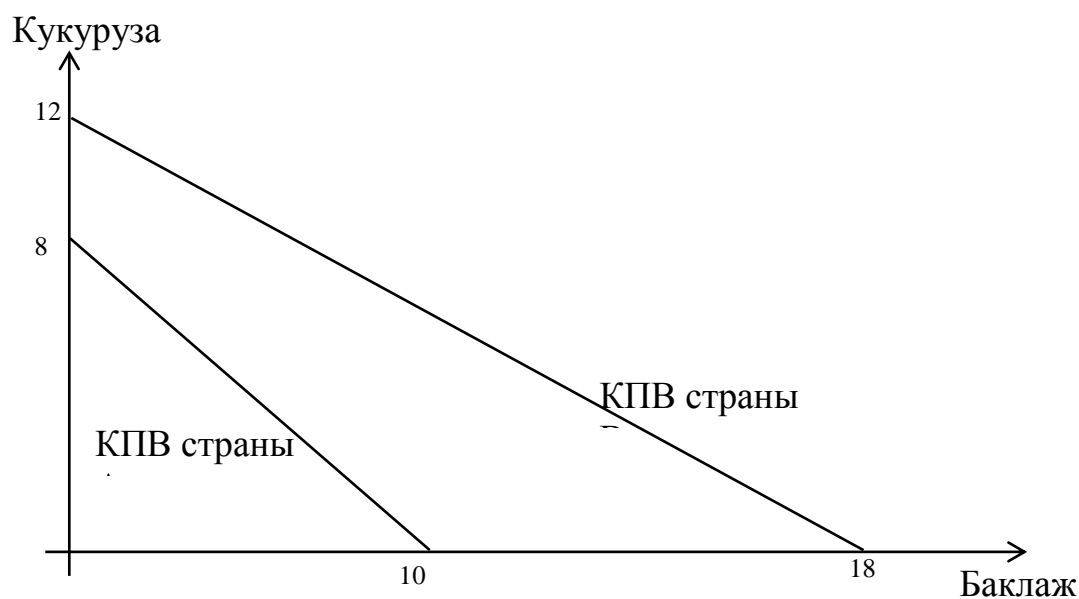
(а) Страна В обладает абсолютным преимуществом в выращивании каждого товара, поскольку на одинаковом объеме посевных площадей может вырастить больше каждого товара, чем страна А.

Альтернативные издержки выращивания одной весовой единицы (вес.ед.) баклажан в стране А равны  $8/10=0,8$  вес. ед. кукурузы. То есть, чтобы увеличить объем выращивания баклажан на 1 вес.ед., нужно отказаться от выращивания 0,8 вес.ед. кукурузы.

Альтернативные издержки выращивания одной вес.ед. баклажан в стране В равны  $12/18<0,8$ .

То есть страна В обладает сравнительным преимуществом в выращивании баклажан, поскольку ее альтернативные издержки в выращивании этого продукта меньше, чем в стране А.

Аналогично, страна А обладает сравнительным преимуществом в выращивании кукурузы.



(б) Поскольку каждая из стран старается обеспечить своих жителей как можно большим объемом овощей в пропорции 1:1, и овощи свободно продаются и покупаются на мировом рынке, необходимо обеспечить наибольший доход каждой стране.

Цены овощей одинаковы, а альтернативные издержки выращивания 1 вес.ед. баклажан в обеих странах меньше 1, следовательно, большую сумму денег каждая из стран сможет заработать, если обе страны будут специализироваться в выращивании баклажан. В этом легко убедиться: Если выращивать только баклажаны и продавать их на мировом рынке, то страны А и В заработают  $10P$  и  $18P$ , соответственно. Увеличение объема выращивания кукурузы приведет к снижению доходов стран, поскольку  $10P - P + 8P/10 < 10P$  и  $18P - P + 12P/18 < 18P$ .

На полученный доход странам необходимо приобрести максимальное количество овощей в пропорции 1:1. Так как цены этих овощей одинаковы, то страна А сможет потреблять  $10P/2P=5$  тонн кукурузы и столько же баклажанов, а страна В сможет потреблять  $18P/2P=9$  тонн кукурузы и столько же баклажанов.

Можно рассуждать и так: каждая из стран вырастит максимальное количество баклажан, которая она может вырастить на своих площадях, а затем половину урожая (поскольку цены овощей одинаковы) продаст на мировом рынке, купив на все вырученные от продажи средства кукурузу.

#### **Критерии оценивания:**

(а) Верно и аргументировано определено, какая из стран обладает абсолютным преимуществом – **2 балла**.

Верно и аргументировано определено, какая из стран обладает сравнительным преимуществом – **2 балла**.

Верно изображены КПВ стран – **2 балла**.

(б) Верно и аргументировано определена специализация стран при выходе на мировой рынок – **2 балла**.

Верно и аргументировано определено количество овощей, которое будет потреблять каждая из стран – **3 балла**.

10. Рассмотрите рынок труда врачей. Министерство здравоохранения предлагает вернуть распределение на работу для выпускников медицинских вузов и сделать работу в государственных медучреждениях обязательной для всех молодых врачей. (12 баллов)

(а) Предположим, правительство введет ограничение на минимальное количество лет, которые должны отработать молодые врачи после получения диплома (при условии обучения на бюджетном месте) в государственных медицинских организациях.

Опишите в общем виде, используя экономические модели, соответствующие графики и аргументацию, как может измениться предложение труда врачей, спрос на них, равновесная заработная плата.

(б) Как при этом, на ваш взгляд, может измениться равновесная цена на услуги коммерческого здравоохранения?

Аргументируйте ваш ответ.

### Решение:

Приведем возможную аргументацию к решению, не являющуюся единственной и абсолютной.

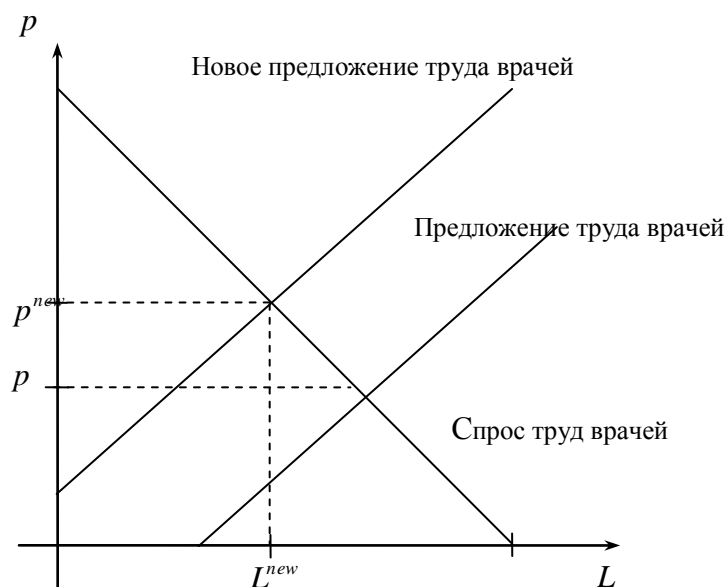
(а)

При введении дополнительного ограничения спрос на обучение на бюджетных местах сначала может упасть, что приведет впоследствии к снижению предложения труда врачей в государственном секторе. Кроме того, чтобы избежать исполнения обязательств перед государством после получения образования на бюджетных местах, часть абитуриентов, ранее желающих поступить на бюджетные места, будут переходить на платные места, и часть абитуриентов поступят на бюджетные места по другим направлениям образования. Таким образом, при прочих равных, в совокупности на бесплатных и платных местах обучится не большее число будущих врачей, чем ранее, и совокупное предложение труда врачей снизится. Спрос при прочих равных не изменится. Равновесная заработная плата при снижении предложения вырастет.

Однако, наблюдаемое повышение заработной платы врачей и ожидание этого повышения могут стимулировать молодых людей учиться на врачей, даже несмотря на обязательную отработку после обучения.

Кроме того, снижение конкуренции в соревнованиях за бюджетные места при поступлении также может стимулировать молодых людей к поступлению на медицинские специальности.

Поэтому результат действия этих эффектов может быть не однозначным.



(б) Поскольку на платных местах, по нашему предположению, обучатся все те же, кто планировал и раньше, плюс те, кто раньше думал учиться на бюджетных местах, то предложение труда в коммерческом секторе медицинских услуг. Это приведет к увеличению предложения коммерческих услуг и, следовательно, к снижению равновесной цены коммерческих медицинских услуг (предполагаем, что спрос на коммерческие и «бесплатные» услуги не изменился).

**Критерии оценивания:**

**(а) 2 балла** за верную аргументацию относительно изменения предложения труда в одном из направлений.

**2 балла** за верную аргументацию изменения предложения труда учителей в другом направлении.

**1 балл** за верную аргументацию относительно изменения заработной платы.

**3 балла** за верное графическое представление приведенной аргументации.

**(б) 4 балла** за аргументированное обоснование изменения цены труда в коммерческом секторе.