ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «РОБОФЕСТ» по ФИЗИКЕ 2018-2019 года

МАТЕРИАЛЫ ЗАДАНИЙ

ОТБОРОЧНЫЙ ЭТАП

Участники отборочного этапа участвовали в региональных робототехнических соревнованиях и выполняли задания отборочного этапа по физике. Задания робототехнических соревнований и задания по физике были тематически связаны. Все участники, выполняли **один из 12 вариантов** заданий. Задания были разделены по возрастным категориям.

Максимальная сумма баллов за робототехнические соревнования: 50 баллов.
Максимальная сумма баллов за задание по физике: 50 баллов.
Максимальная сумма баллов участника на отборочном этапе: 100 баллов.
Распределение баллов задания по вопросам варьировалась от задания к заданию, но во всех заданиях оценки за каждый из вопросов, в соответствии с уровнем сложности составляли **5 баллов**, **10 баллов**, **15 баллов** и **20 баллов** (сумма – **50 баллов**).

ЗАДАНИЯ ОТБОРОЧНОГО ЭТАПА ПО ФИЗИКЕ:
вопросы, ответы и пояснения
Задание 1 (7-8 классы)

1. Средняя скорость тела на участке пути – это отношение пути *s* тела к длительности интервала времени *t*, за который тело прошло этот путь: $V_{cp} = \frac{s}{t}$.

1.1. Робот проезжает трассу, состоящую из горизонтального участка длиной $L = 6$ м и симметричной горки (то есть такой, у которой подъем и спуск одинаковы по длине и наклону). Полная ширина горки $D = 288$ см, а высота $h = 42$ см. Робот движется по горизонтальному участку со скоростью $v_1 = 1{,}0$ м/с, на подъеме – со скоростью $v_2 = 0{,}6$ м/с, а на спуске – со скоростью $v_3 = 1{,}2$ м/с. Найдите среднюю скорость робота на трассе. Как изменится ответ, если при той же скорости на горизонтальном участке скорость на подъеме в $k > 1$ раз уменьшится, а на спуске во столько же раз увеличится?

1.2. Пусть скорость робота на некотором участке пути изменяется по закону $v(t) = v_0 + a \cdot t$, где a – постоянная величина, измеряемая в м/с^2. Эта величина в физике называется *ускорением*, а такое движение – *равноускоренным*. Какой будет средняя скорость этого движения на участке пути, пройденном за время t? Выведите формулу для средней скорости и найдите ее численное значение, если $v_0 = 1{,}5$ м/с, $a = 1{,}5$ м/с^2, $t = 2$ с.

1.3. Определите средние скорости тел (V_1 и V_2), зависимость скорости которых от времени показана на рисунках 1 и 2. На рис.2 криволинейные участки в используемом

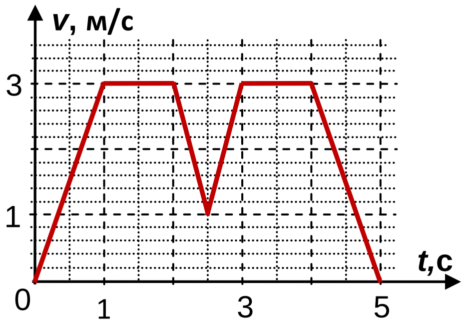


рис.1

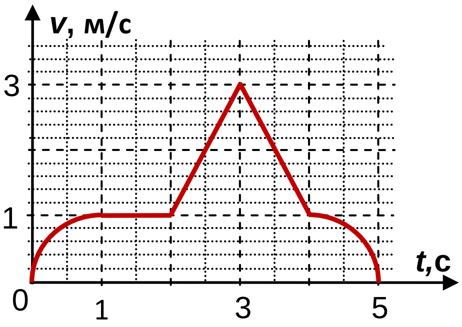


рис.2

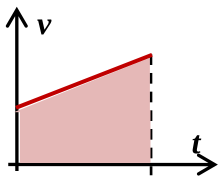
масштабе являются четвертями окружности. Ответ запишите в м/с, при необходимости округляя до сотых и поясните способ его получения.

1.4. Два робота (№1 и №2) проезжают одну и ту же трассу несколько раз. В первом раунде робот №1 проехал трассу быстрее на $\Delta t = 6$ с. Во втором раунде №2 увеличил среднюю скорость прохождения трассы в 1,5 раза, и теперь он проехал трассу быстрее на $\Delta t' = 4$ с. В третьем раунде робот №1 увеличил свою среднюю скорость на трассе на 20%. Кто из роботов проедет трассу быстрее в 3-м раунде и на сколько?

Ответы:

1.1. **$V_{ср}$=(12/13) м/с ≈ 0,92 м/с. Средняя скорость уменьшится**. Пусть l – длина каждой из двух наклонных поверхностей горки. По теореме Пифагора $l=\sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2+h^2}=1{,}5$ м. Значит, полное время прохождения трассы $t=\frac{L}{v_1}+\frac{l}{v_2}+\frac{l}{v_3}=\frac{Lv_2v_3+lv_1(v_2+v_3)}{v_1v_2v_3}=9{,}75$ с. Путь работа $s=L+2l=9$ м, поэтому средняя скорость равна $V_{cp}=\frac{(L+2l)v_1v_2v_3}{Lv_2v_3+lv_1(v_2+v_3)}=\frac{12}{13}$ м/с, или $V_{cp}\approx 0{,}92$ м/с. При указанном изменении скоростей новое время $t=\frac{L}{v_1}+\frac{kl}{v_2}+\frac{l}{kv_3}$, и после подстановки численных значений: $t=6\,\text{с}+k\cdot 2{,}5\,\text{с}+\frac{1{,}25\,\text{с}}{k}=6\,\text{с}+\frac{2{,}5\,\text{с}}{\sqrt{2}}\cdot\left(k\sqrt{2}+\frac{1}{k\sqrt{2}}\right)$. Нетрудно заметить, что при любом x справедливо неравенство $x+\frac{1}{x}\geq 2$, причем равенство (то есть минимальное значение этого выражения) достигается при $x=1$. У нас $x=k\sqrt{2}>\sqrt{2}>1$, поэтому это выражение при увеличении k от 1 всегда увеличивается, то есть время прохождения трасы после указанного изменения скоростей увеличится. Следовательно, средняя скорость уменьшится.

1.2. $V_{cp}=v_0+\frac{at}{2}$**, при заданных значениях** $V_{cp}=3$ **м/с.** В этом случае можно действовать двумя путями: (1) Заметить, что скорость равномерно растет от v_0 до $v_0+a\cdot t$ т, и найти среднее непосредственно : $V_{cp}=\frac{1}{2}(v_0+v_0+at)=v_0+\frac{at}{2}$. (2) Построив график



зависимости скорости от времени, можно догадаться, что пройденный путь возможно найти как площадь трапеции – эта площадь складывается из площадей очень большого числа очень тоненьких «полосок», каждая из которых соответствует пути $\Delta s=v(t)\Delta t$, пройденному за очень маленький интервал времени от t до $t+\Delta t$. Тогда можно найти, что $s=\frac{v_0+v_0+at}{2}t=v_0t+\frac{at^2}{2}$. Значит, $V_{cp}=\frac{s}{t}=v_0+\frac{at}{2}$. Подставляя численные значения, находим, что $V_{cp}=3$ м/с.

1.3. $V_1=2{,}20$ **м/с и** $V_2\approx 1{,}31$ **м/с.** В первом случае можно рассмотреть движение как набор равноускоренных и равномерных движений, и воспользоваться соответствующими формулами для нахождения полного пути. Однако проще сразу искать путь как площадь под графиком скорости. Тогда в первом случае $s_1=11$м, и, следовательно, $V_1=\frac{s_1}{t}=2{,}2$ м/с. Во втором случае путь на школьном уровне определяется только через площадь: $s_2=\left(5+\frac{\pi}{2}\right)$м, и $V_2=\frac{s_2}{t}\approx 1{,}31$ м/с.

1.4. **В третьем раунде роботы проедут трассу за одинаковое время.** Пусть L – длина трассы, а v_1 и v_2 – скорости роботов в первом раунде. Тогда $\Delta t=t_2-t_1=\frac{L}{v_2}-\frac{L}{v_1}=L\frac{v_1-v_2}{v_1v_2}$.

Аналогично во втором раунде $\Delta t' = t_1' - t_2' = \frac{L}{v_1} - \frac{2L}{3v_2} = L\frac{3v_2 - 2v_1}{3v_1v_2}$. Следовательно, $\frac{\Delta t}{\Delta t'} = \frac{3(v_1 - v_2)}{3v_2 - 2v_1} \Rightarrow v_2 = \frac{3\Delta t' + 2\Delta t}{3(\Delta t' + \Delta t)}v_1 = 0{,}8v_1$. В третьем раунде:

$$\Delta t'' = t_1'' - t_2'' = \frac{5L}{6v_1} - \frac{2L}{3v_2} = L\frac{5v_2 - 4v_1}{6v_1v_2} = \frac{v_1v_2}{v_1 - v_2}\Delta t\frac{5v_2 - 4v_1}{6v_1v_2} = \frac{5v_2 - 4v_1}{6(v_1 - v_2)}\Delta t = 0\,.$$

Значит, в третьем раунде роботы проедут трассу за одинаковое время.

КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ ЗАДАНИЯ 1:

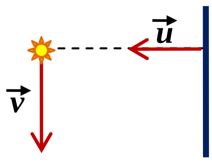
№	критерий	максимальный балл
1.1	Правильное вычисление полного пути – 1 балл, правильное вычисление полного времени – 2 балла, ответ для средней скорости – 2 балла, правильный ответ на вопрос про изменение скорости – 5 баллов.	**10**
1.2	Правильная формула – 3 балла, правильный численный ответ – 2 балла.	**5**
1.3	Правильный ответ по каждому случаю – по 5 баллов, обоснование – 2 балл для рис.1 и 3 балла для рис.2.	**15**
1.4	Для записи формул используются величины L, v_1 и v_2 – 1 балл, Правильно записаны соотношения для Δt, $\Delta t'$ и $\Delta t''$ (через длину трассы и скорости) – по 3 балла за каждое. Определено соотношение скоростей – 5 баллов, получен правильный ответ – 5 баллов.	**20**

Максимальный балл за задание: **50**.

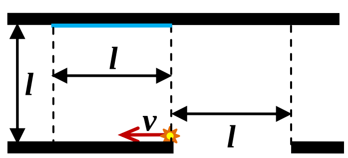
Задание 2 (8-9 классы)

2. Рассмотрим оптические системы, которые могут являться частью оборудования различных технических устройств.

2.1. Два робота перемещаются по площадке во взаимно-перпендикулярных направлениях. На одном из них (движущемся со скоростью $v = 3$ м/с) находится небольшая лампочка, на другом (его скорость равна $u = 2$ м/с) закреплено вертикально плоское зеркало (см. рисунок). С какой скоростью движется изображение лампочки в этом зеркале (относительно неподвижного наблюдателя на площадке)?

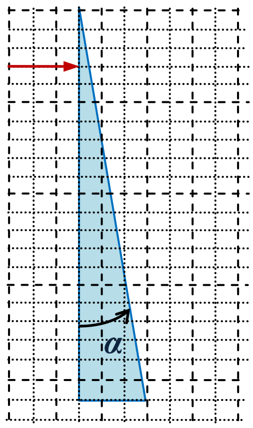


2.2. Робот небольших размеров движется с постоянной скоростью $v = 1$ м/с вдоль стены коридора шириной $l = 1$ м, в одной из стен которого есть проем шириной $l = 1$ м, а на другой висит плоское зеркало такой же в точности ширины (1 м), по высоте в точности соответствующее высоте стены. Толщина панелей, из которых сооружены стены, превышает размеры робота, панели покрашены черной краской (то есть поглощают почти весь падающий на них свет). На роботе установлена маленькая лампочка. В некоторый момент времени робот находится радом с краем проема. В течении какого времени после этого свет от лампочки попадает в проем?



2.3. В некоторой оптической системе используется прозрачный клин с углом при вершине

$\alpha = 15°$ (см. рисунок: реальные пропорции клина в точности такие же, как на рисунке). На одну из его вертикальных плоских поверхностей падает из воздуха нормально (так, как показано на рисунке) горизонтальный тонкий лазерный луч. Известно, что при нормальном падении на любую из граней клина – как снаружи, так и изнутри, примерно половина потока энергии световых пучков отражается, и примерно столько же – проходит, а поглощением на поверхности и в веществе клина можно пренебречь. Показатель преломления вещества клина равен $n = 1{,}5$. Сколько лучей выйдет из клина обратно в воздух (луч, отраженный в точке падения, не считать)? Выполните построение хода лучей в клине и ответьте на вопрос. Обоснуйте правильность своего ответа.

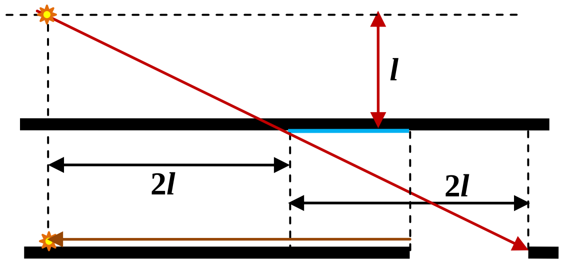


2.4. Фотодатчик состоит из фотоэлемента, ток в цепи которого пропорционален мощности поступающего на фотоэлемент света, и собирающей линзы, направляющей свет от внешнего источника на фотоэлемент. Фотоэлемент расположен в главном фокусе линзы, его чувствительная поверхность в виде кружка площадью $\sigma = 4\,\text{мм}^2$ развернута перпендикулярно главной оптической оси. Диаметр линзы $d = 36\,\text{мм}$, ее фокусное расстояние $F = 50\,\text{см}$. Окуляр фотоэлемента нацеливается точно на маленькую лампочку, мощность светового излучения которой $P = 62{,}8\,\text{Вт}$, причем лампочка светит по всем направлениям одинаково. Известно, что при мощности поступающего света $P_0 = 0{,}1\,\text{мВт}$ ток фотодатчика равен $I_0 = 15$ мА. Каким будет ток фотодатчика, если лампочка перемещается таким образом, что расстояние от нее до окуляра изменяется от 5м до 7м? Поглощением света пренебречь.

Ответы:

2.1. **5 м/с**. Изображение объекта в плоском зеркале всегда расположено на одном перпендикуляре к плоскости зеркала с объектом. Поэтому составляющая скорости изображения вдоль плоскости зеркала равна соответствующей составляющей скорости объекта: $v'_{||} = 3\,\text{м/с}$. Расстояние от плоскости зеркала до изображения равно расстоянию от объекта до плоскости зеркала, то есть расстояние между объектом и изображением всегда равно удвоенному расстоянию от объекта до плоскости зеркала. Значит, при уменьшении расстояния от объекта до плоскости зеркала на Δx расстояние между изображением и лампочкой в направлении, перпендикулярном скорости лампочки, уменьшается на $2\Delta x$. Таким образом, перпендикулярная плоскости зеркала составляющая скорости изображения $v'_{\perp} = 2u = 4\,\text{м/с}$. В результате $v' = \sqrt{(v'_{||})^2 + (v'_{\perp})^2} = 5\,\text{м/с}$. Другой способ решения состоит в переходе в систему отсчета, связанную с зеркалом. Изображение вектора скорости в зеркале в этой СО имеет такую же продольную и обратную перпендикулярную составляющую скорости (по отношению к самому вектору): $\vec{v}'_з = \vec{v} + \vec{u}$. После возвращения в СО «площадка»: $\vec{v} = \vec{u} + \vec{v}'_з = \vec{v} + 2\vec{u}$. С учетом того, что $\vec{v} \perp \vec{u}$, для модуля скорости получаем тот же ответ.

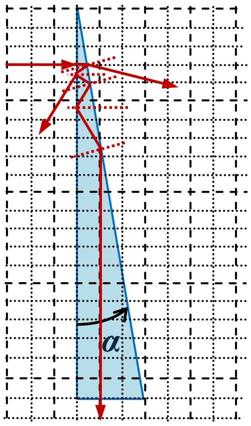
2.2. **3 с.** Ясно, что в проем попадают световые лучи, отраженные от зеркала. Лучи, отраженные от зеркала, могут приходить в проем только от точек поверхности зеркала.



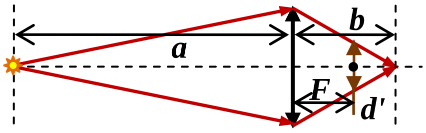
Поэтому зона, из которой свет от лампочки попадает в проем, может быть определена следующим образом: построим траекторию движений изображения лампочки в зеркале и отметим крайнее положение изображения, из которого луч, идущий в край проема, проходит через плоскость зеркала (см. рисунок). Как видно, для ухода из этой зоны лампочка должна сместиться на расстояние $3l = 3\,\text{м}$. На это уйдет время $t = \dfrac{3l}{v} = 3\,\text{с}$.

2.3. **Три.** Для ответа на этот вопрос нужно провести построение хода лучей внутри клина.

При первом падении «изнутри» на поверхность клина угол падения будет равен $\alpha = 15°$. Нетрудно заметить, что при втором падении этот угол станет равным $2\alpha = 30°$, и так далее. Луч выходит из оптически более плотной среды в том случае, если угол падения γ не превосходит угла «полного внутреннего отражения», то есть если $\sin(\gamma) \le \frac{1}{n} = \frac{2}{3}$ (в противном случае для синуса угла преломления получается значение, большее 1, что невозможно – преломленный луч отсутствует). Это условие выполняется только для первых двух отражений, поскольку $\sin(3\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{2}{3}$. При пятом отражении угол падения $5\alpha = 75°$, и затем луч идет параллельно грани клина ($6\alpha = 90°$), и выходит через его основание. Итак, из клина обратно в воздух выйдет три луча.



2.4. **12 мА.** Отметим, что размеры линзы много меньше расстояния до источника, и поэтому можно считать, что площадь участка фронта световой волны от лампочки, попадающего в окуляр, равна $\pi d^2/4$. Полная площадь фронта при расстоянии a от лампочки - это $4\pi a^2$, и мощность света, попадающего в окуляр, равна $P' = (d/4a)^2 P$. Лучи от лампы фокусируются линзой на расстоянии b от нее (см.рисунок). Это расстояние можно найти по формуле тонкой линзы: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F} \Rightarrow b = \frac{aF}{a-F}$. Значит, диаметр светлого пятна в фокальной плоскости линзы $d' = \frac{b-F}{b} d = \frac{F}{a} d$. Если этот диаметр больше, чем диаметр чувствительной поверхности фотоэлемента, то фотоэлемент получит только часть светового потока, то есть мощность света, попадающего на фотоэлемент, будет $P'' = \frac{4\sigma}{\pi d'^2} P' = \frac{\sigma}{4\pi F^2} P$.



Проверим использованное условие: $\sigma < \frac{\pi d'^2}{4} = \frac{\pi F^2 d^2}{4a^2}$ при $a < \frac{\sqrt{\pi} Fd}{2\sqrt{\sigma}} \approx 7{,}98$ м. Как видно, во всем заданном диапазоне значений a это требование выполняется. В результате, ток фотодатчика $I = \frac{P''}{P_0} I_0 = \frac{\sigma P}{4\pi F^2 P_0} I_0 \approx 12$ мА.

КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ ЗАДАНИЯ 2:

№	критерий	максимальный балл
1.1	Правильное указание положения изображения – 2 балла, правильное вычисление $v'_{\parallel}$ – 2 балла, правильное вычисление $v'_{\perp}$ – 4 балла, правильный ответ модуля скорости – 2 балла.	**10**
1.2	Правильное построение – 3 балла, правильный численный ответ – 2 балла.	**5**
1.3	Правильное построение хода лучей – 5 баллов, указание на явление полного внутреннего отражения – 5 баллов, правильный ответ – 5 баллов.	**15**
1.4	Используется формула тонкой линзы – 2 балла, используется равномерность распределения энергии излучения по фронту световой волны – 2 балла, правильно определена P' – 3 балла, определен диаметр освещенного пятна в фокальной плоскости – 4 балла, установлено, что $\sigma < \frac{\pi d'^2}{4}$ – 4 балла, получен правильный ответ – 5 баллов.	**20**

Максимальный балл за задание: **50**.

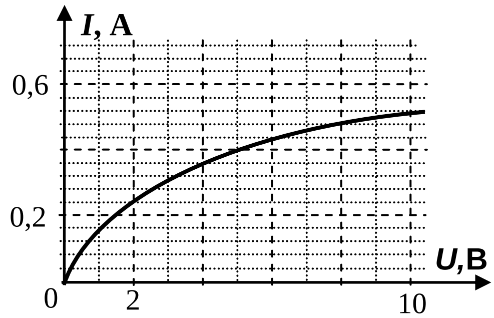
Задание 3 (10-11 классы)

3. Допустим, у нас есть несколько одинаковых аккумуляторов и вольтметр. При подключении вольтметра к клеммам одного аккумулятора он показывает напряжение $U_1 = 9$ В, а при подключении к двум аккумуляторам, соединенным параллельно – напряжение $U_2 = 10$ В.

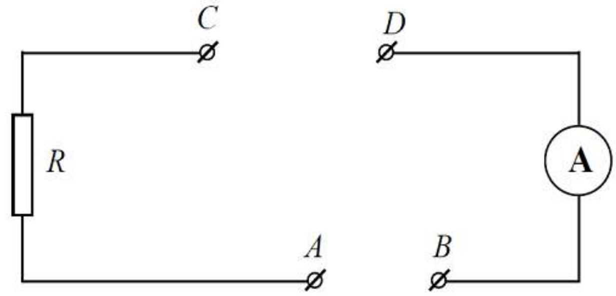
3.1. С чем связано такое заметное различие показаний? Соотношение каких параметров вольтметра и аккумулятора можно определить на основании этих измерений?

3.2. Что покажет этот же вольтметр, если его подключить к тем же двум аккумуляторам, но соединенным последовательно? А что на его месте показал бы «практически идеальный» вольтметр?

3.3. Существуют элементы электрических цепей, у которых протекающий ток не пропорционален приложенному напряжению. Например, у ламп накаливания ток растет медленнее, чем напряжение (такие элементы, не подчиняющиеся закону Ома, называют «нелинейными»). Связь тока с напряжением для подобных элементов описывается вольт-амперной характеристикой (ВАХ). Рассмотрим лампу, ВАХ которой показана на рисунке. Оказалось, что при подключении ее к одному аккумулятору ток через лампу точно такой же, как и через вольтметр, также подключенный к одному аккумулятору. Какой ток течет при этом через лампу? Какая мощность потребляется лампой? Чему равно внутреннее сопротивление аккумулятора?



3.4. Рассмотрим схему, показанную на рисунке. Между клеммами *A* и *B* поддерживается неизменное напряжение. Если замкнуть клеммы *C* и *D* проводом с пренебрежимо малым сопротивлением, то практически идеальный амперметр в схеме покажет силу тока, равную $I = 6{,}0$ А. Допустим, что у нас есть две одинаковые лампочки накаливания, для которых связь силы тока с приложенным напряжением дается формулой $I(U) = I_0\sqrt{\dfrac{U}{U_0}}$.



Если соединить эти лампочки последовательно и подключить к клеммам *C* и *D*, амперметр покажет ток $I_1 = 1{,}0$ А. Каковы будут показания амперметра, если подключить к клеммам *C* и *D* эти же две лампочки, но соединенные параллельно?

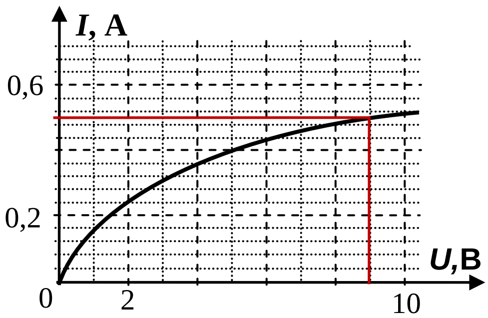
Ответы:

3.1. **С тем, что аккумулятор и вольтметр не идеальны – внутреннее сопротивление аккумулятора не равно нулю, а внутреннее сопротивление вольтметра не очень велико. Можно найти, что отношение их внутренних сопротивлений $\dfrac{R_V}{r} = 4$.** Действительно, при учете внутренних сопротивлений ток в цепи с одним аккумулятором равен $I_1 = \dfrac{U_0}{R_V + r}$, и напряжение на вольтметре $U_1 = \dfrac{R_V U_0}{R_V + r}$ (здесь U_0 – напряжение на клеммах аккумулятора при разомкнутой цепи). При двух аккумуляторах, соединенных параллельно, напряжение на них одинаково, а общее внутреннее сопротивление равно $r/2$, то есть $U_2 = \dfrac{R_V U_0}{R_V + r/2}$.

Следовательно, $\dfrac{U_2}{U_1} = \dfrac{2(R_V + r)}{2R_V + r} \Rightarrow \dfrac{R_V}{r} = \dfrac{2U_1 - U_2}{2(U_2 - U_1)} = 4$.

3.2. **15 В.** В этом случае напряжения и сопротивления складываются, то есть $U_2' = \dfrac{R_V \cdot 2U_0}{R_V + 2r} = \dfrac{2R_V + r}{R_V + 2r} U_2 = \dfrac{3}{2} U_2 = 15\,\text{В}$.

3.3. **Через лампу течет ток 0,5 А, она потребляет мощность 4,5 Вт, внутреннее сопротивление аккумулятора 4,5 Ом.** Из условия следует, что напряжение на лампе равно Напряжению на вольтметре при подключении к одному аккумулятору, то есть $U_1 = 9\,\text{В}$. Тогда по ВАХ можно определить ток: он равен 0,5 А. Потребляемая мощность $P = U_1 \cdot I = 4{,}5\,\text{Вт}$. Точка ВАХ (U_1, I) есть решение системы уравнений



$$\begin{cases} I = I_Л(U) \\ U_1 = U_0 - Ir \end{cases}.$$

Из результатов пункта 3.1. можно найти, что $U_0 = \left(1 + \dfrac{r}{R_V}\right) U_1 = 11{,}25$ В. Первое уравнение задает точки ВАХ лампы, второе описывает прямую, пересекающую ось I в точке $I_0 = \dfrac{U_0}{r}$ и ось U в точке U_0. При уменьшении напряжения от U_0 до U_1 ток вдоль этой прямой растет от нуля до 0,5 А. Значит, $I_0 = \dfrac{U_0}{U_0 - U_1} \cdot 0{,}5\,\text{А} = 2{,}5\,\text{А}$. Поэтому $r = \dfrac{U_0}{I_0} = 4{,}5\,\text{Ом}$.

3.4. **2,4 А.** Опыт с коротким замыканием клемм C и D позволяет записать для напряжения между клеммами A и B: $U_{AB} \approx IR$. При последовательном подключении ламп ток в них одинаков и равен I_1, а напряжения на лампах одинаковы и равны $U(I_1) = U_0 \left(\dfrac{I_1}{I_0}\right)^2$. Поэтому:

$2U_0 \left(\dfrac{I_1}{I_0}\right)^2 = U_{AB} - I_1 R = (I - I_1)R$. Если при параллельном включении через амперметр течет ток I_2, то ток в каждой из ламп равен $\dfrac{I_2}{2}$, и поэтому $U_0 \left(\dfrac{I_2}{2I_0}\right)^2 = U_{AB} - I_2 R = (I - I_2)R$.

Разделив эти соотношения друг на друга, получаем уравнение для определения I_2: $I_2^2 + \dfrac{8I_1^2}{I - I_1} I_2 - \dfrac{8I I_1^2}{I - I_1} = 0$. Физический смысл имеет только положительный корень, поэтому $I_2 = \dfrac{2I_1}{I - I_1}\left[\sqrt{4I_1^2 + 2I(I - I_1)} - 2I_1\right] = 2{,}4$ А.

КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ ЗАДАНИЯ 3:

№	критерий	максимальный балл
1.1	Правильно указана причина расхождения – 4 балла, записаны выражения для напряжений U_1 и U_2 – 4 балла , правильно вычислено отношение внутренних сопротивлений – 2 балла.	**10**
1.2	Правильное построение – 3 балла, правильный численный ответ – 2 балла.	**5**

1.3	Присутствует система уравнений для тока и напряжения – 2 балла, идея графического решения этой системы – 2 балла, правильно найден ток через лампу – 5 баллов, правильно найдена мощность – 4 балла, использование найденного значения U_0 – 2 балла, правильный ответ для сопротивления – 5 баллов.	**20**
1.4	Записана связь постоянного напряжения и тока I – 2 балла, получено уравнение для последовательного соединения – 3 балла, получено уравнение для параллельного соединения – 3 балла, получено уравнение для I_2 – 4 балла, получен правильный ответ – 3 балла.	**15**

Максимальный балл за задание: **50**.

Задание 4 (9-11 классы)

4. Роботу необходимо преодолеть симметричную горку (подъем и спуск горки одинаковы по длине и наклону) высотой 21 см и полной шириной 144 см. Масса робота равна 1 кг, коэффициент трения между его ведущими (передними) колесами и поверхностью горки $\mu = \frac{5}{8}$. Геометрические параметры робота: у него две пары колес, расстояние между осями которых $l = 12$ см, расстояние между осью задних колес и перпендикулярной опоре плоскостью, в которой лежит центр масс, $l' = 10$ см, расстояние от центра масс до плоскости опоры $h = 6$ см. Радиус колес равен $r = 3$ см. Режим работы двигателя выбран так, что ведущие колеса всегда проскальзывают. При этом силой трения, действующей на вторую пару колес, можно пренебречь. Кроме того, можно пренебрегать сопротивлением воздуха и считать наклон горки на подъеме и на спуске почти постоянным. Ускорение свободного падения считать равным 10 м/с^2.

4.1. Определите силу нормальной реакции опоры, действующую на ведущие (передние) колеса. С каким ускорением движется робот на подъеме?

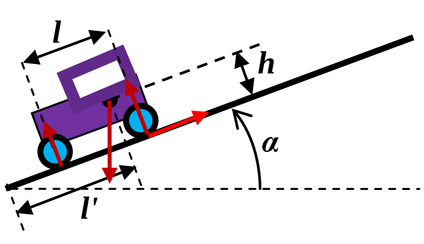
4.2. Не перевернется ли робот на спуске? Ответ обосновать.

4.3. Найдите увеличение механической энергии робота в процессе подъема. Считать, что робот начинает подъем с очень маленькой начальной скоростью.

4.4. Оказалось, что в процессе подъема ведущие колеса робота совершили ровно 6 полных оборотов. Найдите количество тепла, выделившееся из-за трения за время подъема. Пренебрегая прочими потерями, вычислите, какую работу совершил двигатель на подъеме.

Ответы:

4.1. **Сила нормальной реакции для ведущих колес 6,6 Н, ускорение на подъеме примерно 1,325 м/с^2.** На робота действуют силы нормальной реакции передних и задних колес N_1 и N_2, сила трения скольжения ведущих колес, сила тяжести mg. Так как робот не отрывается от поверхности и не «кувыркается», то сумма проекций сил на перпендикуляр к поверхности подъема и сумма моментов должны равняться нулю. Первое условие дает $N_1 + N_2 = mg\cos(\alpha)$, а правило моментов запишем относительно точки опоры задних колес: $N_1 \cdot l - mg[l'\cos(\alpha) - h\sin(\alpha)] = 0$. Угол наклона



поверхностей подъема и спуска определяются из геометрии: $\cos(\alpha) = \frac{D/2}{\sqrt{H^2 + (D/2)^2}} = \frac{24}{25}$,

$\sin(\alpha) = \frac{H}{\sqrt{H^2 + (D/2)^2}} = \frac{7}{25}$. Из правила моментов находим: $N_1 = mg\left[\frac{l'}{l}\cos(\alpha) - \frac{h}{l}\sin(\alpha)\right] = \frac{33}{50}mg = 6{,}6\,\text{Н}$. Уравнение движения робота в проекции на направление подъема, с учетом того, что сила трения есть сила трения скольжения: $ma = \mu N_1 - mg\sin(\alpha) \Rightarrow a = \frac{53}{400}g \approx 1{,}325$ м/с^2.

4.2. **Нет.** Если записать те же соотношения для спуска, получим: $N_1 + N_2 = mg\cos(\alpha)$ и $N_1 \cdot l - mg[l'\cos(\alpha) + h\sin(\alpha)] = 0$. Из этих соотношений найдем, что $N_1 = mg\left[\frac{l'}{l}\cos(\alpha) + \frac{h}{l}\sin(\alpha)\right] = \frac{47}{50}mg$ и $N_2 = mg\cos(\alpha) - N_1 = \frac{1}{50}mg > 0$. Значит, заднее колесо все же не отрывается от опоры, хоть и очень слабо прижимается к ней. В этом случае даже небольшое препятствие на спуске скорее всего приведет к опрокидыванию.

4.3. **Примерно 3,1 Дж.** В процессе подъема увеличивается потенциальная энергия робота в поле тяжести Земли ($\Delta E_П = mg\Delta H_{ЦМ} \approx mgH = 2{,}1$ Дж) и кинетическая энергия. При движении с постоянным ускорением и нулевой начальной скоростью конечная скорость $v = at = a\sqrt{\frac{2L}{a}} = \sqrt{2La}$, где $L = \sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 + H^2} = 75$ см – путь, пройденный роботом на подъеме. Значит, $\Delta E_K = \frac{mv^2}{2} \approx maL = \frac{53}{400}mgL \approx 0{,}994$ Дж. Итак, увеличение полной механической энергии на подъеме $\Delta E \approx mg\left(H + \frac{53}{400}L\right) \approx 3{,}09$ Дж. Ясно, что этот же результат можно получить по-другому: поскольку подъем и разгон робота обеспечиваются силой трения скольжения ведущих колес, то $\Delta E \approx \mu N_1 L = \frac{33}{80}mgL \approx 3{,}09$ Дж. Это решение оценивается также как полностью правильное.

4.4. **Примерно 1,57 Дж и 4,66 Дж.** Без проскальзывания за 6 полных оборотов колеса робот при проехал расстояние $S = 2\pi r \approx 113$ см. На самом деле он проехал расстояние $L = \sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 + H^2} = 75$ см. Поэтому относительное смещение поверхности колеса и опоры за счет проскальзывания $S_{ск} = 2\pi r - L \approx 38$ см. Величина силы трения, действующей между колесом и опорой, равна $F_{тр} = \mu N_1 = \frac{33}{80}mg \approx 4{,}125$ Н. Значит, выделившееся количество тепла $Q = F_{тр}S_{ск} = \frac{33}{80}mg(2\pi r - L) \approx 1{,}57$ Дж. Работа двигателя обеспечивает увеличение механической энергии робота и восполняет потери на трение. Значит, $A = \Delta E + Q \approx mg\left(H + \frac{33\pi}{40}r - \frac{7}{25}L\right) \approx 4{,}66$ Дж.

КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ ЗАДАНИЯ 4:

№	критерий	максимальный балл
1.1	Записано уравнение $N_1 + N_2 = mg\cos(\alpha)$ – 1 балл, записано правило моментов – 4 балла, правильно вычислена сила реакции – 3 балла, правильно вычислено ускорение – 2 балла.	**10**
1.2	Правильный ответ – 2 балла, обоснование – 3 балла.	**5**
1.3	Правильно определено увеличение потенциальной энергии – 2 балла, записана формула для скорости через путь – 2 балла, правильно найдена конечная скорость – 3 балла, правильно найдено увеличение кинетической энергии – 4 балла, правильный ответ – 4 балла.	**15**
1.4	Вычислено относительное смещение $S_{ск} = 2\pi r - L$ – 4 балла, используется правильное значение силы трения – 3 балла,	**20**

	правильно найдено количество теплоты – 8 баллов, записано выражение $A = \Delta E + Q$ – 2 балла, получен правильный ответ для работы двигателя – 3 балла.	

Максимальный балл за задание: **50**.

Задание 5 (7-8 классы)

5. Средняя скорость тела на участке пути – это отношение пути s тела к длительности интервала времени t, за который тело прошло этот путь: $V_{cp} = \frac{s}{t}$.

5.1. Робот проезжает трассу, состоящую из горизонтального участка длиной $L = 5$ м и симметричной горки (то есть такой, у которой подъем и спуск одинаковы по длине и наклону). Полная ширина горки $D = 240$ см, а высота $h = 35$ см. Робот движется по горизонтальному участку со скоростью $v_1 = 1{,}0$ м/с, на подъеме – со скоростью $v_2 = 0{,}5$ м/с, а на спуске – со скоростью $v_3 = 1{,}25$ м/с. Найдите среднюю скорость робота на трассе. Как изменится ответ, если при той же скорости на горизонтальном участке скорость на подъеме уменьшится на $0\text{м/с} < \Delta v < 0{,}5\text{м/с}$, а на спуске на столько же увеличится?

5.2. Пусть скорость робота на некотором участке пути изменяется по закону $v(t) = v_0 + a \cdot t$, где a – постоянная величина, измеряемая в м/с^2. Эта величина в физике называется *ускорением*, а такое движение – *равноускоренным*. Какой будет средняя скорость этого движения на участке пути, пройденном за время t? Выведите формулу для средней скорости и найдите ее численное значение, если $v_0 = 4$ м/с, $a = -1{,}5$ м/с^2, $t = 2$ с.

5.3. Определите средние скорости тел (V_1 и V_2), зависимость скорости которых от времени показана на рисунках 1 и 2. На рис.2 криволинейные участке в используемом

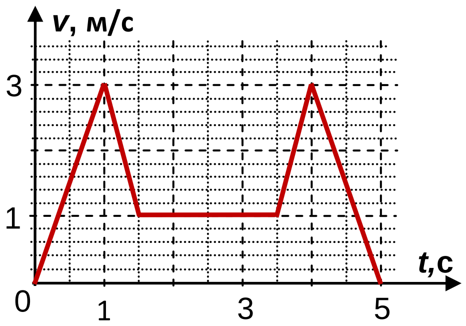


рис.1

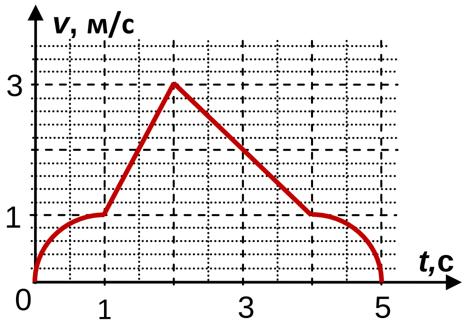


рис.2

масштабе являются четвертями окружности. Ответ запишите в м/с, при необходимости округляя до сотых и поясните способ его получения.

5.4. Два робота (№1 и №2) проезжают одну и ту же трассу несколько раз. В первом раунде робот №1 проехал трассу быстрее на $\Delta t = 9$ с. Во втором раунде №2 увеличил среднюю скорость прохождения трассы в 1,5 раза, и теперь он проехал трассу быстрее на $\Delta t' = 1$ с. В третьем раунде робот №1 увеличил свою среднюю скорость на трассе на 20%. Кто из роботов проедет трассу быстрее в 3-м раунде и на сколько?

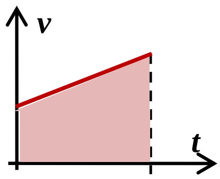
Ответы:

5.1. **V$_{cp}$=(15/17) м/с ≈ 0,88 м/с. Средняя скорость уменьшится**. Пусть l – длина каждой из двух наклонных поверхностей горки. По теореме Пифагора $l = \sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 + h^2} = 1{,}25$ м.

Значит, полное время прохождения трассы $t = \frac{L}{v_1} + \frac{l}{v_2} + \frac{l}{v_3} = \frac{Lv_2v_3 + lv_1(v_2 + v_3)}{v_1v_2v_3} = 8{,}5$ с. Путь робота $s = L + 2l = 7{,}5$м, поэтому средняя скорость равна $V_{cp} = \frac{(L+2l)v_1v_2v_3}{Lv_2v_3 + lv_1(v_2+v_3)} = \frac{15}{17}$ м/с, или $V_{cp} \approx 0{,}88$ м/с. При указанном изменении скоростей новое время

$t=\frac{L}{v_1}+\frac{l}{v_2-\Delta v}+\frac{l}{v_3+\Delta v}=\frac{L}{v_1}+\frac{l(v_2+v_3)}{(v_2-\Delta v)(v_3+\Delta v)}$. Удобно ввести обозначение $x\equiv\frac{\Delta v}{v_2}$, и тогда после подстановки численных значений: $t=5\text{с}+\frac{8{,}75\,\text{с}}{(1-x)(2{,}5+x)}$. Нетрудно заметить, что график функции $y(x)=(1-x)(2{,}5+x)$ – это парабола с ветвями вниз и вершиной в точке $x=-0{,}75$. Поэтому на всем интервале значений x от 0 до 1 эта функция убывает, то есть время прохождения трасы после указанного изменения скоростей увеличится. Следовательно, средняя скорость уменьшится.

5.2. $V_{cp}=v_0+\frac{at}{2}$**, при заданных значениях** $V_{cp}=2{,}5$ **м/с.** В этом случае можно действовать двумя путями: (1) Заметить, что скорость равномерно растет от v_0 до $v_0+a\cdot t$ т, и найти среднее непосредственно : $V_{cp}=\frac{1}{2}(v_0+v_0+at)=v_0+\frac{at}{2}$. (2) Построив график



зависимости скорости от времени, можно догадаться, что пройденный путь возможно найти как площадь трапеции – эта площадь складывается из площадей очень большого числа очень тоненьких «полосок», каждая из которых соответствует пути $\Delta s=v(t)\Delta t$, пройденному за очень маленький интервал времени от t до $t+\Delta t$. Тогда можно найти, что $s=\frac{v_0+v_0+at}{2}t=v_0t+\frac{at^2}{2}$. Значит, $V_{cp}=\frac{s}{t}=v_0+\frac{at}{2}$. Подставляя численные значения, находим, что $V_{cp}=2{,}5$ м/с.

5.3. $V_1=1{,}40$ **м/с и** $V_2\approx1{,}51$ **м/с.** В первом случае можно рассмотреть движение как набор равноускоренных и равномерных движений, и воспользоваться соответствующими формулами для нахождения полного пути. Однако проще сразу искать путь как площадь под графиком скорости. Тогда в первом случае $s_1=7$м, и, следовательно, $V_1=\frac{s_1}{t}=1{,}4$м/с. Во втором случае путь на школьном уровне определяется только через площадь: $s_2=\left(6+\frac{\pi}{2}\right)$м, и $V_2=\frac{s_2}{t}\approx1{,}51$м/с.

5.4. **В третьем раунде быстрее на 2,5 с проедет первый робот.** Пусть L – длина трассы, а v_1 и v_2 – скорости роботов в первом раунде. Тогда $\Delta t=t_2-t_1=\frac{L}{v_2}-\frac{L}{v_1}=L\frac{v_1-v_2}{v_1v_2}$.

Аналогично во втором раунде $\Delta t'=t_1'-t_2'=\frac{L}{v_1}-\frac{2L}{3v_2}=L\frac{3v_2-2v_1}{3v_1v_2}$. Следовательно, $\frac{\Delta t}{\Delta t'}=\frac{3(v_1-v_2)}{3v_2-2v_1}\Rightarrow v_2=\frac{3\Delta t'+2\Delta t}{3(\Delta t'+\Delta t)}v_1=0{,}7\,v_1$. В третьем раунде:

$$\Delta t''=t_1''-t_2''=\frac{5L}{6v_1}-\frac{2L}{3v_2}=L\frac{5v_2-4v_1}{6v_1v_2}=\frac{v_1v_2}{v_1-v_2}\Delta t\frac{5v_2-4v_1}{6v_1v_2}=\frac{5v_2-4v_1}{6(v_1-v_2)}\Delta t=-2{,}5\,\text{с}.$$

Значит, в третьем раунде быстрее проедет первый робот – на 2,5 с..

КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ ЗАДАНИЯ 5:

№	критерий	максимальный балл
5.1	Правильное вычисление полного пути – 1 балл, правильное вычисление полного времени – 2 балла, ответ для средней скорости – 2 балла, правильный ответ на вопрос про изменение скорости – 5 баллов.	**10**

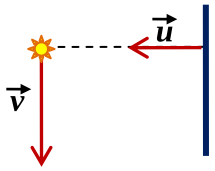
5.2	Правильная формула – 3 балла, правильный численный ответ – 2 балла.	**5**
5.3	Правильный ответ по каждому случаю – по 5 баллов, обоснование – 2 балл для рис.1 и 3 балла для рис.2.	**15**
5.4	Для записи формул используются величины L, v_1 и v_2 – 1 балл, Правильно записаны соотношения для Δt, $\Delta t'$ и $\Delta t''$ (через длину трассы и скорости) – по 3 балла за каждое. Определено соотношение скоростей – 5 баллов, получен правильный ответ – 5 баллов.	**20**

Максимальный балл за задание: **50**.

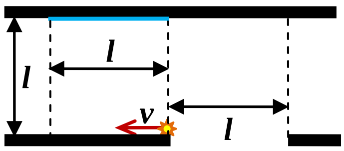
Задание 6 (8-9 классы)

6. Рассмотрим оптические системы, которые могут являться частью оборудования различных технических устройств.

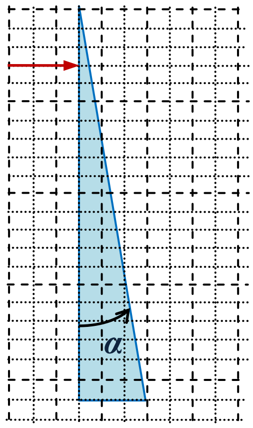
6.1. Два робота перемещаются по площадке во взаимно-перпендикулярных направлениях. На одном из них (движущемся со скоростью $v = 2$ м/с) находится небольшая лампочка, на другом (его скорость равна $u = 0{,}75$ м/с) закреплено вертикально плоское зеркало (см. рисунок). С какой скоростью движется изображение лампочки в этом зеркале (относительно неподвижного наблюдателя на площадке)?



6.2. Робот небольших размеров движется с постоянной скоростью $v = 1{,}5$ м/с вдоль стены коридора шириной $l = 2$ м, в одной из стен которого есть проем шириной $l = 2$ м, а на другой висит плоское зеркало такой же в точности ширины (2 м), по высоте в точности соответствующее высоте стены. Толщина панелей, из которых сооружены стены, превышает размеры робота, и покрашены черной краской (то есть поглощают почти весь падающий на них свет). На роботе установлена маленькая лампочка. В некоторый момент времени робот находится радом с краем проема. В течении какого времени после этого свет от лампочки попадает в проем?



6.3. В некоторой оптической системе используется прозрачный клин с углом при вершине $\alpha = 15°$ (см. рисунок: реальные пропорции клина в точности такие же, как на рисунке). На одну из его вертикальных плоских поверхностей падает из воздуха нормально (так, как показано на рисунке) горизонтальный тонкий лазерный луч. Известно, что при нормальном падении на любую из граней клина – как снаружи, так и изнутри, примерно половина потока энергии световых пучков отражается, и примерно столько же – проходит, а поглощением на поверхности и в веществе клина можно пренебречь. Показатель преломления вещества клина равен $n = 1{,}4$. Сколько лучей выйдет из клина обратно в воздух (луч, отраженный в точке падения, не считать)? Выполните построение хода лучей в клине и ответьте на вопрос. Обоснуйте правильность своего ответа.

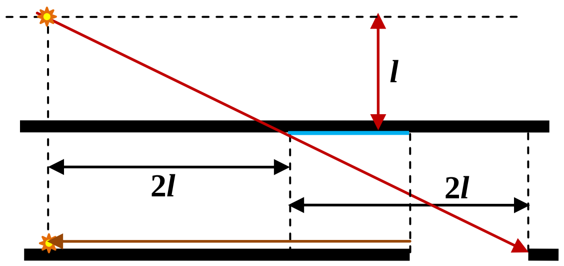


6.4. Фотодатчик состоит из фотоэлемента, ток в цепи которого пропорционален мощности поступающего на фотоэлемент света, и собирающей линзы, направляющей свет от внешнего источника на фотоэлемент. Фотоэлемент расположен в главном фокусе линзы, его чувствительная поверхность в виде кружка площадью $\sigma = 9$ мм^2 развернута перпендикулярно главной оптической оси. Диаметр линзы $d = 48$ мм, ее фокусное расстояние $F = 75$ см. Окуляр фотоэлемента нацеливается точно на маленькую лампочку, мощность светового излучения которой $P = 31{,}4$ Вт, причем лампочка светит по всем направлениям одинаково. Известно, что при мощности поступающего света $P_0 = 0{,}1$ мВт ток фотодатчика равен $I_0 = 15$ мА. Каким будет ток фотодатчика, если лампочка перемещается таким образом, что расстояние от нее до окуляра изменяется от 5м до 9м? Поглощением света пренебречь.

Ответы:

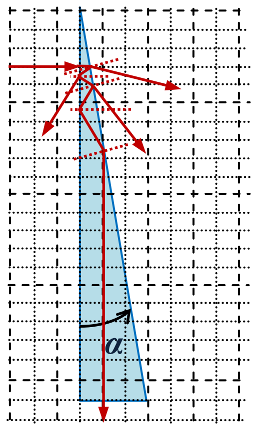
6.1. **2,5 м/с**. Изображение объекта в плоском зеркале всегда расположено на одном перпендикуляре к плоскости зеркала с объектом. Поэтому составляющая скорости изображения вдоль плоскости зеркала равна соответствующей составляющей скорости объекта: $v'_{||} = 2$ м/с. Расстояние от плоскости зеркала до изображения равно расстоянию от объекта до плоскости зеркала, то есть расстояние между объектом и изображением всегда равно удвоенному расстоянию от объекта до плоскости зеркала. Значит, при уменьшении расстояния от объекта до плоскости зеркала на Δx расстояние между изображением и лампочкой в направлении, перпендикулярном скорости лампочки, уменьшается на $2\Delta x$. Таким образом, перпендикулярная плоскости зеркала составляющая скорости изображения $v'_{\perp} = 2u = 1{,}5$ м/с. В результате $v' = \sqrt{(v'_{||})^2 + (v'_{\perp})^2} = 2{,}5$ м/с. Другой способ решения состоит в переходе в систему отсчета, связанную с зеркалом. Изображение вектора скорости в зеркале в этой СО имеет такую же продольную и обратную перпендикулярную составляющую скорости (по отношению к самому вектору): $\vec{v}_з = \vec{v} + \vec{u}$. После возвращения в СО «площадка»: $\vec{v} = \vec{u} + \vec{v}_з = \vec{v} + 2\vec{u}$. С учетом того, что $\vec{v} \perp \vec{u}$, для модуля скорости получаем тот же ответ.

6.2. **4 с.** Ясно, что в проем попадают световые лучи, отраженные от зеркала. Лучи, отраженные от зеркала, могут приходить в проем только от точек поверхности зеркала.

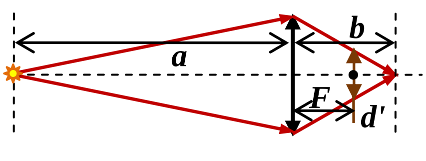


Поэтому зона, из которой свет от лампочки попадает в проем, может быть определена следующим образом: построим траекторию движений изображения лампочки в зеркале и отметим крайнее положение изображения, из которого луч, идущий в край проема, проходит через плоскость зеркала (см. рисунок). Как видно, для ухода из этой зоны лампочка должна сместиться на расстояние $3l = 6$ м. На это уйдет время $t = \dfrac{3l}{v} = 4$ с.

6.3. **Четыре.** Для ответа на этот вопрос нужно провести построение хода лучей внутри клина. При первом падении «изнутри» на поверхность клина угол падения будет равен $\alpha = 15°$. Нетрудно заметить, что при втором падении этот угол станет равным $2\alpha = 30°$, и так далее. Луч выходит из оптически более плотной среды в том случае, если угол падения γ не превосходит угла «полного внутреннего отражения», то есть если $\sin(\gamma) \le \dfrac{1}{n} = \dfrac{5}{7}$ (в противном случае для синуса угла преломления получается значение, большее 1, что невозможно – преломленный луч отсутствует). Это условие выполняется только для первых трех отражений, поскольку $\sin(4\alpha) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} > \dfrac{5}{7}$. При пятом отражении угол падения $5\alpha = 75°$, и затем луч идет параллельно грани клина ($6\alpha = 90°$), и выходит через его основание. Итак, из клина обратно в воздух выйдет четыре луча.



6.4. **6 мА.** Отметим, что размеры линзы много меньше расстояния до источника, и поэтому можно считать, что площадь участка фронта световой волны от лампочки, попадающего в окуляр, равна $\pi d^2/4$. Полная площадь фронта при расстоянии a от лампочки - это $4\pi a^2$, и мощность света, попадающего в окуляр, равна $P' = (d/4a)^2 P$. Лучи от лампы фокусируются линзой на расстоянии b от нее (см.рисунок). Это расстояние можно найти по формуле тонкой линзы: $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{F} \Rightarrow b = \dfrac{aF}{a-F}$. Значит, диаметр светлого пятна в фокальной плоскости линзы $d' = \dfrac{b-F}{b} d = \dfrac{F}{a} d$. Если этот диаметр больше, чем диаметр



чувствительной поверхности фотоэлемента, то фотоэлемент получит только часть светового потока, то есть мощность света, попадающего на фотоэлемент, будет $P'' = \frac{4\sigma}{\pi d'^2} P' = \frac{\sigma}{4\pi F^2} P$.

Проверим использованное условие: $\sigma < \frac{\pi d'^2}{4} = \frac{\pi F^2 d^2}{4a^2}$ при $a < \frac{\sqrt{\pi} Fd}{2\sqrt{\sigma}} \approx 10{,}64$ м. Как видно, во всем заданном диапазоне значений a это требование выполняется. В результате, ток фотодатчика $I = \frac{P''}{P_0} I_0 = \frac{\sigma P}{4\pi F^2 P_0} I_0 \approx 6$ мА.

КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ ЗАДАНИЯ 6:

№	критерий	максимальный балл
6.1	Правильное указание положения изображения – 2 балла, правильное вычисление $v'_{\|\|}$ – 2 балла, правильное вычисление $v'_{\perp}$ – 4 балла, правильный ответ модуля скорости – 2 балла.	**10**
6.2	Правильное построение – 3 балла, правильный численный ответ – 2 балла.	**5**
6.3	Правильное построение хода лучей – 5 баллов, указание на явление полного внутреннего отражения – 5 баллов, правильный ответ – 5 баллов.	**15**
6.4	Используется формула тонкой линзы – 2 балла, используется равномерность распределения энергии излучения по фронту световой волны – 2 балла, правильно определена P' – 3 балла, определен диаметр освещенного пятна в фокальной плоскости – 4 балла, установлено, что $\sigma < \frac{\pi d'^2}{4}$ – 4 балла, получен правильный ответ – 5 баллов.	**20**

Максимальный балл за задание: **50**.

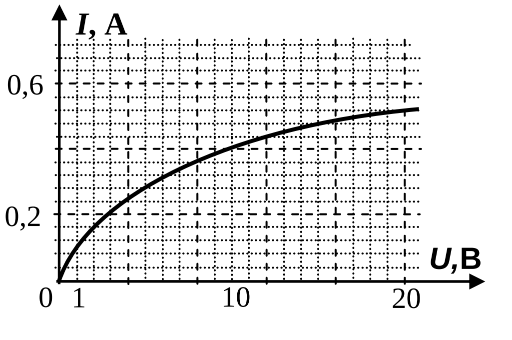
Задание 7 (10-11 классы)

7. Допустим, у нас есть несколько одинаковых аккумуляторов и вольтметр. При подключении вольтметра к клеммам одного аккумулятора он показывает напряжение $U_1 = 17$ В, а при подключении к двум аккумуляторам, соединенным параллельно – напряжение $U_2 = 18$ В.

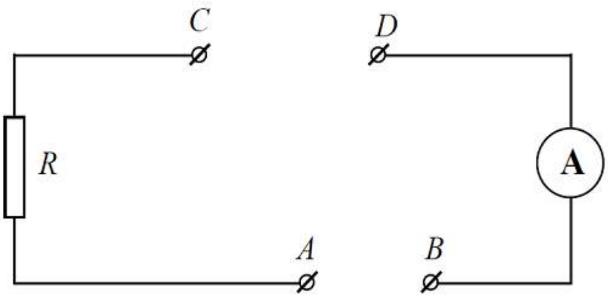
7.1. С чем связано такое заметное различие показаний? Соотношение каких параметров вольтметра и аккумулятор можно определить на основании этих измерений?

7.2. Что покажет этот же вольтметр, если его подключить к тем же двум аккумуляторам, но соединенным последовательно? А что на его месте показал бы «практически идеальный» вольтметр?

7.3. Существуют элементы электрических цепей, у которых протекающий ток не пропорционален приложенному напряжению. Например, у ламп накаливания ток растет медленнее, чем напряжение (такие элементы, не подчиняющиеся закону Ома, называют «нелинейными»). Связь тока с напряжением для подобных элементов описывается вольт-амперной характеристикой (ВАХ). Рассмотрим лампу, ВАХ которой показана на рисунке. Оказалось, что при подключении ее к одному аккумулятору ток через лампу точно такой же, как и через вольтметр, также подключенный к одному аккумулятору. Какой ток течет при этом через лампу? Какая мощность потребляется лампой? Чему равно внутреннее сопротивление аккумулятора?



7.4. Рассмотрим схему, показанную на рисунке. Между клеммами A и B поддерживается неизменное напряжение. Если замкнуть клеммы C и D проводом с пренебрежимо малым сопротивлением, то практически идеальный амперметр в схеме покажет силу тока, равную $I = 4{,}2$ А. Допустим, что у нас есть две одинаковые лампочки накаливания, для которых связь силы тока с приложенным напряжением дается формулой $I(U) = I_0\sqrt{\dfrac{U}{U_0}}$.



Если соединить эти лампочки последовательно и подключить к клеммам C и D, амперметр покажет ток $I_1 = 0{,}7$ А. Каковы будут показания амперметра, если подключить к клеммам C и D эти же две лампочки, но соединенные параллельно?

Ответы:

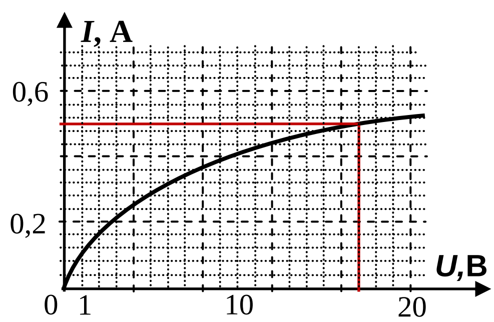
7.1. **С тем, что аккумулятор и вольтметр не идеальны – внутреннее сопротивление аккумулятора не равно нулю, а внутреннее сопротивление вольтметра не очень велико. Можно найти, что отношение их внутренних сопротивлений $\dfrac{R_V}{r} = 8$.** Действительно, при учете внутренних сопротивлений ток в цепи с одним аккумулятором равен $I_1 = \dfrac{U_0}{R_V + r}$, и напряжение на вольтметре $U_1 = \dfrac{R_V U_0}{R_V + r}$ (здесь U_0 – напряжение на клеммах аккумулятора при разомкнутой цепи). При двух аккумуляторах, соединенных параллельно, напряжение на них одинаково, а общее внутреннее сопротивление равно $r/2$, то есть $U_2 = \dfrac{R_V U_0}{R_V + r/2}$.

Следовательно, $\dfrac{U_2}{U_1} = \dfrac{2(R_V + r)}{2R_V + r} \Rightarrow \dfrac{R_V}{r} = \dfrac{2U_1 - U_2}{2(U_2 - U_1)} = 8$.

7.2. **30,6 В, а показания «идеального» вольтметра были бы 38,25 В.** В этом случае напряжения и сопротивления складываются, то есть $U_2' = \dfrac{R_V \cdot 2U_0}{R_V + 2r} = \dfrac{2R_V + r}{R_V + 2r} U_2 = \dfrac{17}{10} U_2 = 30{,}6$ В. «Практически идеальный» вольтметр – это вольтметр с очень большим внутренним сопротивлением, и для него $U_2' = 2U_0 = 2\left(1 + \dfrac{r}{R_V}\right) U_1 = \dfrac{9}{4} U_1 = 38{,}25$ В.

7.3. **Через лампу течет ток 0,5 А, она потребляет мощность 8,5 Вт, внутреннее сопротивление аккумулятора 4,25 Ом.** Из условия следует, что напряжение на лампе равно напряжению на вольтметре при подключении к одному аккумулятору, то есть $U_1 = 17$ В. Тогда по ВАХ можно определить ток: он равен 0,5 А. Потребляемая мощность $P = U_1 \cdot I = 8{,}5$ Вт. Точка ВАХ (U_1, I) есть решение системы уравнений

$$\begin{cases} I = I_Л(U) \\ U_1 = U_0 - Ir \end{cases}.$$



Из результатов пункта 3.1. можно найти, что $U_0 = \left(1 + \dfrac{r}{R_V}\right) U_1 = 19{,}125$ В. Первое уравнение задает точки ВАХ лампы, второе описывает прямую, пересекающую ось I в точке $I_0 = \dfrac{U_0}{r}$ и ось U в точке U_0. При уменьшении напряжения от U_0 до U_1 ток вдоль этой прямой растет от нуля до 0,5 А. Значит, $I_0 = \frac{U_0}{U_0 - U_1} \cdot 0{,}5\,\text{А} = 4{,}5\,\text{А}$. Поэтому $r = \frac{U_0}{I_0} = 4{,}25\,\text{Ом}$.

7.4. **1,68 А.** Опыт с коротким замыканием клемм C и D позволяет записать для напряжения между клеммами A и B: $U_{AB} \approx IR$. При последовательном подключении ламп ток в них одинаков и равен I_1, а напряжения на лампах одинаковы и равны $U(I_1) = U_0\left(\frac{I_1}{I_0}\right)^2$. Поэтому: $2U_0\left(\frac{I_1}{I_0}\right)^2 = U_{AB} - I_1 R = (I - I_1)R$. Если при параллельном включении через амперметр течет ток I_2, то ток в каждой из ламп равен $\frac{I_2}{2}$, и поэтому $U_0\left(\frac{I_2}{2I_0}\right)^2 = U_{AB} - I_2 R = (I - I_2)R$. Разделив эти соотношения друг на друга, получаем уравнение для определения I_2: $I_2^2 + \frac{8I_1^2}{I - I_1} I_2 - \frac{8I I_1^2}{I - I_1} = 0$. Физический смысл имеет только положительный корень, поэтому $I_2 = \frac{2I_1}{I - I_1}[\sqrt{4I_1^2 + 2I(I - I_1)} - 2I_1] = 1{,}68$ А.

КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ ЗАДАНИЯ 7:

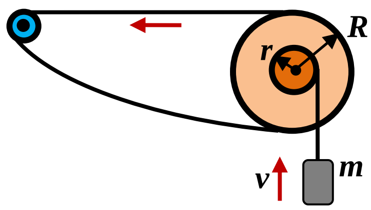
№	критерий	максимальный балл
7.1	Правильно указана причина расхождения – 4 балла, записаны выражения для напряжений U_1 и U_2 – 4 балла , правильно вычислено отношение внутренних сопротивлений – 2 балла.	**10**
7.2	Правильный ответ для последовательного соединения – 3 балла, правильный ответ для «идеального» вольтметра – 2 балла.	**5**
7.3	Присутствует система уравнений для тока и напряжения – 2 балла, идея графического решения этой системы – 2 балла, правильно найден ток через лампу – 5 баллов, правильно найдена мощность – 4 балла, использование найденного значения U_0 – 2 балла, правильный ответ для сопротивления – 5 баллов.	**20**
7.4	Записана связь постоянного напряжения и тока I – 2 балла, получено уравнение для последовательного соединения – 3 балла, получено уравнение для параллельного соединения – 3 балла, получено уравнение для I_2 – 4 балла, получен правильный ответ – 3 балла.	**15**

Максимальный балл за задание: **50**.

Задание 8 (9-11 классы)

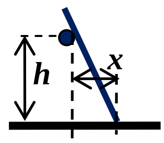
8. В механике известно *правило рычага*: для того, чтобы у твердого тела вращение отсутствовало или происходило с постоянной угловой скоростью, сумма моментов приложенных к нему сил должна равняться нулю. Напомним, что *момент силы* можно определить как произведение величины силы на ее *плечо* (это расстояние от линии действия силы до оси вращения), взятое со знаком «плюс» или «минус». Знак зависит от направления вращения, которое эта сила «пытается» создать. Обычно договариваются считать направление вращения против часовой стрелки положительным, а по часовой стрелке – отрицательным.

8.1. Вращение вала подъемного механизма (его радиус равен $r = 4$ см) осуществляется с помощью цепной передачи (см. рисунок). Радиус жестко соединенной с валом шестерни $R = 16$ см. Чему равна сила натяжения цепи при подъеме груза с массой $m = 10$ кг с постоянной скоростью $v = 3$ м/с, если силы трения, действующие на вал, пренебрежимо малы? Ускорение свободного падения считать равным $g \approx 10$ м/с^2. Какую



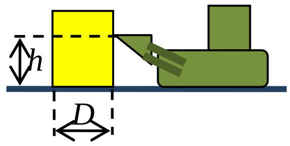
минимальную мощность должен развивать при этом двигатель, вращающий ведущую шестерню передачи?

8.2. Шест длиной $L = 150$ см поставили так, что он опирается на гладкую горизонтальную балку ограждения соревновательной зоны, проходящую на высоте $h = 120$ см. Точка опоры шеста о шероховатый пол по горизонтали смещена от ограждения на расстояние $x = 60$ см. Масса шеста равна $m = 5$ кг. С какой силой давит шест на ограждение?



8.3. На наклонную поверхность горки нужно установить препятствие для робота – брусок в форме параллелепипеда размерами 10см×30 см×50 см. Брусок однороден, коэффициент трения всех граней бруска о поверхность горки равен $\mu = 0{,}25$. В первом случае брусок кладут на поверхность самой длинной гранью вдоль склона, а во втором – самой короткой. В каком случае можно наклонить поверхность к горизонту сильнее (чтобы брусок еще покоился) – в первом или во втором? На сколько градусов различаются максимальные допустимые углы наклона в этих случаях?

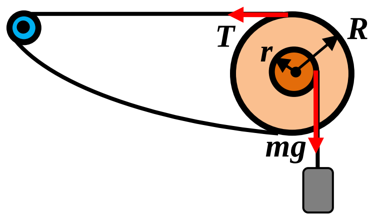
8.4. Модель «бульдозера» должна двигать перед собой ковшом с постоянной скоростью По горизонтальной поверхности однородный брусок шириной $D = 16$ см, высота которого больше ширины. Коэффициент трения бруска о поверхность $\mu = \dfrac{2}{3}$. На какой максимальной высоте h над поверхностью может находиться точка давления ковша на брусок,



чтобы брусок двигался поступательно? Какую работу должен совершить бульдозер над бруском при перемещении бруска на 1 м, если масса бруска $m = 600$ г?

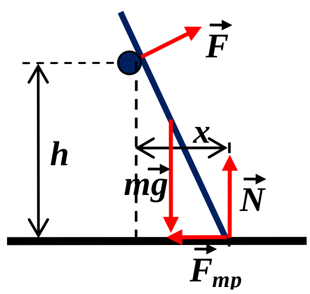
Ответы:

8.1. **Сила натяжения цепи равна 25 Н, минимальная требуемая мощность 300 Вт.** Так как вал и шестерня вращаются с постоянной скоростью, то сумма приложенных к ним моментов сил (а это сила натяжения цепи и сила натяжения троса, на котором подвешен груз, причем для троса эта сила равна весу груза) равна нулю, то есть $T \cdot R = mg \cdot r$,



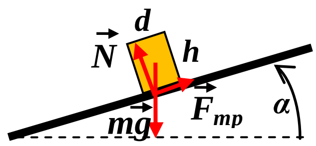
Поэтому $T = \dfrac{r}{R} mg \approx 25$ Н. Так как рычаги не дают выигрыша в работе, то минимальная требуемая мощность (когда мы пренебрегаем всеми потерями) должна быть равна мощности работы силы тяжести, препятствующей подъему груза: $P_{\min} = mg \cdot v = 300$ Вт.

8.2. **Шест давит на ограждение с силой 12,5 Н.** На шест действуют: сила тяжести, сила нормальной реакции пола $\vec{N}$ и сила трения $\vec{F}_{тр}$, сила реакции балки ограждения $\vec{F}$, величина которой по 3 закону Ньютона равна величине искомой силы. Силы $\vec{N}$ и $\vec{F}_{тр}$ имеют нулевые плечи относительно точки опоры шеста. Плечо силы тяжести равно $l_g = \dfrac{L}{2}\cos(\alpha) = \dfrac{Lx}{2\sqrt{h^2 + x^2}}$ (α – угол наклона



шеста к полу), а плечо силы $\vec{F}$ равно $l_F = \sqrt{h^2 + x^2}$. Поэтому уравнение правила моментов относительно этой точки имеет вид: $+mg\dfrac{Lx}{2\sqrt{h^2+x^2}} - F\sqrt{h^2+x^2} = 0$. Из этого уравнения находим: $F = \dfrac{Lx}{2(h^2+x^2)}mg = 12{,}5$ Н.

8.3. **Больше можно наклонить в первом случае, на 2,7°.** На брусок, лежащий на наклонной плоскости, действуют сила тяжести, сила трения покоя и сила нормальной реакции. Из условия равновесия следует, что $F_{тр} = mg\sin(\alpha)$, а $N = mg\cos(\alpha)$. Ограничение на силу трения скольжения $F_{тр} \le \mu N$ показывает, что брусок не скользит, если $tg(\alpha) \le \mu$. Так как в покое должна равняться нулю сумма моментов этих сил, то точкой приложения силы реакции должна быть точка, в которой линия действии силы тяжести пересекает площадь опоры (плечи всех трех сил относительно этой точки будут равны нулю). Это требование нельзя выполнить, если диагональ сечения бруска с шириной (вдоль склона) d и высотой (над склоном) h наклонится дальше вертикали. В этом случае брусок начнет опрокидываться вокруг нижнего ребра. Поэтому условием покоя является и второе требование: $tg(\alpha) \le \dfrac{d}{h}$. В первом случае $\dfrac{d_1}{h_1} = 5 > \mu = 0{,}25$, и угол наклона ограничивается именно началом скольжения: $\alpha_1^{(\max)} = arctg(0{,}25) \approx 14°$. Во втором случае $\dfrac{d_2}{h_2} = 0{,}2 < \mu = 0{,}25$, и угол ограничивается началом опрокидывания: $\alpha_2^{(\max)} = arctg(0{,}2) \approx 11{,}3°$. Итак, в первом случае можно наклонить плоскость сильнее – максимальный угол наклона на 2,7° больше, чем во втором.



8.4. **12 см, 4 Дж.** При движении с постоянной скоростью сумма проекций сил на горизонтальное направление движение равна нулю. Поэтому сила, с которой ковш «бульдозера» действует на брусок, должна равняться силе трения скольжения, то есть $F = \mu mg$. Для того, чтобы движение было поступательным, необходимо, чтобы брусок не опрокидывался вокруг дальнего от бульдозера нижнего ребра. Для этого нужно, чтобы момент силы F относительно этого ребра не превосходил момент силы тяжести, которая препятствует такому опрокидыванию. Таким образом, должно выполняться требование $\mu mg \cdot h \le mg \cdot \dfrac{D}{2}$. Значит, $h_{\max} = \dfrac{D}{2\mu} = 12$ см. Работа по перемещению бруска на путь s равна $A = F \cdot s = \mu mgs = 4$ Дж.

КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ ЗАДАНИЯ 8:

№	критерий	максимальный балл
1.1	Записано правило моментов – 1 балл, вычислена сила натяжения – 2 балла, вычислена мощность – 2 балла.	**5**
1.2	Верно указаны силы – 2 балла, правильно определены плечи силы $\vec{F}$ и силы тяжести – по 1 баллу, правильно записано уравнение моментов – 3 балла, правильный ответ – 3 балла.	**10**
1.3	Правильно определены причины нарушения равновесия (скольжение и опрокидывание) – по 1 баллу, получено требование $tg(\alpha) \le \mu$ – 4 балла, получено требование $tg(\alpha) \le h/d$ – 4 балла, правильно указано, в каком из случаев допустимый наклон больше – 2 балла, правильно найдена	**15**

	разница максимальных углов наклона – 3 балла.	
1.4	Определено, что $F = \mu mg$ – 5 баллов, указано, что для поступательности движения брусок не должен вращаться вокруг дальнего ребра – 3 балла, правильно определено условие отсутствия вращения – 3 балла, записано требование $\mu mg \cdot h \le mg \cdot \frac{D}{2}$ – 4 балла, получен правильный ответ для высоты – 2 балла получен правильный ответ для работы – 3 балла.	**20**

Максимальный балл за задание: **50**.

Задание 9 (7-8 классы)

9. Средняя скорость тела на участке пути – это отношение пути s тела к длительности интервала времени t, за который тело прошло этот путь: $V_{cp} = \frac{s}{t}$.

9.1. Робот проезжает трассу, состоящую из горизонтального участка длиной $L = 4$ м и симметричной горки (то есть такой, у которой подъем и спуск одинаковы по длине и наклону). Полная ширина горки $D = 288$ см, а высота $h = 42$ см. Робот движется по горизонтальному участку со скоростью $v_1 = 1{,}0$ м/с, на подъеме – со скоростью $v_2 = 0{,}5$ м/с, а на спуске – со скоростью $v_3 = 1{,}5$ м/с. Найдите среднюю скорость робота на трассе. Как изменится ответ, если скорость робота на горизонтальном участке уменьшится на n%, а на наклонных (и на подъеме, и на спуске) на столько процентов же увеличится?

9.2. Пусть скорость робота на некотором участке пути *равномерно* растет (то есть изменение скорости за любой интервал времени $v(t) - v(t_0) = a \cdot (t - t_0)$, где a – постоянная величина, измеряемая в м/с^2). Эта величина в физике называется *ускорением*, а такое движение – *равноускоренным*. В начале рассматриваемого участка пути скорость равна v_1, а в конце – v_2. Чему равен пройденный робот путь, если на преодоление этого участка он потратил время t? Выведите формулу для величины пути и найдите ее численное значение, если $v_1 = 1{,}5$ м/с, $v_2 = 2{,}5$ м/с, $t = 2$ с.

9.3. Определите средние скорости тел (V_1 и V_2), зависимость скорости которых от времени показана на рисунках 1 и 2. На рис.2 криволинейные участке в используемом масштабе

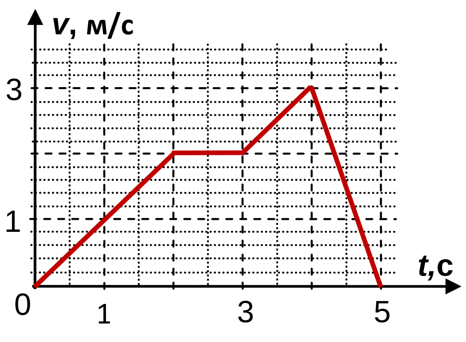


рис.1

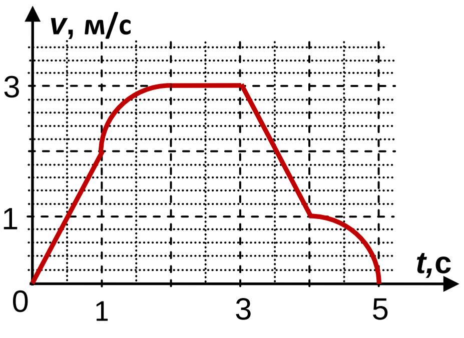


рис.2

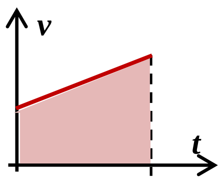
являются четвертями окружности. Ответ запишите в м/с, при необходимости округляя до сотых и поясните способ его получения.

9.4. Два робота (№1 и №2) проезжают одну и ту же трассу несколько раз. В первом раунде робот №1 проехал трассу быстрее на $\Delta t = 2$ с. Во втором раунде №2 увеличил среднюю скорость прохождения трассы в 1,4 раза, и теперь он проехал трассу быстрее на $\Delta t' = 8$ с. В третьем раунде робот №1 увеличил свою среднюю скорость на трассе на 20%. Кто из роботов проедет трассу быстрее в 3-м раунде и на сколько?

Ответы:

9.1. **V$_{ср}$=(7/8) м/с = 0,875 м/с. Средняя скорость уменьшится**. Пусть l – длина каждой из двух наклонных поверхностей горки. По теореме Пифагора $l=\sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2+h^2}=1{,}5$ м. Значит, полное время прохождения трассы $t=\frac{L}{v_1}+\frac{l}{v_2}+\frac{l}{v_3}=\frac{Lv_2v_3+lv_1(v_2+v_3)}{v_1v_2v_3}=8$ с. Путь работа $s=L+2l=7$ м, поэтому средняя скорость равна $V_{ср}=\frac{(L+2l)v_1v_2v_3}{Lv_2v_3+lv_1(v_2+v_3)}=\frac{7}{8}$ м/с, или $V_{ср}=0{,}875$ м/с. При указанном изменении скоростей новое время $t=\frac{kL}{v_1}+\frac{l}{kv_2}+\frac{l}{kv_3}$ (здесь $k\equiv 1+n$ – увеличение на определенное число процентов можно представить как умножение на такое число), и после подстановки численных значений получим: $t=k\cdot 4\text{с}+\frac{4\text{с}}{k}=4\text{с}\cdot\left(k+\frac{1}{k}\right)$. Нетрудно заметить, что при любом k справедливо неравенство $k+\frac{1}{k}\ge 2$, причем равенство (то есть минимальное значение этого выражения) достигается при $k=1$. У нас $k\equiv 1+n>1$, поэтому это выражение при увеличении k от 1 всегда увеличивается, то есть время прохождения трасы после указанного изменения скоростей увеличится. Следовательно, средняя скорость уменьшится.

9.2. $s=\frac{v_1+v_2}{2}t$**, при заданных значениях** $s=4$ **м.** В этом случае можно действовать двумя путями: (1) Заметить, что, поскольку скорость растет равномерно от v_1 до v_2, то можно найти среднее непосредственно: $V_{ср}=\frac{1}{2}(v_1+v_2)$, и найти путь $s=\frac{v_1+v_2}{2}t$. (2) Построив график зависимости скорости от времени, можно догадаться, что пройденный путь возможно найти как площадь трапеции – эта площадь складывается из площадей очень большого числа очень тоненьких «полосок», каждая из которых соответствует пути $\Delta s=v(t)\Delta t$, пройденному за очень маленький интервал времени от t до $t+\Delta t$. Тогда можно найти, что $s=\frac{v_1+v_2}{2}t$. Подставляя численные значения, находим, что $s=4$ м.



9.3 $V_1=1{,}60$ **м/с и** $V_2\approx 1{,}91$ **м/с.** В первом случае можно рассмотреть движение как набор равноускоренных и равномерных движений, и воспользоваться соответствующими формулами для нахождения полного пути. Однако проще сразу искать путь как площадь под графиком скорости. Тогда в первом случае $s_1=8$м, и, следовательно, $V_1=\frac{s_1}{t}=1{,}6$м/с. Во втором случае путь на школьном уровне определяется только через площадь: $s_2=\left(8+\frac{\pi}{2}\right)$м, и $V_2=\frac{s_2}{t}\approx 1{,}91$м/с.

9.4. **В третьем раунде быстрее на 2,5 с проедет второй робот.** Пусть L – длина трассы, а v_1 и v_2 – скорости роботов в первом раунде. Тогда $\Delta t=t_2-t_1=\frac{L}{v_2}-\frac{L}{v_1}=L\frac{v_1-v_2}{v_1v_2}$. Аналогично во втором раунде $\Delta t'=t_1'-t_2'=\frac{L}{v_1}-\frac{5L}{7v_2}=L\frac{7v_2-5v_1}{7v_1v_2}$. Следовательно, $\frac{\Delta t}{\Delta t'}=\frac{7(v_1-v_2)}{7v_2-5v_1}\Rightarrow v_2=\frac{7\Delta t'+5\Delta t}{7(\Delta t'+\Delta t)}v_1=\frac{33}{35}v_1$. В третьем раунде:

$$\Delta t''=t_1''-t_2''=\frac{5L}{6v_1}-\frac{5L}{7v_2}=5L\frac{7v_2-6v_1}{42v_1v_2}=5\frac{v_1v_2}{v_1-v_2}\Delta t\frac{7v_2-6v_1}{42v_1v_2}=\frac{5(7v_2-6v_1)}{42(v_1-v_2)}\Delta t=+2{,}5\,\text{с}.$$

Значит, в третьем раунде быстрее проедет второй робот – на 2,5 с.

КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ ЗАДАНИЯ 9:

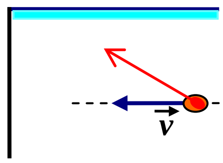
№	критерий	максимальный балл
9.1	Правильное вычисление полного пути – 1 балл, правильное вычисление полного времени – 2 балла, ответ для средней скорости – 2 балла, правильный ответ на вопрос про изменение скорости – 5 баллов.	**10**
9.2	Правильная формула – 3 балла, правильный численный ответ – 2 балла.	**5**
9.3	Правильный ответ по каждому случаю – по 5 баллов, обоснование – 2 балл для рис.1 и 3 балла для рис.2.	**15**
9.4	Для записи формул используются величины L, v_1 и v_2 – 1 балл, Правильно записаны соотношения для Δt, $\Delta t'$ и $\Delta t''$ (через длину трассы и скорости) – по 3 балла за каждое. Определено соотношение скоростей – 5 баллов, получен правильный ответ – 5 баллов.	**20**

Максимальный балл за задание: **50**.

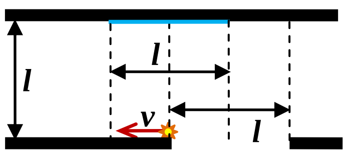
Задание 10 (8-9 классы)

10. Рассмотрим оптические системы, которые могут являться частью оборудования различных технических устройств.

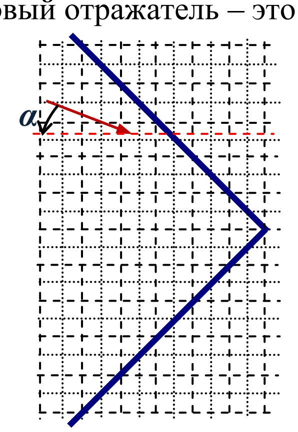
10.1. Робота перемещается по площадке, ограниченной с одного края зеркальным щитом, а с другого – матовым экраном (см. рисунок). Робот движется со скоростью $v = 3$ м/с параллельно зеркальному щиту. На поверхности зеркала нанесен защитный слой из прозрачного пластика толщиной 2 см. Показатель преломления пластика равен 1,6. На роботе укреплена лазерная указка, ориентированная под углом 30° к вектору скорости. С какой скоростью движется пятнышко от лазерного луча по экрану?



10.2. Робот небольших размеров движется с постоянной скоростью $v = 1$ м/с вдоль стены коридора шириной $l = 2,4$ м, в одной из стен которого есть проем шириной $l = 2,4$ м, а на другой висит плоское зеркало такой же в точности ширины (2,4 м), по высоте в точности соответствующее высоте стены. Толщина панелей, из которых сооружены стены, превышает размеры робота, и панели покрашены черной краской (то есть поглощают почти весь падающий на них свет). Зеркало смещено относительно проема на половину своей ширины (1,2 м). На роботе установлена маленькая лампочка. В некоторый момент времени робот находится радом с краем проема. В течении какого времени после этого свет от лампочки попадает в проем?



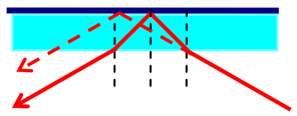
10.3. В некоторой оптической системе используется двугранный уголковый отражатель – это два плоских зеркала, плоскости которых перпендикулярны. Рассмотрим тонкий пучок параллельных световых лучей (например, луч лазера), падающий на такой отражатель в плоскости, перпендикулярной ребру двугранного угла, образованного зеркалами, под углом $0° \leq \alpha < 45°$ к оси симметрии отражателя (биссектрисе прямого угла). Пучок падает таким образом, что испытывает ровно два отражения – по одному от каждой из зеркальных плоскостей. Под каким углом к первоначальному направлению он будет идти после второго отражения? Как изменяется угол поворота луча при возрастании α от 0° до 45°?



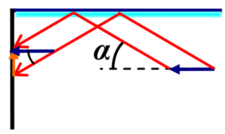
10.4. Фотодатчик состоит из фотоэлемента, ток в цепи которого пропорционален мощности поступающего на фотоэлемент света, и собирающей линзы, направляющей свет от внешнего источника на фотоэлемент. Фотоэлемент расположен в главном фокусе линзы, его чувствительная поверхность в виде кружка площадью $\sigma = 12{,}56\,\text{мм}^2$ развернута перпендикулярно главной оптической оси. Диаметр линзы $d = 50\,\text{мм}$, ее фокусное расстояние $F = 80\,\text{см}$. Окуляр фотоэлемента нацеливается точно на маленькую лампочку, мощность светового излучения которой $P = 32\,\text{Вт}$, причем лампочка светит по всем направлениям одинаково. Известно, что при мощности поступающего света $P_0 = 0{,}1\,\text{мВт}$ ток фотодатчика равен $I_0 = 14\,\text{мА}$. Каким будет ток фотодатчика, если лампочка перемещается таким образом, что расстояние от нее до окуляра изменяется от 6м до 8м? Поглощением света пренебречь.

Ответы:

10.1. **примерно 1,73 м/с**. Если разобрать отражение светового луча от зеркала, покрытого прозрачным преломляющим слоем постоянной толщины, то обнаруживается, что этот слой

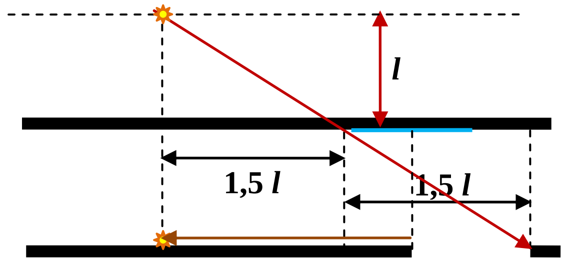


не влияет на угол отражения. В самом деле (рисунок справа) угол преломления при входе в слой будет равен углу падения на зеркало, затем углу отражения, и наконец – углу падения на границу пластик-воздух.



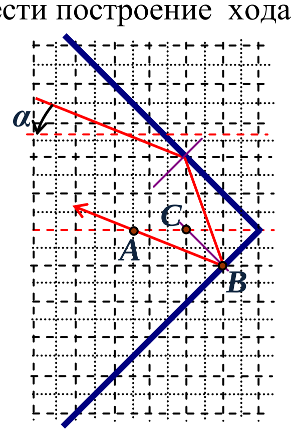
Исходя из обратимости хода световых лучей можно утверждать, что угол преломления в этом случае после выхода в воздух окажется равен первоначальному углу падения. Поэтому влияние слоя сводится к смещению отраженного от зеркала луча параллельно себе (на рисунке справа пунктиром показан ход лучей для зеркала без преломляющего слоя). После этого проследим за смещением точки попадания луча на экран. Как видно из рисунка справа, смещение по экрану связано со смещением вдоль зеркала соотношением $u = v \cdot tg(\alpha)$. Таким образом, скорость «пятнышка» равна $u = \dfrac{v}{\sqrt{3}} \approx 1{,}73\,\text{м/с}$.

10.2. **4,8 с.** Ясно, что в проем попадают световые лучи, отраженные от зеркала. Лучи, отраженные от зеркала, могут приходить в проем только от точек поверхности зеркала.

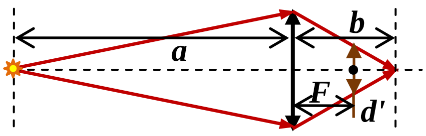


Поэтому зона, из которой свет от лампочки попадает в проем, может быть определена следующим образом: построим траекторию движений изображения лампочки в зеркале и отметим крайнее положение изображения, из которого луч, идущий в край проема, проходит через плоскость зеркала (см. рисунок). Как видно, для ухода из этой зоны лампочка должна сместиться на расстояние $2l = 4{,}8\,\text{м}$. На это уйдет время $t = \dfrac{2l}{v} = 4{,}8\,\text{с}$.

10.3. **180°, независимо от α.** Для ответа на этот вопрос нужно провести построение хода лучей внутри отражателя. Как ясно из построения, угол падения на первое зеркало будет равен α+45°. С учетом того, что угол между зеркалами равен 90°, угол падения на второе зеркало оказывается равен 90°–(α+45°)=45°–α. Таким же будет и угол отражения, то есть ∠ B в треугольнике ABC. В этом треугольнике ∠ C равен 135°, и поэтому величина ∠ A равна 180°–135°–(45°– α)=α. Это означает, что после второго отражения луч идет точно противоположно первоначальному направлению для любого 0° ≤ α < 45°! Итак, угол поворота луча после двух отражений в уголковом отражателе равен 180° независимо от α.



10.4. 7 **мА.** Отметим, что размеры линзы много меньше расстояния до источника, и поэтому можно считать, что площадь участка фронта световой волны от лампочки, попадающего в окуляр, равна $\pi d^2/4$. Полная площадь фронта при расстоянии a от лампочки - это $4\pi a^2$, и мощность света, попадающего в окуляр, равна $P' = (d/4a)^2 P$. Лучи от



лампы фокусируются линзой на расстоянии b от нее (см.рисунок). Это расстояние можно найти по формуле тонкой линзы: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{F} \Rightarrow b=\frac{aF}{a-F}$. Значит, диаметр светлого пятна в фокальной плоскости линзы $d'=\frac{b-F}{b}d=\frac{F}{a}d$. Если этот диаметр больше, чем диаметр чувствительной поверхности фотоэлемента, то фотоэлемент получит только часть светового потока, то есть мощность света, попадающего на фотоэлемент, будет $P''=\frac{4\sigma}{\pi d'^2}P'=\frac{\sigma}{4\pi F^2}P$.

Проверим использованное условие: $\sigma<\frac{\pi d'^2}{4}=\frac{\pi F^2 d^2}{4a^2}$ при $a<\frac{\sqrt{\pi}Fd}{2\sqrt{\sigma}}\approx 10$ м. Как видно, во всем заданном диапазоне значений a это требование выполняется. В результате, ток фотодатчика $I=\frac{P''}{P_0}I_0=\frac{\sigma P}{4\pi F^2 P_0}I_0\approx 7$ мА.

КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ ЗАДАНИЯ 10:

№	критерий	максимальный балл
10.1	Правильный анализ хода лучей в преломляющем слое – 2 балла, вывод о независимости угла отражения от присутствия слоя – 2 балла, правильное построение смещения пятна – 4 балла, правильный ответ для модуля скорости – 2 балла.	**10**
10.2	Правильное построение – 3 балла, правильный численный ответ – 2 балла.	**5**
10.3	Правильный анализ первого отражения – 5 баллов, правильный анализ второго отражения – 5 баллов, правильный ответ – 5 баллов.	**15**
10.4	Используется формула тонкой линзы – 2 балла, используется равномерность распределения энергии излучения по фронту световой волны – 2 балла, правильно определена P' – 3 балла, определен диаметр освещенного пятна в фокальной плоскости – 4 балла, установлено, что $\sigma<\frac{\pi d'^2}{4}$ – 4 балла, получен правильный ответ – 5 баллов.	**20**

Максимальный балл за задание: **50**.

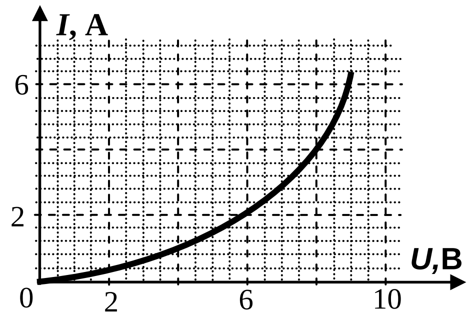
Задание 11 (10-11 классы)

11. Допустим, у нас есть несколько одинаковых аккумуляторов и амперметр. При подключении амперметра к клеммам одного аккумулятора он показывает силу тока $I_1 = 4$ А, а при подключении к двум аккумуляторам, соединенным последовательно – силу тока $I_2 = 4{,}8$ А.

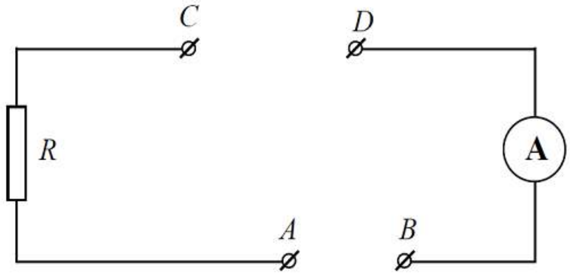
11.1. С чем связано такое заметное различие показаний? Соотношение каких параметров амперметра и аккумулятора можно определить на основании этих измерений?

11.2 Что покажет этот же амперметр, если его подключить к тем же двум аккумуляторам, но соединенным параллельно? А что на его месте показал бы «практически идеальный» вольтметр?

11.3. Существуют элементы электрических цепей, у которых протекающий ток не пропорционален приложенному напряжению. Например, у полупроводниковых диодов ток растет быстрее, чем напряжение (такие элементы, не подчиняющиеся закону Ома, называют «нелинейными»). Связь тока с напряжением для подобных элементов описывается вольт-амперной характеристикой (ВАХ). Рассмотрим диод, ВАХ которого показана на рисунке. Оказалось, что при подключении его к одному аккумулятору напряжение на диоде точно такое же, как на амперметре, подключенному к одному аккумулятору. Чему равно это напряжение? Какова мощность, потребляемая диодом? Чему равно внутреннее сопротивление аккумулятора?



11.4. Рассмотрим схему, показанную на рисунке. Между клеммами A и B поддерживается неизменное напряжение. Если замкнуть клеммы C и D проводом с пренебрежимо малым сопротивлением, то практически идеальный амперметр в схеме покажет силу тока, равную $I = 8$ А. Допустим, что у нас есть два одинаковых диода, для которых связь силы тока с приложенным напряжением в открытом состоянии



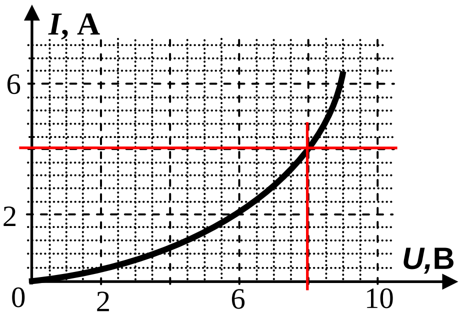
дается формулой $I(U) = I_0\left(\dfrac{U}{U_0}\right)^2$. Если соединить эти диоды параллельно и подключить к клеммам C и D, амперметр покажет ток $I_1 = 4$ А. Каковы будут показания амперметра, если подключить к клеммам C и D эти же два диода, но соединенные последовательно?

Ответы:

11.1. **С тем, что аккумулятор и амперметр не идеальны – внутренние сопротивления этих приборов не равны нулю. Можно найти, что отношение их внутренних сопротивлений $\dfrac{r}{R_A} = 2$.** Действительно, при учете внутренних сопротивлений ток в цепи с одним аккумулятором равен $I_1 = \dfrac{U_0}{R_A + r}$ (здесь U_0 – напряжение на клеммах аккумулятора при разомкнутой цепи). При двух аккумуляторах, соединенных последовательно, ток в цепи $I_2 = \dfrac{2U_0}{R_A + 2r}$ Следовательно, $\dfrac{I_2}{I_1} = \dfrac{2(R_A + r)}{R_A + 2r} \Rightarrow \dfrac{r}{R_A} = \dfrac{2I_1 - I_2}{2(I_2 - I_1)} = 2$.

11.2. **6 А, а показания «идеального» амперметра были бы 12 А.** Если источники соединены параллельно, напряжение на них одинаково, а общее внутреннее сопротивление равно $r/2$, то есть $I_2' = \dfrac{U_0}{R_A + r/2} = \dfrac{R_A + r}{R_A + r/2} I_1 = \dfrac{3}{2} I_1 = 6$ А. «Практически идеальный» амперметр – это амперметр с очень малым внутренним сопротивлением, и для него $I_2' = \dfrac{U_0}{r/2} = 2\left(1 + \dfrac{R_A}{r}\right) I_1 = 3I_1 = 12$ А.

11.3. **Напряжение на диоде 8 В, он потребляет мощность 32 Вт, внутреннее сопротивление аккумулятора 4 Ом.** Из условия следует, что ток через диод равен току через амперметр при подключении к одному аккумулятору, то есть $I_1 = 4\,\text{А}$. Тогда по ВАХ можно определить напряжение: оно равно $U = 8\,\text{В}$. Потребляемая мощность $P = U \cdot I_1 = 32\,\text{Вт}$. На амперметре при подключении одного аккумулятора было такое же напряжение, поэтому сопротивление амперметра $R_A = \dfrac{U}{I_1} = 2\,\text{Ом}$. Согласно результату



п.11.1, внутреннее сопротивление источника в 2 раза больше. Значит, $r = 2\dfrac{U}{I_1} = 4\,\text{Ом}$.

11.4. **1,38 А.** Опыт с коротким замыканием клемм C и D позволяет записать для напряжения между клеммами A и B: $U_{AB} \approx IR$. При параллельном включении диодов через амперметр течет ток I_1, а ток в каждом из диодов равен $\dfrac{I_1}{2}$, и поэтому $U_0\sqrt{\dfrac{I_1}{2I_0}} = U_{AB} - I_1R = (I - I_1)R$.

При последовательном подключении диодов ток в них одинаков и равен I_2, а напряжения на каждом из них одинаковы и равны $U(I_2) = U_0\sqrt{\dfrac{I_2}{I_0}}$. Эти напряжения складываются, поэтому:

$2U_0\sqrt{\dfrac{I_2}{I_0}} = U_{AB} - I_2R = (I - I_2)R$. Если Разделив эти соотношения друг на друга, получаем уравнение для определения I_2, которое удобно записать относительно переменной $x \equiv \sqrt{\dfrac{I_2}{I_1}}$:

$x^2 + \dfrac{2\sqrt{2}(I - I_1)}{I_1}x - \dfrac{I}{I_1} = 0$. Поскольку $\dfrac{I}{I_1} = 2$, то это уравнение имеет вид $x^2 + 2\sqrt{2}\,x - 2 = 0$.

Физический смысл имеет только положительный корень $x = 2 - \sqrt{2}$, поэтому $I_2 = x^2 I_1 = (6 - 4\sqrt{2})I_1 \approx 1{,}38$ А.

КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ ЗАДАНИЯ 11:

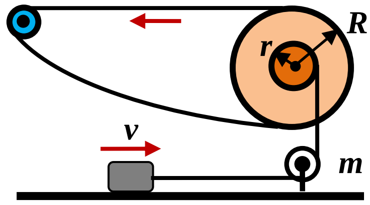
№	критерий	максимальный балл
11.1	Правильно указана причина расхождения – 4 балла, записаны выражения для токов I_1 и I_2 – 4 балла , правильно вычислено отношение внутренних сопротивлений – 2 балла.	**10**
11.2	Правильный ответ для параллельного соединения – 3 балла, правильный ответ для «идеального» амперметра – 2 балла.	**5**
11.3	Есть вывод о величине тока, текущего через диод – 1 балл, идея графического решения – 2 балла, правильно найдено напряжение на диоде – 4 балла, правильно найдена мощность – 4 балла, использование найденного значения U – 1 балл, правильный ответ для сопротивления – 3 балла.	**15**
11.4	Записана связь постоянного напряжения и тока I – 2 балла, получено уравнение для параллельного соединения – 3 балла, получено уравнение для последовательного соединения – 3 балла, получено уравнение для I_2 – 4 балла, оно преобразовано к виду квадратного уравнения – 3 балла, получен правильный ответ – 5 баллов.	**20**

Максимальный балл за задание: **50**.

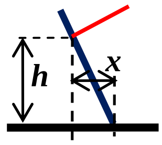
Задание 12 (9-11 классы)

12. В механике известно *правило рычага*: для того, чтобы у твердого тела вращение отсутствовало или происходило с постоянной угловой скоростью, сумма моментов приложенных к нему сил должна равняться нулю. Напомним, что *момент силы* можно определить как произведение величины силы на ее *плечо* (это расстояние от линии действия силы до оси вращения), взятое со знаком «плюс» или «минус». Знак зависит от направления вращения, которое эта сила «пытается» создать. Обычно договариваются считать направление вращения против часовой стрелки положительным, а по часовой стрелке – отрицательным.

12.1. Вращение вала лебедки (его радиус равен $r = 5$ см) осуществляется с помощью цепной передачи (см. рисунок). Радиус жестко соединенной с валом шестерни $R = 15$ см. Чему равна сила натяжения цепи при перемещении по горизонтальной плоскости груза с массой $m = 27$ кг с постоянной скоростью, если силы трения, действующие на вал, пренебрежимо малы? Коэффициент трения между грузом и поверхностью равен 0,5. Ускорение свободного падения считать равным $g \approx 10$ м/с^2. Какую минимальную работу должен совершить двигатель, вращающий ведущую шестерню передачи, чтобы переместить груз на расстояние 4 м? Установленный на поверхности неподвижный блок очень легкий и вращается без трения.

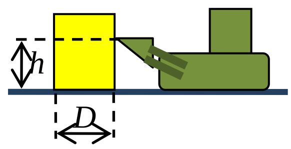


12.2. Шест длиной $L = 195$ см подвесили, зацепив легкий прочным трос за небольшое отверстие, находящееся на некотором расстоянии от его конца. При этом оказалось, что нижним концом он опирается на шероховатый пол, а трос перпендикулярен шесту. Точка прикрепления к тросу оказалась на высоте $h = 120$ см над полом, а точка опоры шеста о пол по горизонтали смещена от нее на расстояние $x = 50$ см. Масса шеста равна $m = 13$ кг. Найдите силу натяжения троса.



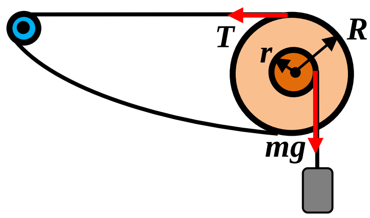
12.3.На наклонную поверхность горки нужно установить препятствие для робота – брусок в форме параллелепипеда размерами 20см×40см×60см. Брусок однороден, коэффициент трения всех граней бруска о поверхность горки равен $\mu = 0{,}577$. В первом случае брусок кладут на поверхность самой длинной гранью вдоль склона (так, что «высотой» бруска над склоном оказалась длина самой короткой стороны), а во втором – самой короткой (так, что «высотой» оказалась длина средней грани). В каком случае можно наклонить поверхность к горизонту сильнее (чтобы брусок еще покоился) – в первом или во втором? На сколько градусов различаются максимальные допустимые углы наклона в этих случаях?

12.4. Модель «бульдозера» должна двигать перед собой ковшом с постоянной скоростью по горизонтальной поверхности однородный брусок шириной $D = 21$ см, высота которого больше ширины. Коэффициент трения бруска о поверхность $\mu = 0{,}75$. На какой максимальной высоте h над поверхностью может находиться точка давления ковша на брусок, чтобы брусок двигался поступательно? Какую минимальную мощность должен развивать бульдозер при перемещении бруска со скоростью 2 м/с, если масса бруска $m = 800$ г?



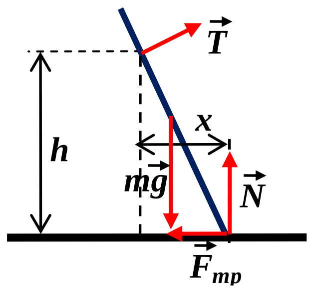
Ответы:

12.1. **Сила натяжения цепи равна 45 Н, минимальная работа 540 Дж.** Так как вал и шестерня вращаются с постоянной скоростью, то сумма приложенных к ним моментов сил (а это сила натяжения цепи и сила натяжения троса, которым тянут груз, причем для троса эта сила равна силе трения груза о поверхность) равна нулю, то

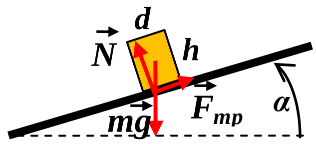


есть $T \cdot R = 0{,}5 \cdot mg \cdot r$, Поэтому $T = 0{,}5\dfrac{r}{R}mg \approx 45$Н. Так как рычаги блоки не дают выигрыша в работе, то минимальная работа (когда мы пренебрегаем всеми потерями) соответствует работе против силы трения, препятствующей перемещению груза: $A_{\min} = 0{,}5 \cdot mg \cdot s = 540$ Дж.

12.2. **Сила натяжения троса 37,5 Н.** На шест действуют: сила тяжести, сила нормальной реакции пола $\vec{N}$ и сила трения $\vec{F}_{mp}$, сила натяжения троса $\vec{T}$. Силы $\vec{N}$ и $\vec{F}_{mp}$ имеют нулевые плечи относительно точки опоры шеста. Плечо силы тяжести равно $l_g = \frac{L}{2}\cos(\alpha) = \frac{Lx}{2\sqrt{h^2+x^2}}$ (α – угол наклона шеста к полу), а плечо силы $\vec{T}$ равно $l_T = \sqrt{h^2+x^2}$. Поэтому уравнение правила моментов относительно этой точки имеет вид: $+mg\frac{Lx}{2\sqrt{h^2+x^2}} - T\sqrt{h^2+x^2} = 0$. Из этого уравнения находим: $T = \frac{Lx}{2(h^2+x^2)}mg = 37{,}5\,\text{Н}$.



12.3. **Больше можно наклонить в первом случае, на 3,2°.** На брусок, лежащий на наклонной плоскости, действуют сила тяжести, сила трения покоя и сила нормальной реакции. Из условия равновесия следует, что $F_{mp} = mg\sin(\alpha)$, а $N = mg\cos(\alpha)$. Ограничение на силу трения скольжения $F_{mp} \le \mu N$ показывает, что брусок не скользит, если $tg(\alpha) \le \mu$. Так как в покое должна равняться нулю и сумма моментов этих сил, то точкой приложения силы реакции должна быть точка, в которой линия действии силы тяжести пересекает площадь опоры (плечи всех трех сил относительно этой точки будут равны нулю). Это требование нельзя выполнить, если диагональ сечения бруска с шириной (вдоль склона) d и высотой (над склоном) h наклонится дальше вертикали. В этом случае брусок начнет опрокидываться вокруг нижнего ребра. Поэтому условием покоя является и второе требование: $tg(\alpha) \le \frac{d}{h}$. В первом случае $\frac{d_1}{h_1} = 3 > \mu = 0{,}577$, и угол наклона ограничивается именно началом скольжения: $\alpha_1^{(\max)} = arctg(0{,}577) \approx 30°$. Во втором случае $\frac{d_2}{h_2} = 0{,}5 < \mu = 0{,}577$, и угол ограничивается началом опрокидывания: $\alpha_2^{(\max)} = arctg(0{,}5) \approx 26{,}8°$. Итак, в первом случае можно наклонить плоскость сильнее – максимальный угол наклона на 3,2° больше, чем во втором.



12.4. **14 см, 12 Вт.** При движении с постоянной скоростью сумма проекций сил на горизонтальное направление движение равна нулю. Поэтому сила, с которой ковш «бульдозера» действует на брусок, должна равняться силе трения скольжения, то есть $F = \mu mg$. Для того, чтобы движение было поступательным, необходимо, чтобы брусок не опрокидывался вокруг дальнего от бульдозера нижнего ребра. Для этого нужно, чтобы момент силы F относительно этого ребра не превосходил момент силы тяжести, которая препятствует такому опрокидыванию. Таким образом, должно выполняться требование $\mu mg \cdot h \le mg \cdot \frac{D}{2}$. Значит, $h_{\max} = \frac{D}{2\mu} = 14\,\text{см}$. Минимальная мощность, необходимая для перемещения бруска со скоростью v равна $P = F \cdot v = \mu mgv = 12\,\text{Вт}$.

КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ ЗАДАНИЯ 12:

№	критерий	максимальный балл
12.1	Записано правило моментов – 1 балл, вычислена сила натяжения – 2 балла, вычислена работа – 2 балла.	**5**
12.2	Верно указаны силы – 2 балла, правильно определены плечи	**10**

	силы $\vec{T}$ и силы тяжести – по 1 баллу, правильно записано уравнение моментов – 3 балла, правильный ответ – 3 балла.	
12.3	Правильно определены причины нарушения равновесия (скольжение и опрокидывание) – по 1 баллу, получено требование $tg(\alpha) \le \mu$ – 4 балла, получено требование $tg(\alpha) \le d/h$ – 4 балла, правильно указано, в каком из случаев допустимый наклон больше – 2 балла, правильно найдена разница максимальных углов наклона – 3 балла.	**15**
12.4	Определено, что $F = \mu mg$ – 5 баллов, указано, что для поступательности движения брусок не должен вращаться вокруг дальнего ребра – 3 балла, правильно определено условие отсутствия вращения – 3 балла, записано требование $\mu mg \cdot h \le mg \cdot \frac{D}{2}$ – 4 балла, получен правильный ответ для высоты – 2 балла получен правильный ответ для мощности – 3 балла.	**20**

Максимальный балл за задание: **50**.