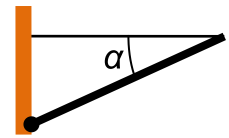
ЗАДАНИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО ТУРА ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОГО ЭТАПА ПО ФИЗИКЕ:
условия, решения и ответы

10 и 11 классы

БИЛЕТ № 01.

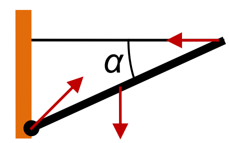
Задание 1:

Вопрос: Однородный стержень длиной 1 м и массой 1 кг может свободно вращаться в вертикальной плоскости вокруг одного из своих концов, который закреплен шарнирно. К другому концу прикреплена горизонтальная легкая нерастяжимая нить, которая удерживает стержень в положении, в котором стержень составляет с горизонталью угол 30° (см. рисунок). Найдите величину силы реакции шарнира.

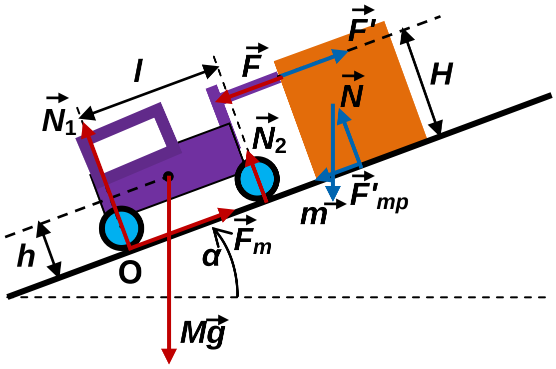


Задача: Небольшой робот должен двигать перед собой с постоянной скоростью кубик, поднимаясь по наклонной плоскости. Известно, что масса кубика в 2 раза меньше массы самого робота, коэффициенты трения ведущих (задних) колес робота и кубика о наклонную плоскость равны $\mu = \frac{2}{3}$. Передние колеса робота катятся без проскальзывания, расстояние между осями колес у него $l = 20$ см. Центр масс робота находится точно посередине между колесными осями на высоте $h = 7{,}5$ см. Высота точки давления рамы робота на кубик над поверхностью равна $H = 15$ см. Найдите максимальный угол наклона плоскости, при котором робот может выполнить свою задачу.

Ответ на вопрос: Сначала используем правило моментов: $T \cdot l \sin(\alpha) - mg \cdot \frac{l}{2}\cos(\alpha) = 0 \Rightarrow T = \frac{\sqrt{3}}{2}mg$. Ясно, что горизонтальная и вертикальная составляющие силы реакции шарнира равны T и mg соответственно. Значит, величина силы реакции шарнира $F = \sqrt{T^2 + m^2g^2} = \frac{\sqrt{7}}{2}mg \approx 13{,}2$ Н.



Решение задачи: При поступательном движении кубика с постоянной скоростью сумма приложенных к нему сил равна нулю. На рисунке синим цветом показаны силы, действующие на кубик. Используя условие равенства нулю проекции суммы сил на направление вдоль



наклонной плоскости, найдем, что сила, действующая на кубик со стороны робота $F' = mg\sin(\alpha) + F'_{\text{тр}}$. Так как кубик скользит, то $F'_{\text{тр}} = \mu N = \mu mg\cos(\alpha)$, и поэтому $F' = mg[\sin(\alpha) + \mu\cos(\alpha)]$. По третьему закону Ньютона такую же величину имеет сила F, действующая со стороны кубка на робота. Красным цветом показаны вектора сил, приложенных к роботу. Обратим внимание, что силу нормальной реакции плоскости мы разделили на силы, действующие на передние (свободные) и задние (ведущие) колеса, и что силой трения качения свободных колес мы пренебрегаем. Сила трения $F_{\text{тр}}$ ведущих колес направлена вверх вдоль плоскости – именно она обеспечивает движение робота и кубика. Проекция на направление вдоль наклонной плоскости суммы сил, действующих на робота, также должна быть равна нулю. Из этого условия найдем необходимую величину силы трения ведущих колес: $F_{\text{тр}} = Mg\sin(\alpha) + mg[\sin(\alpha) + \mu\cos(\alpha)]$. С учетом того, что по условию $M = 2m$, получаем: $F_{\text{тр}} = mg[3\sin(\alpha) + \mu\cos(\alpha)]$. Кроме того, должна равняться нулю и сумма моментов сил, которую удобно вычислять относительно точки О (тогда плечи сил $F_{\text{тр}}$ и N_1 равны нулю). При записи этого условия наиболее аккуратно нужно вычислять плечо силы $M\vec{g}$ относительно точки О. Оно равно $l_g = \frac{l}{2}\cos(\alpha) - h\sin(\alpha)$. Итак, правило моментов приводит к соотношению $+N_2 l + FH - Mg\left(\frac{l}{2}\cos(\alpha) - h\sin(\alpha)\right) = 0$, из которого можно найти величину $N_2 = mg\left[\cos(\alpha) - \frac{2h}{l}\sin(\alpha)\right] - mg\frac{H}{l}[\sin(\alpha) + \mu\cos(\alpha)]$.Учтем, что в соответствии с условием $\frac{H}{l} = \frac{3}{4}$, $\frac{h}{l} = \frac{3}{8}$, а $\mu = \frac{2}{3}$. Тогда $N_2 = \frac{mg}{2}[\cos(\alpha) - 3\sin(\alpha)]$. Сумма сил реакции уравновешивает компоненту силы тяжести робота, и $N_1 = 2mg\cos(\alpha) - N_2 = \frac{3}{2}mg[\cos(\alpha) + \sin(\alpha)]$. Такое движение возможно при выполнении двух условий:

1) $F_{\text{тр}} \le \mu N_1 \Rightarrow mg\left[3\sin(\alpha) + \frac{2}{3}\cos(\alpha)\right] \le mg[\cos(\alpha) + \sin(\alpha)]$, откуда $\operatorname{tg}(\alpha) \le \frac{1}{6}$.

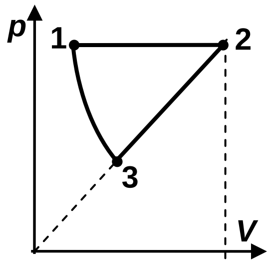
2) Передние колеса не отрываются от поверхности, то есть $N_2 = \frac{mg}{2}[\cos(\alpha) - 3\sin(\alpha)] \ge 0$, откуда $\operatorname{tg}(\alpha) \le \frac{1}{3}$.

Как видно, первое условие более жесткое, и максимальный угол, при котором возможно движение вверх вдоль плоскости робота с грузом $\alpha_{\max} = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{6}\right) \approx 9{,}5°$.

Задание 2:

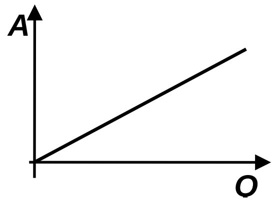
Вопрос: Одноатомный идеальный газ участвует в процессе, в котором его давление растет прямо пропорционально объему. Постройте график зависимости совершенной в этом процессе работы от полученного газом количества теплоты.

Задача: В тепловом двигателе в качестве рабочего тела используется одноатомный идеальный газ. Цикл рабочего тела состоит из изобары 1-2, процесса 2-3, диаграмма которого в координатах давление-объем – прямая, проходящая через начало координат, и адиабаты 3-1 (см. рисунок). Известно, что в процессе 2-3 над газом совершается работа, равная шестой части количества теплоты, подведенной к газу в изобарическом процессе. При этом 25% работы рабочего тела в цикле расходуется на компенсацию потерь на трение в узлах двигателя. Остальные потери можно считать пренебрежимо малыми. Найти КПД двигателя.



Ответ на вопрос: Рассмотрим расширение газа от объема V_1 до V_2. Работа газа равна площади под диаграммой процесса в координатах $p-V$ (площади трапеции), то есть

$$A = \frac{p(V_1)+p(V_2)}{2}(V_2 - V_1) = \frac{\alpha}{2}(V_2 + V_1)(V_2 - V_1) = \frac{\alpha}{2}(V_2^2 - V_1^2).$$



При этом изменение температуры, в соответствии с уравнением Менделеева-Клапейрона $\Delta T = \frac{1}{\nu R}(p_2 V_2 - p_1 V_1) = \frac{\alpha}{\nu R}(V_2^2 - V_1^2)$, и поэтому $A = \frac{\nu R}{2}\Delta T$. Количество теплоты $Q = A + \Delta U = \frac{1}{2}\nu R \Delta T + \frac{3}{2}\nu R \Delta T = 4A$. Итак, $A = \frac{1}{4}Q$. График показан на рисунке.

Решение задачи: В процессе 1-2 газ получает тепло, а в процессе 2-3 – отдает. Поэтому теплота нагревателя $Q_H = Q_{12}$, а теплота холодильника $Q_X = -Q_{23}$. В соответствии с результатом, полученным в ответе на вопрос, $A_{23} = \frac{1}{4}Q_{23} \Rightarrow Q_X = 4|A_{23}|$. Из условия ($Q_H = 6|A_{23}|$) находим, что КПД цикла (без учета потерь на трение) $\eta_0 = 1 - \frac{Q_X}{Q_H} = \frac{1}{3}$. С учетом потерь на трение КПД двигателя $\eta = 0{,}75 \cdot \eta_c = \frac{1}{4} = 25\%$.

Задание 3:

Вопрос: Электромотор подключен к аккумулятору с ЭДС 40 В. Полное сопротивление контура обмотки ротора равно 8 Ом. Найти максимальную возможную величину полезной мощности электромотора. Потерями на трение в узлах двигателя пренебречь.

Задача: С помощью легких прочных тросов и электродвигателей из воды вытаскивают небольшой стальной груз. Сила сопротивления, действующая на груз со стороны воды, с хорошей точностью пропорциональна скорости его подъема. Если к грузу прицепить вертикальный трос от одного электродвигателя и использовать для питания двигателя аккумулятор с пренебрежимо малым внутренним сопротивлением, то в установившемся режиме ток через аккумулятор равен $I_1 = 2{,}2$ А. Если использовать два таких электродвигателя, подключенных к тому же аккумулятору параллельно (оба троса вертикальны), то ток возрастет до $I_2 = 3{,}6$ А. Каким станет ток через аккумулятор, если аналогичным образом использовать четыре таких же электродвигателя? Известно, что сила натяжения троса, создаваемая электродвигателем, прямо пропорциональна силе тока, текущего в обмотке его ротора.

Ответ на вопрос: Мощность, отдаваемая в цепь аккумулятором, расходуется на компенсацию тепловых потерь в контуре обмотки ротора (мощность которых $P_Q = RI^2$) и полезную работу. Значит, $P_n = \mathrm{E} \cdot I - RI^2$. При изменении режима работы двигателя изменяется сила тока через обмотку ротора. Как видно из записанного выражения (график функции $P_n(I)$ - парабола), максимальная мощность двигателя достигается при $I = \dfrac{E}{2R}$, и она равна $P_{n\max} = \dfrac{E^2}{4R} = 50\,\text{Вт}$.

Решение задачи: Запишем уравнение энергетического баланса цепи при использовании n электродвигателей. Если ток аккумулятора равен I_n, то каждый двигатель потребляет ток $\dfrac{1}{n}I_n$. Обозначим R сопротивление цепи ротора каждого из электродвигателей, а Е – ЭДС аккумулятора. Тогда $E \cdot I_n = nR(I_n/n)^2 + P_n$. Сила натяжения троса при равномерном движении должна уравновешивать сумму силы Архимеда, веса груза и силы сопротивления среды, которая по условию пропорциональна скорости: $|\vec{F}_c| = \alpha \cdot v$. Итак, $F = mg - F_A + \alpha \cdot v \equiv F_0 + \alpha \cdot v$. Полезная мощность P_n, развиваемая всеми двигателями, равна $P_n = F \cdot v_n = (F_0 + \alpha v_n)v_n$ (v_n – скорость подъема груза при использовании n электродвигателей). Ясно также, что тросы натянуты одинаково, а по условию сила натяжения каждого троса пропорциональна силе тока в обмотке ротора одного двигателя с некоторым коэффициентом (обозначим его k). Поэтому $F_0 + \alpha \cdot v_n = n \cdot k \cdot \dfrac{I_n}{n} \Rightarrow v_n = \dfrac{kI_n - F_0}{\alpha}$.

Следовательно, $E \cdot I_n = \dfrac{R}{n}I_n^2 + kI_n \cdot \alpha \dfrac{kI_n - F_0}{\alpha}$. Из этого соотношения находим, что $I_n = \dfrac{(E + kF_0)n}{R + k^2 n}$. Удобнее анализировать поведение **обратной силы тока** $\dfrac{1}{I_n} = \dfrac{k^2}{E + kF_0} + \dfrac{R}{E + kF_0}\dfrac{1}{n}$, так как оно проще зависит от n. В самом деле, из выражений $\dfrac{1}{I_1} = \dfrac{k^2}{E + kF_0} + \dfrac{R}{E + kF_0}$ и $\dfrac{1}{I_2} = \dfrac{k^2}{E + kF_0} + \dfrac{R}{E + kF_0}\dfrac{1}{2}$ находим, что $\dfrac{R}{2(E + kF_0)} = \dfrac{1}{I_1} - \dfrac{1}{I_2}$. Затем, из соотношения $\dfrac{1}{I_4} = \dfrac{k^2}{E + kF_0} + \dfrac{R}{E + kF_0}\dfrac{1}{4}$ получаем $\dfrac{1}{I_2} - \dfrac{1}{I_4} = \dfrac{R}{4(E + kF_0)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{I_1} - \dfrac{1}{I_2}\right)$.

Следовательно, $I_4 = \dfrac{2I_1 I_2}{3I_1 - I_2} = 5{,}28\,\text{А}$.

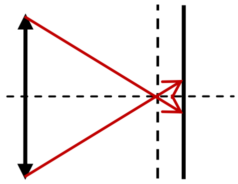
Задание 4:

Вопрос: Небольшая лампочка приближается к тонкой линзе по главной оптической оси со скоростью 0,4 м/с. Найти скорость действительного изображения лампочки в тот момент, когда расстояние от лампочки до линзы в три раза превышает фокусное расстояние линзы.

Задача: Школьник установил на квадрокоптер пленочный фотоаппарат с дистанционным управлением. Он отрегулировал объектив так, что чувствительная поверхность пленки располагалась на расстоянии $l = 20{,}1\,\text{мм}$ от объектива – при этом максимально четкими на снимке получались объекты на поверхности земли при заданной высоте зависания квадрокоптера. Оказалось, что эти объекты становятся размытыми, если это расстояние увеличить на $\Delta l = 0{,}1\,\text{мм}$. Каким должно быть время открытия затвора фотоаппарата, чтобы при полете на той же высоте со скоростью $v = 3\,\text{м/с}$ объекты на поверхности земли не получались размытыми на снимке? Диаметр объектива $d = 15\,\text{мм}$, а его оптическая сила $D = 50\,\text{дптр}$.

Ответ на вопрос: Ясно, что линза собирающая. По формуле линзы $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{F}$. Продифференцируем это соотношение и учтем, что $a'_t = -v_a$ (уменьшение a соответствует движению по направлению к линзе) и $b'_t = v_b$. Тогда $\frac{v_a}{a^2} - \frac{v_b}{b^2} = 0 \Rightarrow v_b = \frac{b^2}{a^2} v_a$. Из той же формулы линзы $b = \frac{aF}{a-F}$, то есть $v_b = \frac{F^2}{(a-F)^2} v_a$, и $a = 3F$ при получаем $v_b = \frac{1}{4} v_a = 0{,}1$ м/с.

Решение задачи: Ясно, что l – это расстояние от линзы до изображения предметов, находящихся на заданной высоте h. Следовательно, $\frac{1}{h} + \frac{1}{l} = D \Rightarrow h = \frac{l}{Dl-1}$. При увеличении расстояния на Δl лучи, сфокусированные в точку на предыдущем расстоянии дают пятно размером $\delta = \frac{\Delta l}{l} d$ (см. рисунок). Это и есть величина изображения точки, при котором она выглядит «размытой». При перемещении объекта перпендикулярно главной оптической оси линзы со скоростью v относительно линзы ее изображение перемещается в плоскости со скоростью

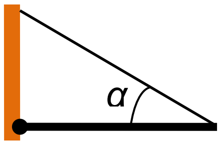


$v' = \frac{l}{h} v = (Dl-1)v$. Значит, условие того, чтобы объекты на поверхности земли «не получались размытыми на снимке» - это $v'\tau = (Dl-1)v\tau < \delta$. В результате получаем, что $\tau < \frac{\Delta l}{l(Dl-1)} \frac{d}{v} \approx 0{,}005$ с.

БИЛЕТ № 03.

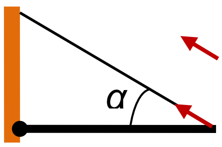
Задание 1:

Вопрос: Однородный стержень длиной 1 м и массой 1 кг может свободно вращаться в вертикальной плоскости вокруг одного из своих концов, который закреплен шарнирно. К другому концу прикреплена легкая нерастяжимая нить, которая удерживает стержень в горизонтальном положении. Сама нить при этом составляет с горизонталью угол 30° (см. рисунок). Найдите величину силы реакции шарнира.

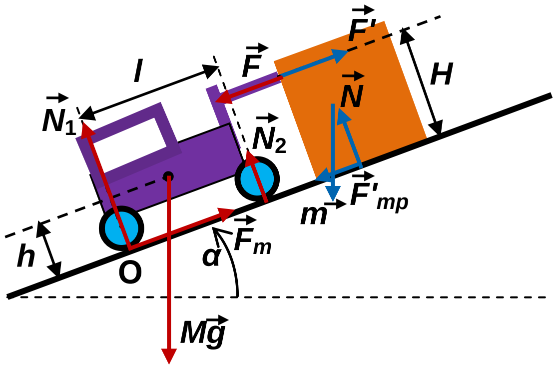


Задача: Небольшой робот должен двигать перед собой с постоянной скоростью кубик, поднимаясь по наклонной плоскости. Известно, что масса кубика в 2 раза меньше массы самого робота, коэффициенты трения ведущих (задних) колес робота и кубика о наклонную плоскость равны $\mu = 1$. Передние колеса робота катятся без проскальзывания, расстояние между осями колес у него $l = 20$ см. Центр масс робота находится точно посередине между колесными осями на высоте $h = 5$ см. Высота точки давления рамы робота на кубик над поверхностью равна $H = 15$ см. Найдите максимальный угол наклона плоскости, при котором робот может выполнить свою задачу.

Ответ на вопрос: Сначала используем правило моментов: $T \cdot l \sin(\alpha) - mg \cdot \frac{l}{2} = 0 \Rightarrow T = mg$. Ясно, что горизонтальная и вертикальная составляющие силы реакции шарнира равны $T\cos(\alpha)$ и $mg - T\sin(\alpha)$ соответственно, то есть $\frac{\sqrt{3}}{2} mg$ и $\frac{1}{2} mg$. Значит, величина силы реакции шарнира $F = mg \approx 10$ Н.



Решение задачи: При поступательном движении кубика с постоянной скоростью сумма приложенных к нему сил равна нулю. На рисунке синим цветом показаны силы, действующие на кубик. Используя условие равенства нулю проекции суммы сил на направление вдоль



наклонной плоскости, найдем, что сила, действующая на кубик со стороны робота $F' = mg\sin(\alpha) + F'_{mp}$. Так как кубик скользит, то $F'_{mp} = \mu N = \mu mg\cos(\alpha)$, и поэтому $F' = mg[\sin(\alpha) + \mu\cos(\alpha)]$. По третьему закону Ньютона такую же величину имеет сила F, действующая со стороны кубка на робота. Красным цветом показаны вектора сил, приложенных к роботу. Обратим внимание, что силу нормальной реакции плоскости мы разделили на силы, действующие на передние (свободные) и задние (ведущие) колеса, и что силой трения качения свободных колес мы пренебрегаем. Сила трения F_{mp} ведущих колес направлена вверх вдоль плоскости – именно она обеспечивает движение робота и кубика. Проекция на направление вдоль наклонной плоскости суммы сил, действующих на робота, также должна быть равна нулю. Из этого условия найдем необходимую величину силы трения ведущих колес: $F_{mp} = Mg\sin(\alpha) + mg[\sin(\alpha) + \mu\cos(\alpha)]$. С учетом того, что по условию $M = 2m$, получаем: $F_{mp} = mg[3\sin(\alpha) + \mu\cos(\alpha)]$. Кроме того, должна равняться нулю и сумма моментов сил, которую удобно вычислять относительно точки О (тогда плечи сил F_{mp} и N_1 равны нулю). При записи этого условия наиболее аккуратно нужно вычислять плечо силы $M\vec{g}$ относительно точки О. Оно равно $l_g = \frac{l}{2}\cos(\alpha) - h\sin(\alpha)$. Итак, правило моментов приводит к соотношению $+N_2 l + FH - Mg\left(\frac{l}{2}\cos(\alpha) - h\sin(\alpha)\right) = 0$, из которого можно найти величину $N_2 = mg\left[\cos(\alpha) - \frac{2h}{l}\sin(\alpha)\right] - mg\frac{H}{l}[\sin(\alpha) + \mu\cos(\alpha)]$.Учтем, что в соответствии с условием $\frac{H}{l} = \frac{3}{4}$, $\frac{h}{l} = \frac{1}{3}$, а $\mu = 1$. Тогда $N_2 = \frac{mg}{4}\left[\cos(\alpha) - \frac{17}{3}\sin(\alpha)\right]$. Сумма сил реакции уравновешивает компоненту силы тяжести робота, и $N_1 = 2mg\cos(\alpha) - N_2 = \frac{mg}{4}\left[7\cos(\alpha) + \frac{17}{3}\sin(\alpha)\right]$. Такое движение возможно при выполнении двух условий:

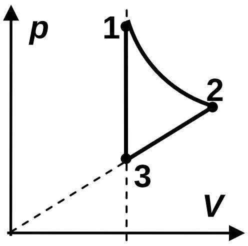
1) $F_{mp} \le \mu N_1 \Rightarrow mg[3\sin(\alpha) + \cos(\alpha)] \le \frac{mg}{4}\left[7\cos(\alpha) + \frac{17}{3}\sin(\alpha)\right]$, откуда $\mathrm{tg}(\alpha) \le \frac{9}{19}$.
2) Передние колеса не отрываются от поверхности, то есть $N_2 = \frac{mg}{4}\left[\cos(\alpha) - \frac{17}{3}\sin(\alpha)\right] \ge 0$, откуда $\mathrm{tg}(\alpha) \le \frac{3}{17}$.

Как видно, второе условие более жесткое, и максимальный угол, при котором возможно движение вверх вдоль плоскости робота с грузом $\alpha_{\max} = \mathrm{arctg}\left(\frac{3}{17}\right) \approx 10°$.

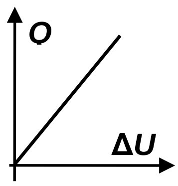
Задание 2:

Вопрос: Одноатомный идеальный газ участвует в процессе, в котором его давление растет прямо пропорционально объему. Постройте график зависимости полученного газом в этом процессе количества теплоты от изменения его внутренней энергии.

Задача: В тепловом двигателе в качестве рабочего тела используется одноатомный идеальный газ.



Цикл рабочего тела состоит из изотермы 1-2, процесса 2-3, диаграмма которого в координатах давление-объем – прямая, проходящая через начало координат, и изохоры 3-1 (см. рисунок). Известно, что в процессе 2-3 над газом совершается работа, равная половине работы, совершенной газом в изотермическом процессе. При этом 20% работы рабочего тела в цикле расходуется на компенсацию потерь на трение в узлах двигателя. Остальные потери можно считать пренебрежимо малыми. Найти КПД двигателя.



Ответ на вопрос: Рассмотрим расширение газа от объема V_1 до V_2. Работа газа равна площади под диаграммой процесса в координатах $p-V$ (площади трапеции), то есть

$$A=\frac{p(V_1)+p(V_2)}{2}(V_2-V_1)=\frac{\alpha}{2}(V_2+V_1)(V_2-V_1)=\frac{\alpha}{2}(V_2^2-V_1^2).$$

При этом изменение температуры, в соответствии с уравнением Менделеева-Клапейрона $\Delta T=\frac{1}{\nu R}(p_2V_2-p_1V_1)=\frac{\alpha}{\nu R}(V_2^2-V_1^2)$, и поэтому $A=\frac{\nu R}{2}\Delta T=\frac{1}{3}\Delta U$. Количество теплоты $Q=A+\Delta U=\frac{4}{3}\Delta U$. График показан на рисунке.

Решение задачи: В процессах 3-1 и 1-2 газ получает тепло, а в процессе 2-3 – отдает. Поэтому теплота нагревателя $Q_H=Q_{31}+Q_{12}$, а теплота холодильника $Q_X=-Q_{23}$. В соответствии с результатом, полученным в ответе на вопрос, $A_{23}=\frac{1}{4}Q_{23}\Rightarrow Q_X=4|A_{23}|$. Из условия ($A_{12}=2|A_{23}|$) находим, что работа в цикле $A=A_{12}-|A_{23}|=|A_{23}|$. Значит, КПД цикла (без учета потерь на трение) $\eta_0=\frac{A}{A+Q_X}=\frac{1}{5}$. С учетом потерь на трение КПД двигателя $\eta=0{,}8\cdot\eta_c=\frac{4}{25}=16\%$.

Задание 3:

Вопрос: Электромотор подключен к аккумулятору с ЭДС 20 В и при этом развиваемая им полезная мощность составляет 16 Вт. Полное сопротивление контура обмотки ротора равно 4 Ом. Найти возможные значения силы тока в цепи ротора. Потерями на трение в узлах двигателя пренебречь.

Задача: С помощью легких прочных тросов и электродвигателей из воды вытаскивают небольшой латунный груз. Сила сопротивления, действующая на груз со стороны воды, с хорошей точностью пропорциональна скорости его подъема. Если к грузу прицепить вертикальный трос от одного электродвигателя и использовать для питания двигателя аккумулятор с пренебрежимо малым внутренним сопротивлением, то в установившемся режиме ток через аккумулятор равен $I_1=3{,}2$ А. Если использовать три таких электродвигателя, подключенных к тому же аккумулятору параллельно (все три троса вертикальны), то ток возрастет до $I_3=6$ А. Каким станет ток через аккумулятор, если аналогичным образом использовать шесть таких же электродвигателей? Известно, что сила натяжения троса, создаваемая электродвигателем, прямо пропорциональна силе тока, текущего в обмотке его ротора.

Ответ на вопрос: Мощность, отдаваемая в цепь аккумулятором, расходуется на компенсацию тепловых потерь в контуре обмотки ротора (мощность которых $P_Q=RI^2$) и полезную работу. Значит, $P_n=\mathrm{E}\cdot I-RI^2$. Решая это уравнение относительно силы тока, находим:

$I_{1,2}=\frac{E}{2R}\pm\sqrt{\frac{E^2}{4R^2}-\frac{P_n}{R}}$, и есть два режима работы мотора с такой мощностью, токи в которых равны $I_1=1\,\text{А}$ и $I_2=4\,\text{А}$.

Решение задачи: Запишем уравнение энергетического баланса цепи при использовании n электродвигателей. Если ток аккумулятора равен I_n, то каждый двигатель потребляет ток $\frac{1}{n}I_n$. Обозначим R сопротивление цепи ротора каждого из электродвигателей, а Е – ЭДС аккумулятора. Тогда $E\cdot I_n=nR(I_n/n)^2+P_n$. Сила натяжения троса при равномерном движении должна уравновешивать сумму силы Архимеда, веса груза и силы сопротивления среды, которая по условию пропорциональна скорости: $|\vec{F}_c|=\alpha\cdot v$. Итак, $F=mg-F_A+\alpha\cdot v\equiv F_0+\alpha\cdot v$. Полезная мощность P_n, развиваемая всеми двигателями, равна $P_n=F\cdot v_n=(F_0+\alpha v_n)v_n$ (v_n – скорость подъема груза при использовании n электродвигателей). Ясно также, что тросы натянуты одинаково, а по условию сила натяжения каждого троса пропорциональна силе тока в обмотке ротора одного двигателя с некоторым коэффициентом (обозначим его k). Поэтому $F_0+\alpha\cdot v_n=n\cdot k\cdot\frac{I_n}{n}\Rightarrow v_n=\frac{kI_n-F_0}{\alpha}$. Следовательно, $E\cdot I_n=\frac{R}{n}I_n^2+kI_n\cdot\alpha\frac{kI_n-F_0}{\alpha}$. Из этого соотношения находим, что $I_n=\frac{(E+kF_0)n}{R+k^2n}$. Удобнее анализировать поведение **обратной силы тока** $\frac{1}{I_n}=\frac{k^2}{E+kF_0}+\frac{R}{E+kF_0}\frac{1}{n}$, так как оно проще зависит от n. В самом деле, из выражений $\frac{1}{I_1}=\frac{k^2}{E+kF_0}+\frac{R}{E+kF_0}$ и $\frac{1}{I_3}=\frac{k^2}{E+kF_0}+\frac{R}{E+kF_0}\frac{1}{3}$ находим, что $\frac{2R}{3(E+kF_0)}=\frac{1}{I_1}-\frac{1}{I_3}$. Затем, из соотношения $\frac{1}{I_6}=\frac{k^2}{E+kF_0}+\frac{R}{E+kF_0}\frac{1}{6}$ получаем $\frac{1}{I_3}-\frac{1}{I_6}=\frac{R}{6(E+kF_0)}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{I_1}-\frac{1}{I_3}\right)$. Следовательно, $I_6=\frac{4I_1I_3}{5I_1-I_3}=7{,}68\,\text{А}$.

Задание 4:

Вопрос: Небольшая лампочка приближается к тонкой линзе по главной оптической оси со скоростью 0,4 м/с. Найти скорость мнимого изображения лампочки в тот момент, когда расстояние от лампочки до линзы равно модулю фокусного расстояния линзы.

Задача: Школьник установил на робота пленочный фотоаппарат с дистанционным управлением. Он отрегулировал объектив так, что чувствительная поверхность пленки располагалась на расстоянии $l=16{,}7\,\text{мм}$ от объектива – при этом максимально четкими на снимке получались объекты на выбранной им дистанции. Оказалось, что эти объекты становятся размытыми, если расстояние от пленки до объектива увеличить на $\Delta l=0{,}1\,\text{мм}$. Каким должно быть время открытия затвора фотоаппарата, чтобы при движении робота со скоростью $v=1\,\text{м/с}$ объекты на той же дистанции не получались размытыми на снимке? Диаметр объектива $d=10\,\text{мм}$, а его оптическая сила $D=60\,\text{дптр}$.

Ответ на вопрос: Ясно, что линза рассеивающая. По формуле линзы $\frac{1}{a}-\frac{1}{|b|}=-\frac{1}{|F|}$. Продифференцируем это соотношение и учтем, что $a'_t=-v_a$ (уменьшение a соответствует движению по направлению к линзе) и $b_t' = -v_b$. Тогда $\frac{v_a}{a^2} - \frac{v_b}{b^2} = 0 \Rightarrow v_b = \frac{b^2}{a^2} v_a$. Из той же формулы линзы $|b| = \frac{a|F|}{a + |F|}$, то есть $v_b = \frac{F^2}{(a+F)^2} v_a$, и $a = F$ при получаем $v_b = \frac{1}{4} v_a = 0{,}1$ м/с.

Решение задачи: Ясно, что l – это расстояние от линзы до изображения предметов, находящихся на заданной высоте h. Следовательно, $\frac{1}{h} + \frac{1}{l} = D \Rightarrow h = \frac{l}{Dl - 1}$. При увеличении расстояния на Δl лучи, сфокусированные в точку на предыдущем расстоянии дают пятно размером $\delta = \frac{\Delta l}{l} d$ (см. рисунок). Это и есть величина изображения точки, при котором она выглядит «размытой». При перемещении объекта перпендикулярно главной оптической оси линзы со скоростью v относительно линзы ее изображение перемещается в плоскости со скоростью $v' = \frac{l}{h} v = (Dl - 1) v$. Значит, условие того, чтобы объекты «не получались размытыми на снимке» - это $v'\tau = (Dl - 1) v\tau < \delta$. В результате получаем, что $\tau < \frac{\Delta l}{l(Dl - 1)} \frac{d}{v} \approx 0{,}03$ с.