Математика 10–11 класс

Задание 1. (20 баллов)
Известно, что единственным решением уравнения

$$\pi/4 = \operatorname{arcctg} 2 + \operatorname{arcctg} 5 + \operatorname{arcctg} 13 + \operatorname{arcctg} 34 + \operatorname{arcctg} 89 + \operatorname{arcctg}(x/14)$$

является натуральное число. Найдите его.

Решение.

Рассмотрим уравнение:

$$\operatorname{arcctg} a - \operatorname{arcctg} b = \operatorname{arcctg} y.$$

Пусть $\alpha = \operatorname{arcctg} a, \beta = \operatorname{arcctg} b$ Теперь $y = \operatorname{ctg}(\alpha - \beta) = \frac{1+\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{ctg}\alpha} = \frac{1+ab}{b-a}$

$$\begin{aligned}
\operatorname{arcctg} x/14 &= \operatorname{arcctg} 1 - \operatorname{arcctg} 2 - \operatorname{arcctg} 5 - \operatorname{arcctg} 13 - \operatorname{arcctg} 34 - \operatorname{arcctg} 89 \\
&= \operatorname{arcctg} \frac{2+1}{2-1} - \operatorname{arcctg} 5 - \operatorname{arcctg} 13 - \operatorname{arcctg} 34 - \operatorname{arcctg} 89 \\
&= \operatorname{arcctg} 3 - \operatorname{arcctg} 5 - \operatorname{arcctg} 13 - \operatorname{arcctg} 34 - \operatorname{arcctg} 89 \\
&= \operatorname{arcctg} \frac{15+1}{5-3} - \operatorname{arcctg} 13 - \operatorname{arcctg} 34 - \operatorname{arcctg} 89 \\
&= \operatorname{arcctg} 8 - \operatorname{arcctg} 13 - \operatorname{arcctg} 34 - \operatorname{arcctg} 89 \\
&= \operatorname{arcctg} \frac{104+1}{13-8} - \operatorname{arcctg} 34 - \operatorname{arcctg} 89 \\
&= \operatorname{arcctg} 21 - \operatorname{arcctg} 34 - \operatorname{arcctg} 89 \\
&= \operatorname{arcctg} \frac{814+1}{34-21} - \operatorname{arcctg} 89 \\
&= \operatorname{arcctg} 55 - \operatorname{arcctg} 89 \\
&= \operatorname{arcctg} \frac{89*55+1}{89-55} = \operatorname{arcctg} 144
\end{aligned}$$

Отсюда имеем $x = 144 * 14 = 2016$.

Задание 2. (20 баллов)
Пусть A — точка пересечения двух окружностей. Из этой точки по каждой окружности, по часовой стрелке, с постоянными скоростями начинают двигаться точки X_1 и X_2. Через один оборот обе точки вновь оказываются в A. Докажите, что всегда найдется такая неподвижная точка B, что всё время движения выполняется равенство $X_1B = X_2B$.

Решение.

Пусть две окружности пересекаются в точке A, точки X_1, X_2 едут по окружностям так как описано в задаче. Можно считать что нас интересуют в точности все описанные в задаче пары X_1, X_2 при которых $X_1 \neq X_2$ (в противном случае проверять нечего при любом выборе P).

Если радиусы одинаковы, то в силе симметрии точка $P = A$ обладает указанным в задаче свойством, и все показано. Рассмотрим случай, когда радиусы различны. Заметим, что в этом случае найдутся два такие момента времени, что получающиеся в эти моменты отрезки $X_1'X_2'$, X_1'', X_2'' не параллельны. Действительно, достаточно например взять на большей окружности концы диаметра перпендикулярного O_1O_2. Наклоны в эти моменты у $X_1'X_2'$ и X_1'', X_2'' будут различны.

Возьмем произвольную точку P', отличную от A. Рассмотрим углы $\angle P'O_1X_1$, $\angle P'O_2X_2$, Заметим, что разность этих углов не зависит от того момента, в который взяты точки X_1, X_2. Значит для некоторого α выполнено $\angle P'O_1X_1 = \alpha + \angle P'O_2X_2$

Рассмотрим теперь разность $P'X_1^2 - P'X_2^2$. По теореме косинусов в треугольниках $P'O_1X_1$,$P'O_2X_2$ получаем

$$P'X_1^2 - P'X_2^2 = P'O_1^2 + AO_1^2 - 2P'O_1 \cdot AO_1 \cos\angle P'O_1X_1 - P'O_2^2 - AO_2^2 + 2P'O_2 \cdot AO_2 \cos\angle P'O_2X_2.$$

Обозначим $r_1 = AO_1$, $r_2 = AO_2$, $b_1 = P'O_1$, $b_2 = P'O_2$, отметим, что эти коэффициенты не зависят от момента , в который были взяты точки X_1, X_2. Тогда

$$P'X_1^2 - P'X_2^2 = b_1^2 + r_1^2 - 2r_1 \cdot b_1 \cos\left(\angle P'O_2X_2 + \alpha\right) - b_2^2 - r_2^2 - 2r_2 \cdot b_2 \cos\angle P'O_2X_2 = \ .$$

Раскрывая косинус суммы получаем для некоторых чисел f, g, h

$$P'X_1^2 - P'X_2^2 = f + g\sin\angle P'O_2X_2 + h\cos\angle P'O_2X_2.$$

Эта функция (для каждого выбора P' вообще говоря своя), пока $\angle P'O_2X_2$ проходит полный оборот, или тождественно равна нулю, или равна нулю не более чем при двух значениях этого угла (двух парах точек X_1, X_2). Но одно из них — начальное положение точек, теперь функция либо имеет не более одного ноля при допусловии $X_1 \neq X_2$, либо тождественно равна нулю.

С другой стороны, она обращается в ноль при $X_1 \neq X_2$ в точности тогда когда P' лежит на серединном перпендикуляре к невырожденному отрезку X_1X_2. Напомним, что найдутся два такие момента времени, что получающиеся в эти моменты отрезки $X_1'X_2'$, X_1'', X_2'' не параллельны. Значит серединные перпендикуляры к ним имеют общую точку. Возьмем именно ее в качестве P'. Соответствующая ей функция в эти два момента времени обращается в ноль, при этом также выполнено $X_1 \neq X_2$. Следовательно эта функция — тождественный ноль. Но тогда такая P' — искомая

Задание 3. (20 баллов)

Про кубический многочлен $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ с целыми коэффициентами a, b, c, d известно, что $p(1) = 2015$ и $p(2) = 2017$. Докажите, что уравнение $p(x) = 2016$ не имеет целых корней.

Решение.

Легко видеть, что если целые числа m и n имеют одинаковую четность, что $p(m)$ и $p(n)$ тоже имеют одинаковую четность. При всех четных целых x значение $p(x)$ нечетно, так как оно нечетно $p(2)$, а при нечетных – нечетно так как нечетно $p(1)$. То есть, $p(x) - 2016$ нечетно при всех целых x, следовательно, не может иметь целых корней.

Задание 4. (20 баллов)

Докажите, что самый большой по площади квадрат, помещающийся в прямоугольный треугольник, имеет с ним общий угол.

Решение.

Пусть треугольник имеет стороны $a, b, \sqrt{a^2+b^2}$, сторону рассматриваемого квадрата обозначим через q.

Рассмотрим какой-нибудь квадрат в таком прямоугольном треугольнике. Заметим, что если квадрат не касается никакой стороны, то он не максимален, поскольку всегда можно рассмотреть квадрат с тем же центром, но чуть большей стороной.

Если он касается ровно одной стороны (по точке или по стороне, не принципиально), то сдвинем его внутрь перпендикулярно этой стороны, получившийся, в силу доказанного, не максимален. Значит и исходный такой же.

Если он касается двух сторон, то рассмотрим направление от обоих сторон (у каждой стороны возьмем вектор внутрь и рассмотрим его сумму). Сдвинем в этом направлении. Получим квадрат, не имеющий общих точек со сторонами квадрата. Но такой не максимален, следовательно и исходный такой же.

Пусть он касается минимум трех сторон. Тогда концы одной из диагоналей лежат на разных сторонах треугольника. Если можно сдвинуть перепендикулярно этой диагонали, то треугольник не максимальный. Если нельзя, то концы другой диагонали также на сторонах.

Итак, если квадрат максимален, то все его вершины - на сторонах, следовательно на одной из них - две вершины.

Если эта сторона - гипотенуза, то весь исходный треугольник представляет собой четыре фигуры: квадрат и три треугольника подобных исходному, в которых сторона равная стороне квадрата напротив угла треугольника. Площади этих треугольников относятся как квадраты отношений стороны квадрата к соответствующим сторонам треугольника, откуда $S_\triangle = S_\triangle(\frac{q^2}{a^2}+\frac{q^2}{b^2}+\frac{q^2}{a^2+b^2})+q^2$, то есть

$$q^2 = \frac{1}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{S_\triangle}}.$$

Если же все четыре вершины квадрата на сторонах треугольника, и хотя бы две из них на одном из катетов, то и на другом катете - две вершины. Весь исходный треугольник представляет собой три фигуры: квадрат и два треугольника подобных исходному, в которых сторона равная стороне квадрата напротив острого угла треугольника. Теперь $S_\triangle = S_\triangle(\frac{q^2}{a^2}+\frac{q^2}{b^2})+q^2$, то есть

$$q^2 = \frac{1}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{S_\triangle}}.$$

Поскольку у второго выражения знаменатель меньше, то только второе расположение соответствует максимальному квадрату.

Задание 5. (20 баллов)

Найдите все значения параметра a, при которых корни x_1 и x_2 уравнения

$$2x^2 - 2016(x - 2016 + a) - 1 = a^2$$

удовлетворяют двойному неравенству $x_1 < a < x_2$.

Решение.

Обозначим многочлен из условия задачи через $f(x)$. Тогда в силу положительности коэффициента при x^2 условие задачи эквивалентно простому неравенству $f(a) < 0$. То есть, $f(a) = a^2 - 2a \cdot 2016 + 2016^2 - 1 = (a - 2016)^2 - 1 < 0$. А отсюда получаем, что $a \in (2015, 2017)$.