

**Олимпиада МИРЭА по математике  
для 11 классов 2015-2016**

**основной тур**

1. Лейтенант занимается с новобранцами строевой подготовкой. Придя на плац, он увидел, что все новобранцы построены в несколько рядов, причем число бойцов в каждом ряду одинаково и на 5 больше, чем число рядов. После окончания занятий лейтенант решил опять построить новобранцев, но не мог вспомнить, сколько было рядов. Тогда он приказал строиться так, чтобы рядов было столько, сколько ему лет. Оказалось, что во всех рядах бойцов опять поровну, но в каждом ряду их на 4 больше, чем при первоначальном способе построения. Сколько лет лейтенанту?

**Решение.** Пусть  $n$  – число рядов при первоначальном способе построения. Тогда в каждом ряду первоначально было  $n + 5$  бойцов, а при втором способе построения в каждом ряду стало  $n + 9$  бойцов. Обозначим возраст лейтенанта за  $x$ . Тогда, в соответствии с условием задачи, получаем уравнение

$$x = \frac{n(n+5)}{n+9} \Rightarrow x = n - 4 + \frac{36}{n+9}.$$

Число  $n + 9$  должно быть делителем числа 36. Учитывая то, что по смыслу задачи  $n$  и  $x$  – натуральные числа, получаем следующие решения

$$\left\{ \begin{array}{l} n+9=12 \\ x=2 \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} n+9=18 \\ x=7 \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} n+9=36 \\ x=24 \end{array} \right\}$$

Из соображений здравого смысла получаем, что подходит последний ответ, хотя и два других ответа признавались правильными.

**Ответ:** 24 года.

2. Пусть  $I$  – центр вписанной в треугольник  $ABC$  окружности. Доказать, что центр окружности, описанной около треугольника  $AIC$ , лежит на окружности, описанной около треугольника  $ABC$ .

**Решение.** Опишем около  $\Delta ABC$  окружность. Так как  $I$  – центр вписанной в треугольник  $ABC$  окружности, то  $BI$  – биссектриса угла  $ABC$ . Продолжим  $BI$  до повторного пересечения с описанной окружностью в точке  $K$ , и покажем, что точка  $K$  является центром окружности, описанной около треугольника  $AIC$ . Для этого достаточно показать, что  $AK = KC = KI$  (этот факт известен как теорема о трезубце).

Первое равенство очевидно следует из того, что  $BI$  – биссектриса угла  $ABC$ .

Для доказательства равенства  $KC = KI$  соединим точки  $C$  и  $I$ . Получим, что  $CI$  – биссектриса угла  $ACB$ .

Пусть  $\angle ABC = 2\beta$ ,  $\angle ACB = 2\gamma$ . Тогда  $\angle KBC = \angle ACB = \beta$ ,  $\angle BCI = \angle ACI = \gamma$  и  $\angle KCI = \beta + \gamma$ . Но и  $\angle KIC = \beta + \gamma$  (как внешний угол  $\Delta BIC$ ). Таким образом  $\Delta KIC$  – равнобедренный и  $KC = KI$ .

3. Среди всех шестизначных натуральных чисел, цифры которых расположены в порядке возрастания (слева – направо), рассматриваются числа, содержащие цифру 1 и не содержащие этой цифры. Каких чисел больше и на сколько?

**Решение.** Сначала подсчитаем сколько вообще существует шестизначных натуральных чисел, цифры которых расположены в порядке возрастания. Для этого выпишем подряд все цифры от 1 до 9. Для получения шестизначных чисел рассматриваемого типа надо зачеркнуть произ-

вольные три цифры. Таким образом количество шестизначных натуральных чисел, цифры которых расположены в порядке возрастания, равно  $C_9^3 = 84$ .

Теперь подсчитаем сколько среди этих чисел содержат 1. Для этого фиксируем в нашем ряду цифр единицу и вычеркиваем любые три цифры из оставшихся 8-ми. Получаем, что количество чисел, содержащих единицу, равно  $C_8^3 = 56$ . В результате получаем, что чисел содержащих единицу на 28 больше чисел, не содержащих 1.

**Ответ:** чисел, содержащих единицу на 28 больше.

4. Решить систему неравенств 
$$\begin{cases} (49^{x+1} - 50 \cdot 7^x + 1) \cdot \log_{x+\frac{5}{2}} \left| x + \frac{1}{2} \right| \geq 0 \\ 49^{x+1} + \log_{x+\frac{5}{2}} \left| x + \frac{1}{2} \right| + 1 \leq 50 \cdot 7^x \end{cases}.$$

**Решение.** Обозначим  $(49^{x+1} - 50 \cdot 7^x + 1) = a$ ,  $\log_{x+\frac{5}{2}} \left| x + \frac{1}{2} \right| = b$ . Тогда исходная система приобретает вид

$$\begin{cases} ab \geq 0 \\ a + b \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} a = 0 \\ b \leq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} b = 0 \\ a \leq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a < 0 \\ b < 0 \end{cases} \end{cases}$$

Будем решать по очереди системы в совокупности.

$$1. \begin{cases} a = 0 \\ b \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 49^{x+1} - 50 \cdot 7^x + 1 = 0 \\ \log_{x+\frac{5}{2}} \left| x + \frac{1}{2} \right| \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7^x = 1 \\ 7^x = \frac{1}{49} \\ \log_{x+\frac{5}{2}} \left| x + \frac{1}{2} \right| \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}.$$

$$2. \begin{cases} a \leq 0 \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 49^{x+1} - 50 \cdot 7^x + 1 \leq 0 \\ \log_{x+\frac{5}{2}} \left| x + \frac{1}{2} \right| = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 49^{x+1} - 50 \cdot 7^x + 1 \leq 0 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \emptyset.$$

$$3. \begin{cases} a < 0 \\ b < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 49^{x+1} - 50 \cdot 7^x + 1 < 0 \\ \log_{x+\frac{5}{2}} \left| x + \frac{1}{2} \right| < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (7^x - 1)(7^x - 7^{-2}) < 0 \\ \left(x + \frac{5}{2} - 1\right) \left(\left|x + \frac{1}{2}\right| - 1\right) < 0 \\ x + \frac{5}{2} > 0, x + \frac{5}{2} \neq 1 \\ x + \frac{1}{2} \neq 0 \end{cases}.$$

Последняя система после преобразований приобретает вид

$$\begin{cases} (7-1)x(7-1)(x+2) < 0 \\ \left(x + \frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{3}{2}\right) < 0 \Leftrightarrow x \in \left(-2, -\frac{3}{2}\right) \cup \left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}, 0\right). \\ x + \frac{5}{2} > 0, x \neq -\frac{3}{2}, x \neq -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Объединяя результаты решения систем, получим ответ.

**Ответ:**  $\left[-2, -\frac{3}{2}\right) \cup \left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}, 0\right]$ .

5. Дана трапеция, у которой отношение оснований равно 2. Если трапецию повернуть на  $360^\circ$  вокруг большего основания, то в результате такого поворота получается некоторая объемная фигура  $\Phi_1$ . Если же трапецию повернуть на  $360^\circ$  вокруг меньшего основания, то в результате такого поворота получается некоторая объемная фигура  $\Phi_2$ . Найти отношение объемов, получившихся в результате таких поворотов пространственных фигур  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$ .

**Решение.** Рассмотрим трапецию  $ABCD$  с основаниями  $AD = 2a$ ,  $BC = a$ . Проведем высоты трапеции  $BH_1 = BH_2 = h$ . Обозначим  $AH_1 = a_1$ ,  $AH_2 = a_2$ , причем  $a_1 + a_2 = a$ .

При повороте трапеции вокруг большего основания получается цилиндр, с образующей равной  $a$  и радиусом основания равным высоте трапеции  $h$ , у которого в основаниях вырезаны конусы, у которых радиус основания равен высоте трапеции, а высоты равны  $a_1$  и  $a_2$ . Если же поворот осуществляется вокруг меньшего основания, то получается цилиндр, с образующей равной  $b$  и радиусом основания равным высоте трапеции  $h$ , у которого в основаниях приставлены конусы, описанные выше.

Теперь вычислим объемы

$$V_{\Phi_1} = 2a\pi h^2 - \frac{\pi h^2}{3}(a_1 + a_2) = \frac{5}{3}\pi h^2 a.$$

$$V_{\Phi_2} = a\pi h^2 + \frac{\pi h^2}{3}(a_1 + a_2) = \frac{4}{3}\pi h^2 a.$$

Из последних двух равенств легко получаем ответ.

**Ответ:**  $\frac{5}{4}$ .

6. Найти наименьшее значение функции  $f(x) = \sqrt{x^2 - 8x + 25} + \sqrt{x^2 - 4x + 13}$ .

**Решение.** Выделив полный квадрат под каждым из радикалов, приводим функцию к виду

$$f(x) = \sqrt{(x-4)^2 + 9} + \sqrt{(x-2)^2 + 9}.$$

Для этого выражения можно предложить геометрическую интерпретацию. Рассмотрим каждый из радикалов как расстояние от точки с координатами  $(x; 0)$  до точки с координатами  $(4; 3)$  в случае первого радикала и до точки с координатами  $(2; -3)$  в случае второго радикала. Таким образом значение функции равно длине ломаной линии соединяющей три указанные выше точки. Поскольку эти точки можно расположить на одной прямой, то минимальное значение функции и будет длина отрезка, соединяющего точки с координатами  $(4; 3)$  и  $(2; -3)$ .

**Ответ:**  $2\sqrt{10}$ .

7. При каких значениях параметра  $a$  минимальное значение функции

$$f(x) = |7x - 3a + 8| + |5x + 4a - 6| + |x - a - 8| - 24$$

будет наименьшим.

**Решение.** Если  $7x > 3a - 8$ , то при любом способе раскрытия оставшихся двух модулей коэффициент при  $x$  будет положительным, то есть функция будет возрастающей. Если же  $7x < 3a - 8$ , то при любом способе раскрытия модулей коэффициент при  $x$  будет отрицательным и функция будет убывающей. Таким образом,  $x = \frac{3a - 8}{7}$  является точкой глобального минимума и

$$f_{\min}(a) = \left| 5 \cdot \frac{3a - 8}{7} + 4a - 6 \right| + \left| \frac{3a - 8}{7} - a - 8 \right| - 24 = \frac{|43a - 82| + |4a - 65|}{7} - 24.$$

Проводим рассуждения аналогичные приведенным выше и получаем, наименьшее значение этой функции достигается при  $a = \frac{82}{43}$ .

**Ответ:**  $a = \frac{82}{43}$ .

8. Решить уравнение  $\log_5(3x - 4) \cdot \log_5(7x - 16) \cdot (3 - \log_5(21x^2 - 76x + 64)) = 1$ .

**Решение.** Перепишем наше уравнение в виде

$$\log_5(3x - 4) \cdot \log_5(7x - 16) \cdot (3 - \log_5(3x - 4) - \log_5(7x - 16)) = 1.$$

Подобное преобразование возможно в силу того, что решения исходного уравнения существует только при  $x > \frac{16}{7}$ . Обозначим  $\log_5(3x - 4) = a > 0$ ,  $\log_5(7x - 16) = b > 0$ .

Отметим, что оба логарифма должны быть положительны. Действительно, положительность первого логарифма следует из области существования.

Предположим, что  $\log_5(7x - 16) < 0 \Leftrightarrow \frac{16}{7} < x < \frac{17}{7}$ . В этом случае в левой части два сомножителя положительны, а один – отрицательный, что невозможно. Таким образом, имеем

$$a + b + \frac{1}{ab} = 3.$$

Применим к левой части неравенство Коши

$$a + b + \frac{1}{ab} \geq 3 \sqrt[3]{a \cdot b \cdot \frac{1}{ab}} = 3.$$

Таким образом для решения нашего уравнения необходимо, чтобы неравенство Коши выполнялось как равенство и  $a = b = \frac{1}{ab}$ .

**Ответ:** 3.