3. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП

Предметный тур

4.1. Физика. 9 класс

Задача 4.1.1. Магнитнорельсовый тормоз (50 баллов)

Магниторельсовый тормоз — железнодорожный тормоз, тормозной эффект которого создаётся за счёт взаимодействия тормозной колодки непосредственно с рельсом; сила, с которой тормозная колодка прижимается к рельсу при этом образуется за счёт магнитного поля, создаваемого электромагнитами и притягивающего тормозную колодку и рельс друг к другу. Такой тормоз состоит из двух башмаков, каждый из которых расположен между колёсами, и четырёх цилиндров подвески башмаков, в которых размещены пружины, удерживающие башмаки на расстоянии 140—150 мм над головкой рельса.
Для характеристики работы такого тормоза можно ввести коэффициент торможения, это величина, показывающая во сколько раз магниторельсовый тормоз повышает силу трения колодок. Например, если коэффициент равен 200%, то магниторельсовый тормоз увеличивает силу трения в 2 раза.

1. Для магниторельсового тормоза характерно резкое торможение – сила прижатия башмака к рельсу сразу принимает максимальное значение. Во сколько раз увеличится тормозной путь, если скорость перед началом торможения будет больше в 3 раза?
2. На сколько процентов уменьшится длина тормозного пути при применении магниторельсового тормоза, если коэффициент торможения равен 210%? Считать, что сила прижатия башмака к рельсу сразу достигает максимального значения.
3. Чему равна магнитная сила прижатия, действующая на рельсы со стороны включенного магниторельсового тормоза, если полная сила давления рельса на башмак достигает 100 кН, а коэффициент торможения при этом равен 140%?
4. Пусть коэффициент трения тормозной колодки равен 0.4, коэффициент торможения магниторельсового поезда 160%, а магнитное поле прижимает с силой 70 кН. Какой массы должен быть поезд, чтобы его тормозной путь при движении со скоростью 120 км/ч был не больше 700 метров?
5. Тормозная система плавного торможения устроена так, что сила торможения увеличивается пропорционально уже пройденному тормозному пути, с постоянным коэффициентом пропорциональности. Во сколько раз увеличится тормозной путь, если скорость перед началом торможения будет больше в 2 раза?

Решение

1. Если сила прижатия к рельсу сразу принимает максимальное значение, то торможение происходит под действием постоянной силы трения. Это значит, что оно равноускоренное. Для равноускоренного движения верно: $v^2 = 2 \cdot a \cdot s$. Отсюда следует, что тормозной путь увеличится в 9 раз.

   Ответ: увеличится в 9 раз.

   Система оценки

   - Приведен закон сохранения энергии или учтено, что движение будет равноускоренным – 3 балла
   - Получено выражение для тормозного пути – 4 балла
   - Получен правильный числовой результат – 3 балла

2. Если коэффициент торможения равен 210%, то сила трения увеличится в 2.1 раза, а значит, ускорение торможения будет в 2.1 раза больше: $v^2 = 2 \cdot a \cdot s$. Это значит, что длина тормозного пути уменьшится в 2.1 раза, а значит будет составлять $\frac{100\%}{2.1} = 47.619\%$ от исходного. Следовательно, уменьшится на 52.381%.

   Ответ: уменьшится на 52.381%.

   Система оценки

   - Рассчитан новый тормозной путь – 3 балла
   - Рассчитано изменение тормозного пути – 3 балла
   - Получен правильны й числовой ответ – 4 балла

3. Если полная сила 100 кН, то сила давления рельса на башмак без этого тормоза равна $\frac{100}{1.4} = 71429$ Н. Это значит, что магнитная сила прижатия равна 28 571 Н.

   Ответ: 28571 Н.

   Система оценки

   - Рассчитана сила давления рельса на башмак без тормоза – 3 балла
   - Рассчитана магнитная сила прижатия – 4 балла
   - Получен правильный числовой ответ – 3 балла

4. Пусть коэффициент трения тормозной колодки равен 0.4, коэффициент торможения магниторельсового поезда 160%, а магнитное поле прижимает с силой 70 кН. Какой массы должен быть поезд, чтобы его тормозной путь при движении со скоростью 120 км/ч был не больше 700 метров?

   Если магнитное поле прижимает с силой 70 кН, то можно найти полную силу прижатия N рельса к башмаку из соотношения:

   $$\frac{N}{N-70} = 1.6 \to N = \frac{70 \cdot 1.6}{0.6} = 186.67 \,\text{кН}.$$

Тогда сила трения равна: $F = 0.4 \cdot 186.67 = 74.67$ кН. Отсюда ускорение торможения равно:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{74.67}{m}.$$

Тормозной путь не больше 700 метров:

$$s = \frac{v^2}{2 \cdot a} = \frac{m \cdot v^2}{2 \cdot 74.67} \leqslant 700.$$

$$m \leqslant \frac{2 \cdot 74.67 \cdot 700}{\left(\frac{120}{3.6}\right)^2} = 94.082 \text{ тонн.}$$

Ответ: масса поезда должна не превышать 94.082 тонны.

Система оценки

- Найдена полная сила прижатия рельса к башмаку – 2 балла
- Записан второй закон Ньютона – 2 балла
- Найдена масса поезда -4 балла
- Получен правильный числовой ответ – 2 балла

5. Тормозная система плавного торможения устроена так, что сила торможения увеличивается пропорционально уже пройденному тормозному пути, с постоянным коэффициентом пропорциональности. Во сколько раз увеличится тормозной путь, если скорость перед началом торможения будет больше в 2 раза?

Запишем это в виде второго закона Ньютона в проекции на ось движения:

$$m \cdot a = -k \cdot x \to a = -\frac{k}{m} \cdot x$$

Это уравнение является уравнением колебаний, только здесь сила направлена всегда против скорости, а не против перемещения, поэтому автомобиль движется до остановки. Закон движения можно описать как:

$$x(t) = \begin{cases} x_{max} \cdot sin(\omega \cdot t), \text{ до остановки;} \\ x_{max}, \text{ после остановки;} \end{cases}$$

Остановка наступает через четверть периода этого синуса (скорость равна нулю). Таким образом, $t = \frac{\pi}{2 \cdot \omega} = \frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}$. Тормозной путь не зависит от начальной скорости.

Ответ: не изменится.

Система оценки

- Записан второй закон Ньютона или выражение для энергии, из которого видно, что это уравнение колебаний. – 3 балла
- Выражена частота этих колебаний – 2 балла
- Указано, что поезд остановится через четверть периода – 2 балла
- Получен правильный ответ – 3 балла.

Задача 4.1.2. Идеальный светово (50 баллов)

Оптическое волокно — нить из оптически прозрачного материала, используемая для переноса света внутри себя посредством полного внутреннего отражения. Для обеспечения полного внутреннего отражения абсолютный показатель преломления сердцевины несколько выше показателя преломления оболочки. Сердцевина изготавливается из чистого материала (стекла или пластика) и имеет диаметр 9 мкм. Оболочка имеет диаметр 125 мкм и состоит из материала с легирующими добавками, изменяющими показатель преломления. Показатель преломления оболочки равен 1.474, показатель преломления сердцевины — 1.479. Луч света, направленный в сердцевину, будет распространяться по ней, многократно отражаясь от оболочки. Для эффективной волоконно-оптической связи сигналы передают импульсами света продолжительностью $\tau = 1$ мкс, с интервалом между импульсами $T = 10$ мкс.
Скорость света с принять равной 300 000 км/сек.

1. Показатель преломления зависит не только от свойств вещества, но и от частоты света. По данному волноводу пустили свет другой частоты. Для света с этой частотой оба показателя преломления больше в 1.01 раза. На сколько процентов время распространения света с такой частотой больше, чем у основного, для которого показатели преломления указаны в условии? Дайте ответ с точностью до сотых процента.

2. Пусть данный оптоволоконный кабель идеально прямой. Какой максимальной длины он может быть, чтобы соседние импульсы света не перекрывались? Задержкой света при отражении от оболочки пренебрегите.

3. Оптоволоконный кабель, описанный в условии, проложили по окружности. Каким должен быть минимальный радиус этой окружности, чтобы свет мог по этому кабелю пройти? В расчётах считать, что толщина кабеля во много раз меньше этого радиуса.

4. У современных образцов оптоволокна амплитуда сигнала уменьшается на 2.57% при прохождении 1 км (для длины волны 1.55 мкм). Развитие технологии производства волокна может снизить потери до 2.09% при прохождении 1 км. Во сколько раз при этом увеличится КПД передачи сигнала на расстояние 10 км?
   Для электромагнитной волны амплитуда и мощность сигнала связаны также, как и амплитуда и энергия обычных механических колебаний.

5. В градиентных волокнах показатель преломления сердцевины плавно возрастает от края к центру. Пусть градиентное волокно ($n_{max} = 1.479, n_{min} = 1.474$) устроено таким образом, что луч, идущий под максимальным допустимым углом к направлению волокна, при котором он распространяется дальше за счёт полного внутреннего отражения, двигается по синусоиде. Кабель считайте идеально прямым. Оцените, какой максимальной длины этот кабель может быть, чтобы соседние импульсы света не перекрывались по длительности. В расчётах можно считать, что косинус угла полного внутреннего отражения $\ll 1$.
   Примечание: $\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y, \cos(2x) = 2 \cdot \cos^2 x - 1$. Для малых x: $\sin(x) \approx x, (1+x)^n \approx 1 + n \cdot x$.

Решение

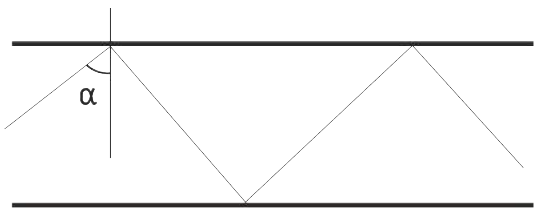
1. Свет проходит через волновод по сердцевине, значит для расчёта скорости света, проходящего через этот волновод, надо учитывать только показатель преломления сердцевины. Следовательно, скорость света уменьшится в 1.01 раза, а значит идти он будет в 1.01 раза дольше, то есть на 1%.

   Ответ: 1%.

   Система оценки

   - Учтено, что скорость света в среде связана с показателем преломления – 5 баллов
   - Получен правильный численный ответ – 5 баллов

2. Наиболее быстро пройдёт луч, который идёт по прямой. Медленнее всего будет идти луч, который идёт под углом полного внутреннего отражения к оболочке, так как он будет преодолевать больший путь. Изобразим это на рисунке:



   Из закона преломления следует, что предельный угол α определяется так:

$$sin\alpha = \frac{1.474}{1.479}$$

   Длина ломаной больше в $1/(sin\alpha)$ раз. Следовательно, если луч по прямой идёт расстояние L, то он проходит его за время: $t_1 = \frac{L \cdot 1.474}{c}$. Если же он идёт по максимально длинному пути, то время прохождения равно: $t_2 = \frac{L \cdot 1.479}{c}$. Чтобы импульсы не перекрывались, нужно, чтобы $\Delta t = t_2 - t_1 \leqslant T$.

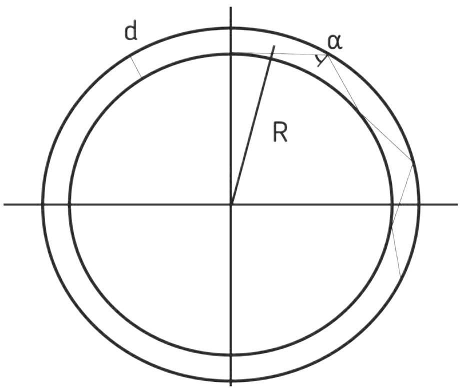
$$\frac{L \cdot 0.005}{c} \leqslant T;\ L \leqslant \frac{c \cdot T}{0.005} = \frac{3 \cdot 10^8 \cdot 10^{-5}}{5 \cdot 10^{-3}\ \text{м}} = 600\ \text{км}$$

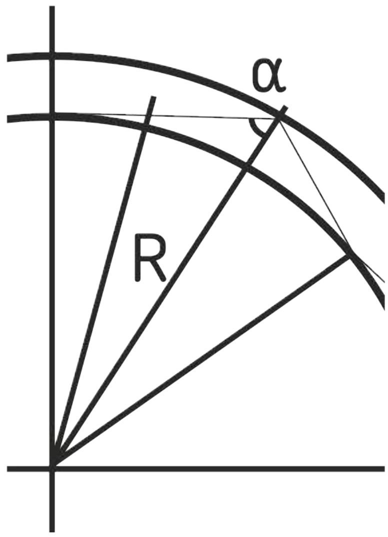
   Ответ: $L = \frac{c \cdot T}{0.005} = 600$ км.

   Система оценки

   - Указано для каких лучей будет максимальное и минимальное значение времени – 2 балла
   - Найден критический угол – 2 балла
   - Найдена длина ломанной – 2 балла
   - Найдено условие на длину оптоволоконного кабеля – 2 балла
   - Получено правильно числовое значение – 2 балла

3. Минимальный радиус может быть найден из условия, что угол, под которым падает луч из сердцевины на оболочку, не может быть меньше угла полного внутреннего отражения. Изобразим это на рисунке:





Построим треугольник, вершинами которого являются центр окружности и два последовательных отражения от внутреннего и внешнего круга. Внешний угол этого треугольника не может быть больше 90 градусов (случай касательный), а угол к нормали внешней окружности не может быть меньше α. Используя теорему синусов, запишем:

$$\frac{R + d/2}{1} = \frac{R - d/2}{sin\alpha}$$

Отсюда находим предельное значение радиуса:

$$R_{min} = \frac{d}{2} \cdot \frac{1 + sin\alpha}{1 - sin\alpha} = \frac{9\,\text{мкм}}{2} \cdot \frac{\frac{1+1.474}{1.479}}{\frac{1-1.474}{1.479}} = 4.5\,\text{мкм} \cdot \frac{2.953}{0.005} = 2657.7\,\text{мкм}$$

Ответ: $R_{min} = 2657.7$ мкм.

Система оценки

- Указано ограничение на минимальный радиус – 4 балла
- Приведены геометрические соображения для нахождения радиуса – 2 балла
- Получено выражение для минимального радиуса – 2 балла
- Получен правильной числовой ответ – 2 балла

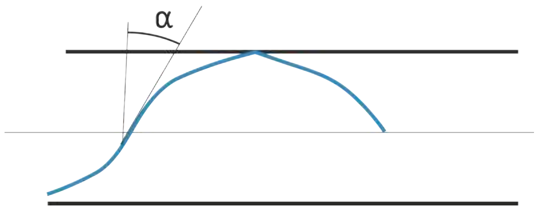
4. Мощность сигнала пропорциональна квадрату амплитуды, значит в первом случае её уменьшение можно считать как умножение на $0.9743^2 = 0.94926$ на каждый километр. Возведём в десятую степень: $0.94926^{10} = 0.59409$, то есть КПД передачи 59.409%. Посчитаем аналогично для второго случая: $0.9791^{20} = 0.65545$, то есть 65.545%. Посчитаем отношение: $\gamma = \frac{65.545}{59.409} \approx 1.103$.

Ответ: КПД возрастёт в 1.103 раза.

Система оценки

- Указана связь между амплитудой колебаний и мощности – 4 балла
- Сделана оценка затухания – 2 балла
- Сделан верный расчет затухания (экспоненциально падает) – 2 балла
- Получен правильной числовой ответ (в диапазоне) – 2 балла

5. Этот пункт аналогичен пункту 1, только вместо длины ломаной надо оценивать длину синусоиды. Так как граничные значения показателя преломления те же самые, максимальный наклон синусоиды определяется углом полного внутреннего отражения:



У функции $sin(x)$ максимальный наклон равен 1, следовательно, у функции $sin(x/k)$ он равен $1/k$, так как этот график получается растяжение в k раз вдоль горизонтальной оси.

Предельный наклон будет равен

$$ctg(\alpha) = \sqrt{\frac{1}{sin^2\alpha} - 1} = \sqrt{\left(\frac{1.479}{1.474}\right)^2 - 1} = 0.0824364.$$

Таким образом, надо оценить длину синусоиды $y = sin(0.0824364 \cdot x)$. Рассмотрим малый участок на графике $y = sin(0.0824364 \cdot x)$ от точки x до точки $x + \Delta x$. Заменим его прямым отрезком. Длина этого отрезка равна:

$$\Delta L = \sqrt{\Delta x^2 + (sin(0.0824364 \cdot (x + \Delta x)) - sin(0.0824364 \cdot x))^2}$$

Считая, что $\Delta x << 1$, получаем, что:

$$\Delta L \approx \Delta x \cdot \sqrt{(1 + 0.0824364^2 \cdot cos^2(0.0824364 \cdot x))}$$

$$\Delta L \approx \Delta x \cdot (1 + 0.5 \cdot 0.0824364^2 \cdot cos^2(0.0824364 \cdot x))$$

$$\Delta L \approx \Delta x \cdot (1 + 0.25 \cdot 0.0824364^2 \cdot (1 + cos(0.5 \cdot 0.0824364 \cdot x)))$$

При движении луча на расстояния, много большие периода этого косинуса, вклад периодического слагаемого равен нулю. Тогда получаем приближённую формулу:

$$\Delta L \approx \Delta x \cdot (1 + 0.25 \cdot 0.0824364^2) = \Delta x \cdot 1.0017$$

Следовательно, если луч по прямой идёт расстояние L, то он проходит его за время: $t_1 = \frac{L \cdot 1.474}{c}$. Если же он идёт по длинному пути, то время прохождения равно: $t_2 = t_1 \cdot 1.0017$. Отсюда $0.0017 \cdot \frac{L \cdot 1.474}{c} \leqslant T$;

$$L \leqslant \frac{c \cdot T}{0.0017 \cdot 1.474} \approx \frac{3 \cdot 10^8 \cdot 10^{-5}}{0.0017 \cdot 1.474} = 1197 \text{ км}.$$

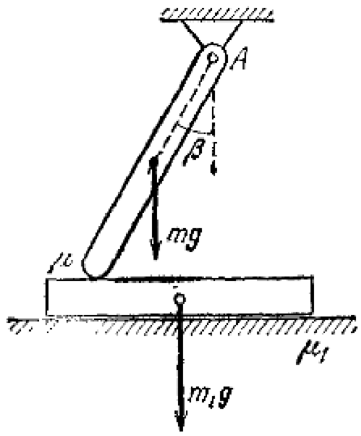
Ответ: $L \leqslant 1197$ км. В качестве правильной подойдёт любая оценка, близкая к 1200 км. Точный расчёт показывает, что получается примерно 1201 км.

Система оценки

- Приведены соображения о том, какие лучи дадут максимальное и минимальное время – 2 балла
- Сделан вывод о необходимости оценки длины синусоиды – 2 балла
- Сделана оценка о длине синусоиды – 3 - балла
- Получен правильный числовой ответ - 3 балла.

4.2. Физика. 10-11 класс

Задача 4.2.1. Тормозные колодки (50 баллов)



1. Отношение площади тормозной колодки к квадрату её толщины было увеличено в 3 раза при сохранении её полной массы, объёма и теплоёмкости. Во сколько раз изменилась скорость её охлаждения за счёт теплопроводности?
2. Колёса автомобиля представляют собой 4 диска диаметром 0.48 м и массой 9.2 кг. Автомобиль едет со скорость 100 км/ч, его полная масса равна 500 кг. К цилиндрической поверхности его колёс прижимаются тормозные колодки с силой 200 Н. Коэффициент трения колодки о диски 0.4. Через сколько времени автомобиль остановится? Каков будет тормозной путь? Ускорение свободного падения принять за $g = 9.81$ м/с^2. Считать, что все колёса вносят одинаковый вклад в торможение автомобиля, а колёса не проскальзывают.
3. Какой толщины должны быть чугунные тормозные колодки, чтобы они не начали плавиться ни в одном из четырёх колёс автомобиля при аварийной остановке, если площадь каждой из них равна 50 см^2, а передние колёса тормозят в 2 раза сильнее задних? Считать, что почти всё тепло передаётся колодкам, так как теплопроводность колёс маленькая, скорость автомобиля перед началом торможения 180 км/ч, масса 500 кг. Теплоёмкость чугуна принять за 400 Дж/(кг·°С), температура плавления чугуна 1200°C, в начале торможения температура колодок 50°C. Плотность чугуна принять равной 7500 кг/м^3

4. Особенностью устройства тормозных колодок является их самотормозящее действие – сила трения может расти неограниченно. Чтобы понять этот эффект, рассмотрите следующую задачу. Опирающаяся на доску тяжёлая балка может поворачиваться в шарнире A вокруг горизонтальной оси. При каком условии её невозможно выдернуть вправо? В расчётах пренебречь деформацией балки и доски, считать коэффициент трения постоянным.
5. При расчётах торможения автомобиля бывает важно учесть зависимость силы трения от скорости. Предположим, в условиях пункта 2, что к постоянной силе трения 200 Н надо добавить поправку, пропорциональную скорости автомобиля с некоторым коэффициентом пропорциональности. Чему равен этот коэффициент, если оказалось, что тормозной путь равен $L = 100$ метров, а время торможения равно $t = 10$ секунд?

Решение

1. Скорость охлаждения за счёт теплопроводности пропорциональна мощности теплового потока и обратно пропорциональна теплоёмкости. Тепловой поток пропорционален площади тормозной колодки:

$$\begin{cases} \dfrac{S_2}{h_2^2} : \dfrac{S_1}{h_1^2} = 3; \\ S_1 \cdot h_1 = S_2 \cdot h_2; \end{cases} \Rightarrow \frac{S_2}{S_1}^3 = 3 \Rightarrow \frac{S_2}{S_1} = \sqrt[3]{3}$$

Следовательно, скорость охлаждения увеличилась в $\sqrt[3]{3} \approx 1.44$ раз.

Ответ: $\frac{S_2}{S_1}\sqrt[3]{3} \approx 1.44$.

Система оценки

- Указано что скорость охлаждения пропорциональна тепловому потоку и обратно ппропрциональна теплоемкости – 3 балла
- Указано как изменится тепловой поток – 3 балла
- Получено соотношение для отношения скоростей – 2 балла
- Получен правильный числовой ответ – 2 балла

2. Сила трения колодок в одном колесе равна $0.4 \cdot 200 = 80$ Н. Так как колёса не проскальзывают, то мощность торможения можно считать равной произведению суммы всех сил трения колодок на скорость автомобиля:

$$N = 4 \cdot 80 \cdot \nu = \frac{\Delta E}{\Delta t},\ E = \frac{m \cdot \nu^2}{2} \to \frac{\Delta E}{\Delta t} = m \cdot \nu \cdot a.$$

Отсюда получаем:

$$320 = m \cdot a;\ a = \frac{320}{500} = 0.64\ \text{м/с}^2$$

Таким образом, торможение будет равноускоренным. Время торможения равно:

$$t = \frac{\nu}{a} = \frac{100}{0.64} \cdot \frac{1000}{3600}\ \text{с} = 43.4\ \text{с}$$

Тормозной путь составит:

$$L = \frac{\nu \cdot t}{2} = \frac{100 \cdot 43.4}{2} \cdot \frac{1000}{3600} = 602.8 \text{ м}$$

Ответ: $L = \frac{\nu \cdot t}{2} = 602.8$ м, $t = \frac{\nu}{a} = 43.4$ сек.

Система оценки

- Записан второй закон Ньютона и закон сохранения энергии, позволяющие оченить время торможения – 2 балла
- Получено выражение для времени торможения – 3 балла
- Получено выражение для тормозного пути – 3 балла
- Получено правильное числовое значение для времени – 1 балл
- Получено правильное числовое значение для пути – 1 балл

Если передние колёса тормозят в 2 раза сильнее, то на них выделяется в 2 раза больше мощность, следовательно, на одном переднем колесе выделяется треть всей мощности. Так как потерями тепла пренебрегаем, то можно считать, что треть всей кинетической энергии перешла в нагрев колодки переднего колёса (360 км/ч = 50 м/с).

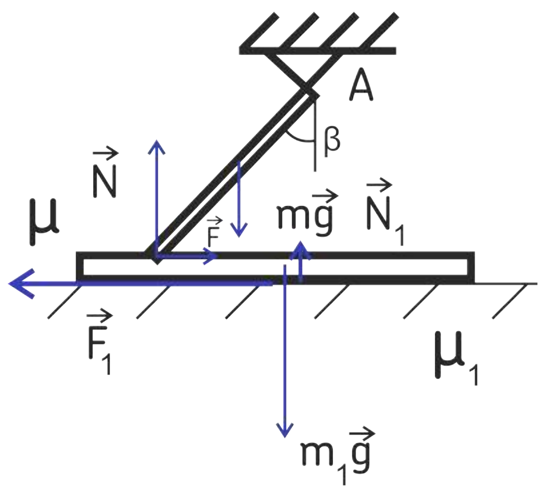
$$\frac{m \cdot \nu^2}{2} = \rho \cdot S \cdot d \cdot c \cdot \Delta T \to d = \frac{m \cdot \nu^2}{2 \cdot S \cdot \rho \cdot c \cdot \Delta T} =$$
$$= \frac{500 \cdot 50^2}{2 \cdot 3 \cdot 50 \cdot 10^{-4} \cdot 7500 \cdot 400 \cdot 1150} \approx 1.2 \text{ см.}$$

Ответ: $d = \frac{m \cdot \nu^2}{2 \cdot S \cdot \rho \cdot c \cdot \Delta T} \approx 1.2$ см.

Система оценки

- Указано (или использовано), что на передних колесах будет выделяться треть всей мощности – 3 балла
- Записан закон сохранения энергии – 3 балла
- Получено выражение для толщины колодки – 2 балла
- Получено правильное числовое значение – 2 балла

3. Рассмотрим прежде всего действующие силы.



На балку действуют сила тяжести $m \cdot \overrightarrow{g}$, нормальная сила реакции доски $\overrightarrow{N}$, сила трения со стороны доски $\overrightarrow{F}$, направленная в сторону движения доски, и сила реакции шарнира. Направление последней силы заранее неизвестно, но оно нам и не нужно, так как можно рассматривать моменты сил, действующих на балку, относительно оси вращения, а вычисление самой этой силы нам не нужно. Тогда это уравнение имеет вид:

$$\frac{mg}{2} \cdot sin\beta - N \cdot sin\beta - F \cdot cos\beta = 0$$

Теперь запишем второй закон Ньютона для сил, действующих на доску:

$$T - F - F_1 = 0$$

$$N_1 - m_1 g - N = 0$$

Для сил трения можно записать:

$$F = \mu \cdot N_1, \; F_1 = \mu_1 \cdot N_1.$$

С помощью этих уравнений можно определить:

$$N = \frac{sin\beta}{sin\beta - \mu \cdot cos\beta} \cdot \frac{mg}{2}; \; T = \mu_1 m_1 g + \frac{\mu_1 + \mu}{1 - \mu \cdot ctg\beta} \cdot \frac{mg}{2} \; - \text{ если} \mu \cdot ctg\beta < 1$$

Получается, доску невозможно выдвинуть вправо при $\mu \cdot ctg\beta \geqslant 1$. Это связано с тем, что момент силы трения направлен так, что приводит к увеличению нормальной реакции N, а значит увеличивается сила трения скольжения, что при $\mu \cdot ctg\beta \geqslant 1$ приводит к неограниченному возрастанию силы трения при попытке выдвинуть доску вправо. **Ответ:** $\mu \cdot ctg\beta \geqslant 1$.

Система оценки

- Записано уравнение моментов сил – 3 балла
- Записан второй закон Ньютона – 3 балла
- Получено условие на невозможность сдвига – 4 балла

4. Аналогично пункту 2:

$$N = 4 \cdot 200 \cdot \nu \cdot 0.4 \cdot (1 + k \cdot \nu) = \frac{\Delta E}{\Delta t} = m \cdot \nu \cdot a$$

Отсюда получаем:

$$\frac{\Delta \nu}{\Delta t} = 0.64 \cdot (1 + k \cdot \nu); \; \Delta \nu = 0.64 \cdot (\Delta t + k \cdot \Delta s)$$

Так как коэффициенты постоянны, то от малых приращений можно перейти к большим конечным:

$$\nu = 0.64 \cdot (t + k \cdot s) \to k = \frac{\nu - 0.64 \cdot t}{0.64 \cdot s} = \frac{\frac{100}{3.6} - 0.64 \cdot 10}{0.64 \cdot 100} = 0.334 \text{ (Н} \cdot \text{с)/м}.$$

Ответ: 0.334 (Н · с)/м.

Система оценки

- Записан второй закон Ньютона и закон сохранения энергии, позволяющие оценитьмощность при торможении – 2 балла
- Получено выражение для ускорения – 3 балла
- Записано выражение для коэффициента – 3 балла
- Получен верный численный ответ – 2 балла

Задача 4.2.2. Идеальное отражение звука (50 баллов)

Был разработан новый материал, который идеально отражает звук. Для проверки качества отражения необходимо провести несколько испытаний, параметры которых нужно определить. Считатайте, что излучатель звука излучает на частоте $f = 10$ кГц, скорость звуковой волны равна $v = 340$ м/с, длительность импульса $\tau = 1$ мс, ребро $a = 1$ м.

1. Излучатель и приёмник звука поставили в одной точке на плоскости. Отражатель расположили вокруг этой точки квадратом, в котором она является центром. Во сколько раз длительность принимаемого импульса больше, чем длительность испускаемого? Считывайте, что отражение звука целиком рассеянное, переотражением отражённого звука можно пренебречь. Длина стороны квадрата равна $= 1$ м. Источник и приемник можно считать точечными. Распространением звука по высоте пренебрегите.
2. Излучатель и приёмник звука поставили в одной точке на плоскости. Придумайте такую конструкцию (включая ее геометрические размеры) из отражателя звука на плоскости, которая так отражает импульсы излучаемого звука, что отражённый звук звучит непрерывно, в предположении, что рассеянным отражением звука можно пренебречь (то есть отражение звука происходит в точности по закону зеркального отражения), а при отражении от поверхности его интенсивность не уменьшается. Излучатель испускает 1 импульс. Источник и приемник можно считать точечными.
3. Точечный излучатель поставили в центр шара радиуса $R = 34$ см, поверхность которого покрыта отражателем звука. На каком минимальном расстоянии от центра шара нужно расположить приёмник звука, чтобы звук в приёмнике звучал без перерыва? Условия излучения и отражения такие же, как в пункте 2.
4. Точечный излучатель поставили в центр куба с ребром а, поверхность которого покрыта идеальным поглотителем звука, переизлучения не происходит. При поглощении звука поглотитель нагревается, тепло он не проводит, но охлаждается с поверхности за счёт теплопроводности. Оказалось, что в результате непрерывного излучения в разных точках поглотителя поддерживается постоянная во времени температура, большая окружающей среды и разная в различных точках поверхности куба. Максимальная температура оказалась на 10 K больше минимальной. На сколько градусов по Кельвину минимальная температура больше температуры окружающей среды? Считать в расчётах, что излучатель испускает сферически симметричные волны звука.
5. Из отражателя изготовили пирамиду, боковые грани которой перпендику-

лярны друг другу, а боковые рёбра равны $a, 2a, 3a$ соответственно. Точечный излучатель и приёмник расположили в двух разных точках основания пирамиды так, чтобы импульс звука, отражённый ровно по одному разу от каждой боковой поверхности, вернулся за наименьшее время. Чему равно это время? Условия излучения и отражения такие же как в пункте **2**.

Решение

1. Если пренебречь переотражением отражённого звука, то новая длительность импульса должна определяться разностью времён прихода звука, отражённого от ближней точки квадрата и отражённого от угла квадрата. В первом случае звук летит 1 метр, во втором случае $\sqrt{2}$ метра. Разность времён равна: $\Delta t = \frac{\sqrt{2}-1}{340} = 1218$ мкс. Так как исходная длительность была 1000 мкс, то она становится 2218 мкс. Длительность становится больше в 2.218 раз.

   Ответ: в 2.218 раз.

   Система оценки

   - Найдено выражение для разности хода звука – 5 баллов
   - Получено верное числовое значение – 5 баллов

   Такой конструкцией будет окружность достаточного малого радиуса R, чтобы время прихода отражённого звука была не больше длительности самого импульса:

$$\tau \geqslant \frac{2R}{\nu} \rightarrow R \leqslant \frac{\nu \cdot t}{2} = \frac{340 \cdot 0.001}{2} = 0.17\,\text{м}$$

   Ответ: например, окружность радиуса 17 см.

   Система оценки

   - Указано, что конструкцией будет окружность – 2 балла
   - Дано объяснение, помечу именно окружность – 2 балла
   - Найдено, что максимальный радиус этой окружности будет равен $\frac{\nu \cdot t}{2}$ – 2 балла
   - Указано, что радиус может быть и меньше максимального – 2 балла
   - Получены верные численные значения – 2 балла.

2. При идеальном зеркальном отражении на приёмник попадает звуковая волна только с двух направлений – от центра и от точки границы, находящейся на линии, соединяющей центр шара и приёмник. Сначала в приёмник попадает волна, которая прошла расстояние x, затем она же отражённая – прошла расстояние $(2R - x)$. Потом доходит волна, отражённая от противоположной точки – она прошла расстояние $2R + x$. После она же отражённая – прошла расстояние $(4R - x)$ и так далее. Разности пройденных расстояний равны $(2R - 2x)$ и 2 между соседними приходами импульсов. Итак, получаем систему неравенств:

$$\begin{cases} 2R - 2x \leqslant \tau \cdot \nu \\ 2x \leqslant \tau \cdot \nu. \end{cases}$$

Если $R = \tau \cdot \nu$, то эта система имеет единственное решение

$$x = 0.5\tau\nu = 17\,\text{см}.$$

Ответ: на расстоянии 17 см.

Система оценки

- Указано, какие волны приходят в приемник – 2 балла
- Указаны разности хода между соседними импульсами – 2 балла
- Замечено, что $R = \tau \cdot \nu$ – 2 балла
- Найдено выражение для расстояния – 2 балла
- Получены верные численные значения – 2 балла

3. Мощность нагрева пропорциональна интенсивности звука, а интенсивность звука обратно пропорциональна квадрату расстояния. Минимальное расстояние до стены в $\sqrt{3}$ раза меньше максимального, значит излучаемая мощность там будет в 3 раза больше. Тепло рассеивается в окружающую среду пропорционально разности температур, следовательно: $T_{max} - T = 3 \cdot (T_{min} - T)$. По условию $T_{max} = T_{min} + 10$.

$$T_{min} + 10 - T = 3 \cdot (T_{min} - T);\; 2 \cdot T_{min} = 2 \cdot T + 10 \rightarrow T_{min} - T.$$

Ответ: на 5 К больше.

Система оценки

- Учтено, что интенсивность звука и, следовательно, мощность нагрева будет падать обратно пропорционально расстоянию – 2 балла
- Указаны места с минимальной и максимальной мощностью нагрева – 2 балла
- Записано уравнение теплового баланса – 2 балла
- Найдено выражение для разницы температур – 2 балла
- Получены верные численные значения – 2 балла

4. Для расчёта движения луча звука, идеально отражающегося от гладкой поверхности, можно отражать не луч, а всю область пространства, в которой он распространяется, рассматривая его движение в «зазеркалье». Отразим пирамиду от каждой грани при каждом прохождении луча. Быстрее всего может он вернуться обратно тогда, когда от каждой грани было ровно одно отражение. В силу перпендикулярности рёбер плоскости граней при симметрии относительно друг друга остаются на месте. Три таких отражения равносильны центральной симметрии относительно вершины пирамиды. Длина любого луча, идущего от точки с основания, не может быть больше расстояния между плоскостью основания и центрально симметричной к ней. Этот минимум достигается, поэтому она равна удвоенному значению высоты пирамиды. Объём пирамиды равен: $\nu = a^3 = \frac{1}{3} S \cdot h$. Основание представляет собой треугольник со сторонами $\sqrt{13}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{5}$. Можно посчитать любым способом, что его площадь равна 3.5.

Тогда $h = \frac{3}{3.5} = \frac{6}{7}$. Следовательно, искомый путь равен $\frac{12}{7}$ метра, звук пройдёт его за время $t = \frac{12}{340 \cdot 7} = 5.04$ мс.

Ответ: 5.04 мс.

Система оценки

- Верно рассмотрено распространение лучей – 3 балла
- Найдено выражение для времени пути – 5 баллов
- Получены верные численные значения – 2 балла

4.3. Информатика

Задача 4.3.1. (10 баллов)

Дисграфия — стойкое нарушение процесса письма, обусловленное отклонениями от нормы в деятельности тех анализаторов и психических процессов, которые обеспечивают письмо.

Далее приведены два из видов дисграфии:

- пропуски согласных при их стечении (дожи-доди-> дожди) — в задаче учитываются все согласные, находящиеся рядом (могут быть пропущены сразу 2 и более из группы, например, "приветствие> "привесие");
- пропуски гласных (пошл-пшли-пшл-> пошли, тчка-точк-тчк-> точка, озис-азис-зис-> оазис).

Сколькими способами возможно допустить подобные ошибки в предложении:

То, что сегодня наука, – завтра техника.

если одновременно могут быть совершены ошибки только одного типа?

Решение

Обозначим E — общее возможное количесво способов допустить ошибки. $E = E_1 + E_2$ — сумма количеств способов совершить ошибки 1 и 2 типа (согласные и гласные).

В предложении 4 группы смежных согласных: "чт", "дн", "втр", "хн". Следовательно, так как мы можем в каждом случае либо ошибиться заданным числом способов, либо не ошибиться (вариант, где мы не ошиблись нигде, не подходит), $E_1 = 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 3 - 1 = 188$.

При этом в предложении 13 гласных. Следовательно, мы можем ошибиться в любой из них или не ошибиться (вариант, где мы не ошиблись нигде, не подходит). $E_2 = 2^{13} - 1 = 8191$

Таким образом, $E = 188 + 8191 = 8379$.

Ответ: 8379.

Задача 4.3.2. (20 баллов)

Некоторые электронные инженерные системы используют логические формулы в своих расчетах. Однако с ростом количества систем формулы стали неоптимальны — некоторые переменные могут быть сокращены, так как не влияют на результат выражения.

Определите, какие переменные не влияют на результат выражения.

Формат входных данных

В первой строке подается целое число N ($1 \leqslant N \leqslant 10$) — число переменных в выражении.

Далее подаются 2^N строк, содержащих 2 значения, разделенных пробелом:

1. строка из N символов 0 или 1 — значений переменных, участвующих в выражении в порядке наименования от X_0 до X_{N-1}.
2. результат выражения при заданных значениях переменных: 0 или 1.

Гарантируется, что данные не противоречат друг другу, и все строки полностью покрывают возможные значения функции.

Формат выходных данных

Список переменных, которые не влияют на результат, в порядке возрастания их индексов через пробел. Если таких переменных нет, то выводить "OK".

Пример №1

Стандартный ввод

```
2
00 0
01 1
10 0
11 1
```

Стандартный вывод

```
X0
```

Пример №2

Стандартный ввод

```
2
11 1
00 0
10 1
01 1
```

Стандартный вывод

```
OK
```

Решение

Для нахождения переменной, не влияющей на значения выражения, можно воспользоваться таблицей истинности. Составляем и упорядочиваем её по правилам, после чего сравниваем результаты, когда переменная равна 1 и когда она равна 0. Если ответы одинаковы, то переменная не влияет на результат.

Пример программы-решения

Ниже представлено решение на языке C++

```cpp
#define _CRT_SECURE_NO_WARNINGS

#include <memory>
#include <string>
#include <stdio.h>
#include <cstdio>
#include <iostream>
#include <vector>
#include <queue>

int main()
{
    int count_of_incorrect = 0;
    int n = 0;
    scanf("%d", &n);
    int line_count = 1 << n;

    std::vector<int> answers;
    answers.resize(line_count);

    // Read.
    char *line = (char*)malloc(sizeof(char) * 128);
    for (int i = 0; i < line_count; i++)
    {
        int val = 0;
        scanf("%s %d", line, &val);

        int idx = 0;
        int weight = 1;
        for (int j = 0; j < n; j++)
        {
            idx += (line[n - j - 1] - '0') * weight;
            weight *= 2;
        }
        answers[idx] = val;
    }

    // Check.
    std::vector<int> zero_arr;
    std::vector<int> one_arr;
    zero_arr.resize(line_count / 2);
    one_arr.resize(line_count / 2);

    int step = line_count / 2;
    int loops_count = 1; // 0000 1111 - one loop
    for (int i = 0; i < n; i++)
    {
```

```
        // fill
        for (int j = 0; j < loops_count; j++)
        {
            for (int k = j * step; k < (j + 1) * step; k++)
                zero_arr[k] = answers[k + j * step];

            for (int k = (j + 1) * step; k < (j + 2) * step; k++)
                one_arr[k - step] = answers[k + j * step];
        }

        // check
        bool same = true;
        for (int i = 0; i < line_count / 2; i++)
        {
            if (zero_arr[i] != one_arr[i])
            {
                same = false;
                break;
            }
        }

        if (same)
        {
            printf("X%d ", i);
            count_of_incorrect++;
        }

        step /= 2;
        loops_count *= 2;
    }

    if (count_of_incorrect == 0)
        printf("OK");
}
```

Задача 4.3.3. (20 баллов)

В умном городе планируют расположение парковок. Известно, что город состоит из нескольких районов. Кроме того, каждый район является самонепересекающимся многоугольником (не обязательно выпуклым).

Известен список всех точек границ каждого района (в направлении по или против часовой стрелки).

Исходя из статистики, ученые вывели максимальную площадь, на которой должна находиться хотя бы одна парковка. Также ученые определили, что число парковок должно зависить не от общей площади города, а от площади отдельных районов. Требуется определить, какое минимальное число парковок следует разместить в городе.

Формат входных данных

Строка, содержащая два числа: целое число N $(1 \leqslant N \leqslant 10)$ — количество районов и число с плавающей запятой S — максимальная площадь, на которой должна находиться хотя бы 1 парковка.

Далее для каждого района:

Строка с числом M $(1 \leqslant M \leqslant 20)$ — количеством точек, описывающих район.

M строк с целыми числами X $(-10^9 \leqslant X \leqslant 10^9)$ и Y $(-10^9 \leqslant Y \leqslant 10^9)$ — координатами кадой точки.

Координаты указаны в порядке соединения, но направление может быть как по, так и против часовой стрелки.

Формат выходных данных

Минимальное число парковок, которое нужно разместить в городе.

Пример №1

Стандартный ввод
1 1.5 4 0 1 1 0 0 -1 -1 0

Стандартный вывод
2

Решение

Суть задачи заключается в верном нахождении площади района. Подсчитаем площадь методом трапеций. Так как обход идет в одном направлении, ненужные площади сократятся из-за разных знаков, и получится необходимый ответ. Однако, порядок обхода точек неизвестен, поэтому после расчетов нужно взять площадь по модулю. Остальные расчеты не подразумевают какой-либо сложной логики и основываются на делении с округлением в большую сторону).

Пример программы-решения

Ниже представлено решение на языке C++

```
#define _CRT_SECURE_NO_WARNINGS

#include <stdio.h>
#include <cmath>
#include <math.h>
#include <algorithm>
#include <cstdlib>
#include <vector>

using namespace std;

struct point
{
    float x = 0;
    float y = 0;
};

```

```
float square(const std::vector<point> &fig)
{
    float res = 0;
    for (int i = 0; i < fig.size(); i++)
    {
        point
            p1 = i ? fig[i - 1] : fig.back(),
            p2 = fig[i];
        res += (p1.x - p2.x) * (p1.y + p2.y);
    }
    return fabs(res) / 2;
}

int main()
{
    int n = 0;
    float square_per_parking = 0;
    scanf("%d %f", &n, &square_per_parking);

    int parkings_count = 0;
    std::vector<float> district_squares;
    district_squares.resize(n);
    for (int i = 0; i < n; i++)
    {
        int point_count = 0;
        scanf("%d", &point_count);
        std::vector<point> fig;
        fig.resize(point_count);

        for (int j = 0; j < point_count; j++)
            scanf("%f %f", &fig[j].x, &fig[j].y);

        district_squares[i] = square(fig);
        parkings_count += (int)::ceilf(district_squares[i] / square_per_parking);
    }

    printf("%d", parkings_count);
}
```

Задача 4.3.4. (25 баллов)

В умном городе тестируется автоматический планировщик зданий. В задачи планировщика входит расстановка стен, огораживающих комнаты друг от друга. Изначально известны размеры прямоугольного здания — это ширина W и длина L, а также два числа R и S, о которых будет рассказано позже. Затем все здание делится на две комнаты согласно числу R, но только если каждая из двух комнат по площади больше S. Данная процедура повторяется для каждой из комнат до тех пор, пока никакую комнату нельзя будет разбить на две более маленьких с выполнением вышеперечисленных условий. Гарантируется, что $S \leqslant W \cdot L$.

R представляет собой число от 0 до 1, означающее соотношение площади одной из разделённых комнат к площади исходной. Например, для комнаты размером 40 соотношение 0.75 будет означать, что её нужно будет разбить на комнаты с площадями 10 и 30. Требуется написать программу, которая выведет число комнат после создания плана, основываясь на числах W, L, R и S.

Формат входных данных

На вход программе через пробел подаются числа с плавающей точкой: W, L, R, S, $(0 \leqslant W, L, R, S \leqslant 1000)$.

- W — ширина здания,
- L — длина здания,
- R — соотношение сторон комнат (например, соотношение 0.75 будет означать, что нужно будет разбить комнату на комнаты с площадями 1X и 3X),
- S — максимальная площадь комнаты, которая не может находиться в здании.

Формат выходных данных

Число комнат после работы автоматического планировщика.

Пример №1

Стандартный ввод
3 4 0.6666 2

Стандартный вывод
3

Решение

В решении данной задачи следует воспользоваться рекурсией с условием выхода при невозможности разбивания комнаты на 2. Функция вызывает себя дважды (для обеих полученных комнат).

Пример программы-решения

Ниже представлено решение на языке C++

```
#define _CRT_SECURE_NO_WARNINGS

#include <string>
#include <stdio.h>
#include <cstdio>
#include <iostream>
#include <vector>
#include <queue>

int GetRoomsCount(float w, float l, float r, float s)
{
    if (w * l * r < s || w * l * (1.0f - r) < s)
        return 1;
    else
        return GetRoomsCount(w * r, l, r, s) + GetRoomsCount(w * (1 - r), l, r, s);
}

int main()
{
    float w = 0;
    float l = 0;
```

```
    float r = 0;
    float s = 0;
    scanf("%f %f %f %f", &w, &l, &r, &s);

    int count = GetRoomsCount(w, l, r, s);
    printf("%d", count);
}
```