3. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП

Предметный тур

4.1. Физика. 9 класс

Задача 4.1.1. (20 баллов)

По команде с пульта управления квадрокоптер массой $m = 1$ кг начинает подниматься вертикально вверх с постоянной скоростью $v = 12$ м/с. На высоте $h = 50$ м от поверхности Земли в результате сбоя в электрической цепи пропеллеры квадрокоптера останавливаются, и через некоторое время он падает на Землю. На какой высоте H от поверхности Земли за время полета неисправного квадрокоптера его скорость будет минимальной? Чему равна эта скорость? Ускорение свободного падения g принять равным 9.8 м/с^2. Сопротивлением воздуха пренебречь. Ответ округлить до второго знака после запятой. Как изменится результат, если учесть среднюю силу сопротивления воздуха $F_c = 2.2$ Н.

Решение

Дано:
$v = 1.5$ м/с
$h = 50$ м

$v_{\text{мин}}$, H, ΔH, $\Delta v_{\text{мин}}$ - ?

Минимальная скорость достигается в наивысшей точке траектории, $v_{\text{мин}} = 0$ м/с.

$$\begin{cases} \Delta h = \dfrac{v^2 - v_{\text{мин}}^2}{2g} \\ H = h + \Delta h \end{cases}$$

$$H = h + \frac{v^2 - v_{\text{мин}}^2}{2g} = 50 + \frac{12^2}{2 \cdot 9.8} \approx 57.35\text{м}.$$

Учтем силу сопротивления воздуха.

Минимальная скорость также достигается в наивысшей точке траектории и равна нулю.

Следовательно $\Delta v_{\text{мин}} = 0$.

$$ma = mg + F_c; a = g + F_c/m = 9.8 + 2.2/1 = 12\text{м/с}^2$$

$$H_1 = h + \frac{v^2 - v_{\text{мин}}^2}{2a} = 50 + \frac{12^2}{2 \cdot 12} \approx 56 \text{ м}$$
$$\Delta H = H - H_1 = 1.35\text{м}$$

Ответ: $H = 50.11\text{м}; v_{\text{мин}} = 0$ м/с. С учетом F_c минимальная скорость не изменится, а высота уменьшится на 1.35 м.

Задача 4.1.2. (25 баллов)

Сфероробот, представляющий из себя сферу диаметром $d = 40$ см с подвижной массой внутри, движется по горизонтальной плоскости с постоянной скоростью $v = 1$м/с без проскальзывания и пробуксовки. Сколько полных оборотов должен сделать робот для того, чтобы переместиться на расстояние $S = 1$км. Определить ускорение точек боковой поверхности робота, касающихся горизонтальной плоскости, относительно центра сферы. На сколько изменится скорость робота в условии задачи, если на всем пути S имела место постоянная пробуксовка, в результате которой он сделал в 4 раза больше оборотов при тех же условиях работы его движителя.

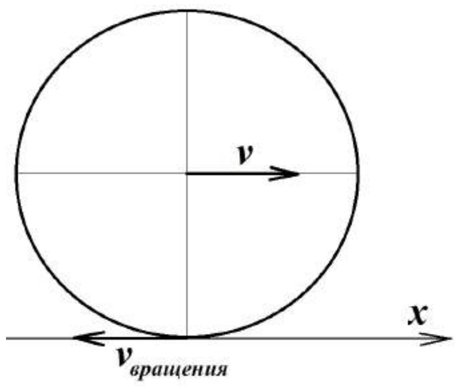
Решение

Дано:
$d = 40$ см
$v = 1$ м/с
$S = 1$ км

N_n, $a_{\text{цс}}$ - ?

Неподвижная система координат - Земля, подвижная - центр сферы.

Нижняя точка сферы в данный момент времени неподвижна относительно Земли.



По закону сложения скоростей скорость нижней точки сферы относительно Земли равна скорости этой точки относительно центра сферы (скорости вращения) плюс скорость центра сферы относительно Земли.

Проектируем на ось x:

$$v_{\text{нижняя относительно Земли}} = 0 = -v_{\text{вращения}} + v \Rightarrow v_{\text{вращения}} = v$$

$$a_{\text{цс}} = \frac{v^2_{\text{вращения}}}{r} = \frac{v^2}{d/2} = \frac{1^2}{0.2} = 5\text{м/с}^2$$

$$N = \frac{S}{2 \cdot \pi \cdot r} = \frac{1000}{2 \cdot 3.14 \cdot 0.2} \approx 796.178 \Rightarrow N_n = 796 \text{ оборотов}$$

Время движения робота без пробуксовки $t = \frac{S}{v}$

Время, затрачиваемое роботом на один полный оборот, $t_1 = \frac{t}{N} = \frac{S}{v \cdot N}$

Тогда время движения робота с пробуксовкой $t_{\text{п}} = t_1 \cdot 4N = \frac{S}{v \cdot N} \cdot 4N = 4 \cdot S/v$

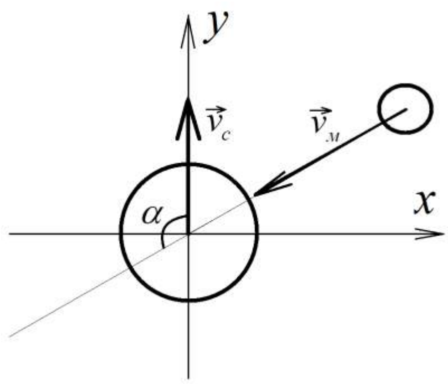
Скорость робота при пробуксовке $v_{\text{п}} = \frac{S}{t_{\text{п}}} = \frac{Sv}{4S} = v/4 = 0.25$ м/с

Изменение скорости $\Delta v = 1 - 0.25 = 0.75$ м/с

Ответ: $N_{\text{п}} = 796$ оборотов; $a_{\text{цс}} = 5$ м/с^2; скорость робота в результате пробуксовки уменьшится на 0.75 м/с.

Задача 4.1.3. (22 баллов)

Элемент космического мусора относительно небольшого размера массой $m = 0.1$ кг попадает в обшивку научно-исследовательского спутника массой $M = 50$ кг и застревает в ней. Угол между скоростями спутника и элемента космического мусора перед столкновением составлял $\alpha = 120°$ (см. рисунок), скорость спутника перед столкновением $V = 7$ км/с, скорость элемента космического мусора перед столкновением $v = 10$ км/с. Определить изменение кинетической энергии спутника в результате столкновения (ответ дать в МДж и округлить до десятых долей). Спутник и элемент космического мусора считать материальными точками.

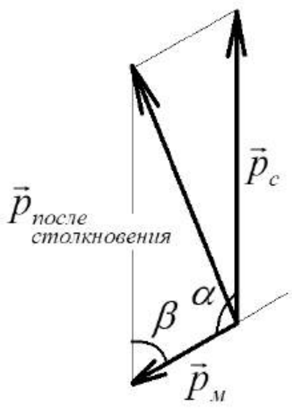


Решение

Дано:
$m = 0.1$ кг
$M = 50$ кг
$v = 10$ км/с
$V = 7$ км/с
$\alpha = 120°$
$\Delta W_{\text{К}}$ - ?

Запишем закон сохранения импульса:

$$\overrightarrow{p}_{\text{после столкновения}} = \overrightarrow{p}_c + \overrightarrow{p}_\text{м}$$



По теореме косинусов (см. рисунок)

$$((M+m)U)^2 = (MV)^2 + (mv)^2 - 2MVmv\cos\beta, \beta = 180^\circ - \alpha$$

$$U = \frac{\sqrt{(MV)^2 + (mv)^2 - MVmv}}{M+m} =$$

$$= \frac{\sqrt{(50 \cdot 7000)^2 + (0.1 \cdot 10000)^2 - 50 \cdot 7000 \cdot 0.1 \cdot 10000}}{50 + 0.1} = 6976.069321\text{м/с}$$

$$\Delta W_K = \frac{MV^2}{2} - \frac{(M+m)U^2}{2} = \frac{50 \cdot 7000^2}{2} - \frac{(50+0.1) \cdot 6976.069321^2}{2} =$$

$$= 5928144 \text{ Дж} \approx 5.9 \text{ МДж}$$

Ответ: 5.9 МДж.

Задача 4.1.4. (15 баллов)

Участок электрической цепи робота-пылесоса представляет из себя медный провод длиной $l = 10$ см и площадью поперечного сечения $S = 2$ мм^2. Определить количество теплоты, выделяемое этим участком цепи за время $t = 30$ мин работы пылесоса при постоянной мощности всасывания, которой соответствует протекающий по проводу ток $I = 0.5$ А. Во сколько раз изменится количество теплоты, выделяемое этим участком цепи, если параллельно медному проводу подсоединить еще один такой же провод в два раза большей длины. Удельное сопротивление меди принять равным $\rho = 0.0175$ Ом·мм^2/м. Разность потенциалов на концах рассматриваемого участка цепи поддерживается постоянной. Ответ округлить до второго знака после запятой.

Решение

Дано:
$l = 10$ см
$S = 2$ мм^2
$t = 30$ мин
$I = 0.5$ А
$\rho = 0.0175$ Ом $\cdot$ мм^2 / м
Q - ?

$$R = \rho\frac{l}{S}$$

Количество теплоты, выделяемое медным проводником

$$Q = I^2Rt = I^2\rho\frac{l}{S}t = 0.5^2 \cdot 0.0175 \cdot 0.1 \cdot 30 \cdot 60/2 \approx 0.39 \text{ Дж}$$

В результате подключения второго проводника суммарная сила тока на рассматриваемом участке изменится:

$$I_1 = \frac{U}{R};\ I_2 = \frac{U}{2R};\ I_{12} = I_1 + I_2 = \frac{3}{2}\frac{U}{R} = \frac{3}{2}I$$

Сопротивление участка после подключения второго проводника

$$\frac{1}{R_{\text{н}}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{2R};\ R_{\text{н}} = \frac{2}{3}R$$

Новое количество теплоты

$$Q_{\text{н}} = \left(\frac{3}{2}I\right)^2 \frac{2}{3}Rt = \frac{3}{2}I^2Rt$$

Тогда

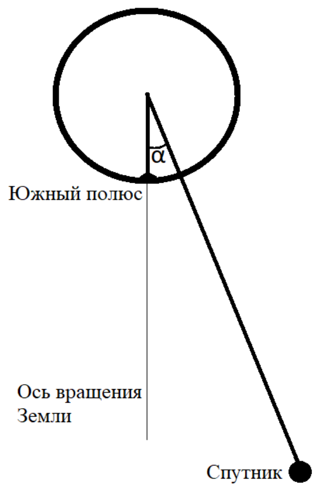
$$\frac{Q_{\text{н}}}{Q} = \frac{\frac{3}{2}I^2Rt}{I^2Rt} = 1.5$$

Ответ: $Q = 0.39$ Дж; Количество теплоты увеличится в 1.5 раза.

Задача 4.1.5. (18 баллов)

Навигатор путешественника, находящегося на южном полюсе Земли (90° южной широты) зафиксировал сигнал от Российского навигационного спутника системы ГЛОНАСС. Высота полета спутника над уровнем моря составляет $H = 19400$ км, угол отклонения спутника от оси вращения Земли, выходящей из южного полюса, составляет $\alpha = 20°$ (см. рисунок). Определить расстояние X от спутника до приемной антенны навигатора (результат округлить до километров), а также длину волны поступившего сигнала (результат округлить до сантиметров), если частота сигнала

$v = 1246$ МГц. Определить время задержки сигнала Δt (это время, через которое сигнал, испущенный передающим устройством спутника, фиксируется навигатором), ответ дать в мс. Скорость распространения радиоволн принять равной $c = 3 \cdot 10^8$ м/с, радиус Земли $R_З = 6400$ км.



Решение

Дано:
$H = 19400$ км
$\alpha = 20°$
$v = 1246$ МГц
$c = 3 \cdot 10^8$ м/с
$R_З = 6400$ км
$\lambda, X, \Delta t$ - ?

$$\lambda = \frac{c}{v} = \frac{3 \cdot 10^8}{1246 \cdot 10^6} \approx 0.24 \text{ м} = 24 \text{ см}$$

По теореме косинусов:

$$X^2 = R_З^2 + (R_З + H)^2 - 2 \cdot R_З(R_З + H)\cos\alpha$$

$$X = \sqrt{(6400 \cdot 10^3)^2 + ((19400 + 6400) \cdot 10^3)^2 - 2 \cdot 6400 \cdot 10^3 \cdot (19400 + 6400) \cdot 10^3 \cos 20°} =$$

$$= \sqrt{(6400^2 + 25800^2 - 2 \cdot 6400 \cdot 25800 \cdot \cos 20°)} \cdot 10^3 \approx 19907 \text{ км}$$

$$\Delta t = \frac{X}{c} = \frac{19906680.01}{3 \cdot 10^3} \approx 0.066 = 66\text{мс}$$

Ответ: $\lambda = 24$ см, $X = 19907$ км, $\Delta t = 66$ мс.

4.2. Физика. 10-11 класс

Задача 4.2.1. (22 балла)

Водород при нормальных условиях (давление $P_0 = 10^5$ Па, температура $T = 300$ К) находится внутри сферы радиусом $R = 10$ см. В результате внешнего воздействия 0.1% молекул были ионизованы, т.е. от этих молекул было оторвано по одному электрону и эти электроны были изъяты из объема. Найти работу, которую надо затратить, чтобы удалить еще один электрон с поверхности сферы на бесконечность. Предполагаем, что заряды распределены по объему внутри сферы равномерно. Заряд электрона $e = 1.6 \cdot 10^{-19}$ Кл, постоянная Больцмана $k = 1.38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К, $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

Решение

Дано:
$R = 10$ см
$\alpha = 0.1\%$
$e = 1.6 \cdot 10^{-19}$ Кл
$k = 1.38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К
$\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м
$P_0 = 10^5$ Па
$T = 300$ К
A - ?

Исходное число молекул водорода находится из уравнения идеального газа

$$PV = NkT$$

$$N = \frac{PV}{kT} = \frac{10^5 \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot 10^{-3}}{1.38 \cdot 10^{23} \cdot 3 \cdot 10^2} \approx 10^{23} \text{ молекул}$$

Число ионизированных молекул

$$N_{i,e} = 10^{-3} \cdot N = 10^{20} \text{ ионов и электронов}$$

Заряд внутри сферы после удаления электронов

$$Q = e \cdot N_i = 1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{20} = 16\,\text{Кл}$$

Потенциал заряженной сферы

$$\phi(R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{R} = \frac{1}{4\pi \cdot 8.85 \cdot 10^{-12}} \cdot \frac{16}{10^{-1}} = 14.4 \cdot 10^{11}\text{ В}$$

Работа по удалению электрона (принимаем ноль потенциал на бесконечности)

$$A = e\Delta\phi = 1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 14.4 \cdot 10^{11} = 23 \cdot 10^{-8}\text{ Дж}$$

Ответ: $A = 23 \cdot 10^{-8}$ Дж.

Задача 4.2.2. (22 баллов)

Предположим, что башню высотой $h = 300$ м поставили перпендикулярно поверхности Земли на полюсе и на экваторе. Подсчитать время падения камня t, опущенного с вершины башни без начальной скорости. На какое расстояние от вертикали Δh отклонится камень при падении на Землю? Исследовать качественно, как изменятся значения Δh и t, если башню установить между полюсом и экватором посередине. Трением о воздух пренебречь, принять $R_З = 6400$ км, ускорение свободного падения считать равным $g = 10$ м/с^2 и на экваторе, и на полюсе.

Решение

Дано:
$h = 300$ м
$R_З = 6400$ км
$g = 10$ м/с^2

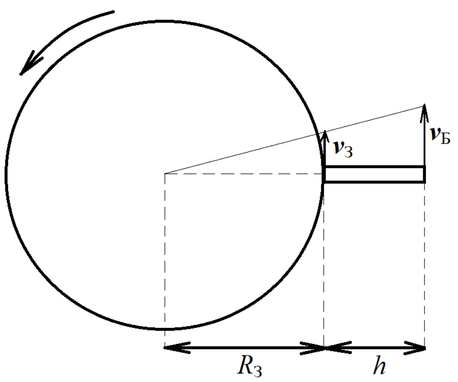
$\Delta h, t$ - ?

При падении камня с башни на полюсе вращение Земли на движение камня не влияет.

$$h = \frac{gt^2}{2}, \text{ откуда } t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 300}{20}} \approx 7.75 \text{ с}$$

Отклонения от вертикали нет.

Изобразим (без соблюдения масштабов) Земной шар и башню на экваторе (вид со стороны полюса).



$v_Б$ – линейная скорость верхнего конца башни, связанная с вращением Земли;

$v_З$ – линейная скорость поверхности Земли на экваторе, связанная с вращением Земли;

$T = 24$ часа – период обращения Земли;

$\omega = 2\pi/T$ – угловая скорость вращения.

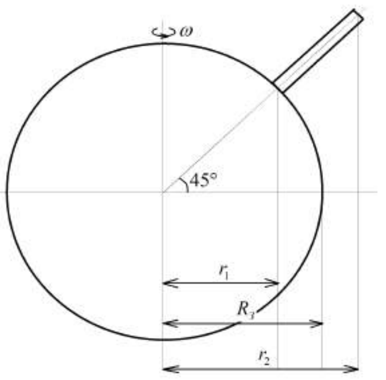
$$\omega \approx 7.3 \cdot 10^{-5}\ c^{-1}$$
$$v_Б = \omega(R_З + h) = 7.3 \cdot 10^{-5} \cdot 6.4003 \cdot 10^6 \approx 467.222 \text{ м/с}$$
$$v_З = \omega \cdot R_З = 7.3 \cdot 10^{-5} \cdot 6.4 \cdot 10^6 = 467.2 \text{ м/с}$$

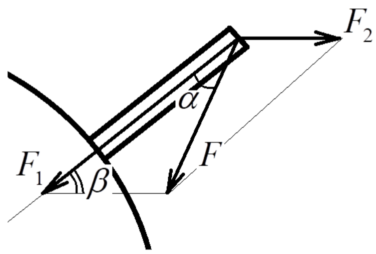
Время падения на экваторе равно $t = 7.75$ с.

Отклонение от вертикали

$$\Delta h = (v_{\text{Б}} - v_{\text{З}}) \cdot t = 0.022 \cdot 7.75 \approx 0.17\text{м}.$$

Изобразим (без соблюдения масштабов) земной шар и башню в данном случае. В более крупном масштабе отдельно изобразим башню с указанием действующих сил на камень на уровне верхней точки башни.





$$r_1 = R_{\text{З}} \cos 45^\circ = R_{\text{З}} \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$r_2 = (R_{\text{З}} + h) \cos 45^\circ = (R_{\text{З}} + h) \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$F_1 = mg$ – сила притяжения к Земле, действующая на камень по закону всемирного тяготения.

$F_2 = m\omega^2 r_2$ – центробежная сила, действующая на камень в верхней точке башни.

$F = F_1 + F_2$ – результирующая сила притяжения камня к Земле.

α – угол между F_1 и F.

$\beta = 45^\circ$ - по условию задачи.

Скорость вращения камня в верхней точке башни

$$v_{\text{Б}} = \omega r_2 = \omega (R_{\text{З}} + h) \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Скорость вращения основания башни

$$v_{\text{З}} = \omega r_1 = \omega R_{\text{З}} \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Значение F находится по теореме косинусов

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2F_1 F_2 \cos \alpha}$$

$$F_1 = mg; \; F_2 = m\omega^2 (R_{\text{З}} + h) \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{\omega^2(R_З + h)\frac{\sqrt{2}}{2}}{g} = \frac{53.3 \cdot 10^{-10} \cdot 6.4003 \cdot 10^6 \cdot 0.7}{10} = 23.9 \cdot 10^{-4}$$

Полагаем $g = 10$ м/с^2, $t = 7.75$ с.

Δh, связанное с вращением Земли в данном случае

$$\Delta h = (v_Б - v_З)t = \omega\left[(R_З + h)\frac{\sqrt{2}}{2} - R_З\frac{\sqrt{2}}{2}\right] \cdot t = 0.17\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 12 \text{ м}$$

По теореме синусов

$$\frac{F_2}{\sin\alpha} = \frac{F}{\sin 45^\circ}; \; \sin\alpha = \frac{F_2}{F}\sin 45^\circ = 23.8 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 16.7 \cdot 10^{-4}$$

Следовательно, отклонением камня по меридиану в сторону экватора можно пренебречь.

Ответ: $\Delta h = 0.17$ м; $t = 7.75$ с. В случае установки башни между полюсом и экватором посередине $\Delta h = 0.12$ м, $t = 7.75$ с.

Задача 4.2.3. (15 баллов)

Жилой отсек космической станции имеет объем $V = 40$ м^3 и заполнен воздухом при нормальных условиях (давление $P_0 = 10^5$ Па, температура $T = 300$ К). В результате попадания метеорита образовалась микротрещина, в которую вытекает в секунду в среднем $\Delta N = 10^{22}$ молекул. Считая процесс изотермическим, рассчитать время, которое отводится космонавтам для обнаружения и устранения утечки воздуха, если допустимое уменьшение давления в жилом отсеке оценивается в 20%.

Решение

Дано:
$V = 40$ м^3
$\Delta N = 10^{22}$ молекул/с
$\alpha = 20\%$
$P_0 = 10^5$ Па
$T = 300$ К

t - ?

Начальное количество молекул воздуха в жилом отсеке при нормальных условиях

$$N_0 = \frac{P_0 V}{kT} = \frac{10^5 \cdot 40}{1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 3 \cdot 10^2} \approx 9.7 \cdot 10^{26} \text{ молекул}$$

При $T = const$ уменьшение давление на 20% означает, что и количество молекул в отсеке уменьшается на 20%, следовательно

$0.2N_0 = \Delta N \cdot t$, откуда

$$t = \frac{0.2N_0}{\Delta N} = \frac{0.2 \cdot 9.7 \cdot 10^{26}}{10^{22}} = 19300\, c = \frac{19300}{3.6 \cdot 10^3} = 5.36 \text{ часа}$$

Ответ: $t = 5.36$ часа.

Задача 4.2.4. (25 баллов)

В измерительном приборе, установленном на космической станции, покоящаяся заряженная частица вначале попадает в однородное электрическое поле напряженностью $E = 400$ В/м и проходит вдоль силовой линии расстояние $l = 1$ м, а затем влетает в однородное поперечное магнитное поле с индукцией $B = 10^{-2}$ Тл и движется в нем по окружности с радиусом $R = 0.3$ м. Вычислить удельный заряд частицы, равный отношению ее заряда к массе. Учесть, что в магнитном поле на частицу действует сила Лоренца, направленная к центру окружности и равная произведению заряда частицы на ее скорость и на величину магнитной индукции. Как изменится траектория частицы, если:

а) частица влетает в прибор с начальной скоростью v_0 вдоль силовой линии вектора E;

б) частица влетает в прибор с начальной скоростью v_0 под углом α к силовой линии электрического поля.

Решение

Дано:
$E = 400$ В/м
$l = 1$ м
$B = 10^{-2}$ Тл
$R = 0.3$ м
t - ?

Кинетическая энергия частицы, приобретаемая в однородном электрическом поле

$$\frac{mv^2}{2} = qEl, \text{ откуда} v = \left(\frac{2qEl}{m}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Записываем 2 закон Ньютона для частицы, движущейся в поперечном магнитном поле

$$\frac{mv^2}{R} = qvR, \text{ откуда} \frac{q}{m} = \frac{v}{RB} = \frac{\left(\frac{2qEl}{m}\right)^{\frac{1}{2}}}{RB}$$

Возводя в квадрат левую и правую часть, имеем

$$\frac{q}{m} = \frac{2El}{R^2B^2} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 10^2 \cdot 1}{0.09 \cdot 10^{-4}} \approx 0.9 \cdot 10^8 \text{ Кл/кг}$$

а) При движении в электрическом поле, согласно 2 закону Ньютона, ускорение $a = qE/m = const$, движение равноускоренное.

$$l = v_0 t + \frac{at^2}{2};\ t = \frac{-v_0 + \sqrt{v_0^2 + 4\frac{a}{2}l}}{a}$$

$$v_k = v_0 + at = \left(v_0^2 + \frac{2qEl}{m}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Запишем закон Ньютона при движении в магнитном поле:

$$\frac{mv_k^2}{R_1} = qv_kB;\ R_1 = \frac{mv_k}{qB};\ \frac{R_1}{R} = \frac{v_1}{v} = \left(\frac{v_0^2 m}{2qEl} + 1\right)^{\frac{1}{2}}$$

Радиус вращения частицы в магнитном поле вырос.

б) $v_0 = v_1 + v_2$, где
$v_1 = v_0 \cos\alpha$ – скорость частицы вдоль силовой линии E,
$v_2 = v_0 \sin\alpha$ – скорость частицы перпендикулярно E.

Согласно пункту а) $v_1 = v_0 \cos\alpha \left(\frac{v_0^2 m}{2qEl} + 1\right)^{\frac{1}{2}}$.

Далее рассмотрим два предельных случая.

1. $v_2 \perp E,\ v_2 || B,\ v_1 \perp B$

$$R_1 = \frac{mv_1}{qB} = R\left(\frac{mv_1}{2qEl} + 1\right)^{\frac{1}{2}}$$

За счет v_2 частица смещается вдоль силовой линии B, образуя спираль. Радиус спирали R_1, а шаг спирали $h = v_2 \cdot T$, где T – период обращения, $T = 2\pi R_1/v_1$.

2. $v_1 \perp B,\ v_2 \perp B$
В этом случае частица влетает в поперечное магнитное поле со скоростью $v = v_1 + v_2$.
Модуль скорости $v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$.
Радиус вращения $R_2 = \frac{mv}{qB}$.
В магнитном поле радиус вращения возрос. Спирального движения нет.

Удельный заряд исследуемой частицы соответствует элементарной частице – протону.

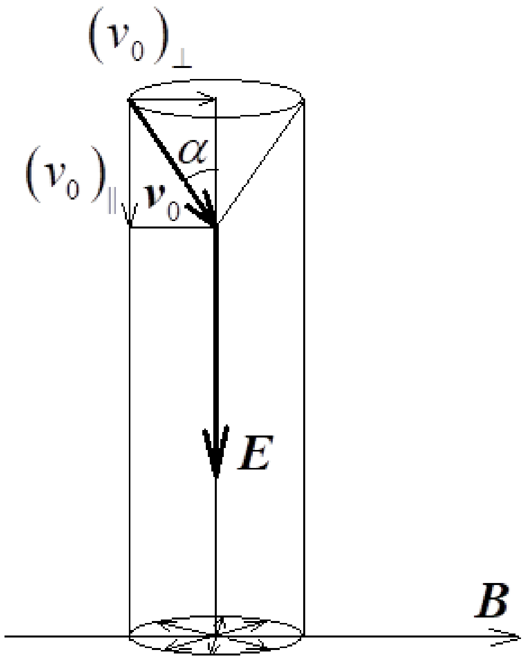
$$q_p = 1.6 \cdot 10^{-19}\ \text{Кл};\ m_p = 1.8 \cdot 10^{-27}\text{кг}$$

$$\frac{q_p}{m_p} = \frac{1.6 \cdot 10^{-19}}{1.8 \cdot 10^{-27}} = 0.9 \cdot 10^8\ \text{Кл/кг}$$

Если начальная скорость частицы v_0 параллельна вектору E, то радиус вращения в магнитном поле возрастает:

$$\frac{R_1}{R} = \left(\frac{v_0^2 m}{2qEl} + 1\right)^{\frac{1}{2}}$$

Если начальная скорость частицы v_0 направлена под углом α к вектору E, то траекторию движения можно обосновать из рисунка:



Составляющая $(v_0)_\perp$ может составлять с равной вероятностью различные углы с вектором B в интервале от 0 до 360°.

Если $(v_0)_\perp$ в проекции на B равна 0, то она складывается с $(v_0)_{||}$ векторно и увеличивает радиус вращения.

Если имеется не равная нулю проекция $(v_0)_\perp$ на B, то она вызывает смещение частицы вдоль вектора B так, что траектория становится винтовой линией.

Задача 4.2.5. (16 баллов)

Теплоизолированный сосуд, содержащий один моль гелия при температуре $27°C$, находится на борту летательного аппарата, движущегося со скоростью $V = 300$ м/с. Подсчитать среднюю энергию одной молекулы гелия после того, как летательный аппарат опустился на Землю и остановился. Чему равна при этом внутренняя энергия газа в сосуде? Молярная масса гелия равна $\mu = 4 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

Решение

Дано:
$\nu = 1$ моль
$T = 27°C$
$V = 300$ м/с
$W_{\text{ср}}, W_{\text{вн}}$ - ?

Кинетическая энергия направленного движения молекул гелия после остановки летательного аппарата переходит в тепловую

$$\frac{3}{2}kT_0 + \frac{m_{He}\cdot\mu^2}{2} = \frac{3}{2}kT_1$$

где $T_0 = 27 + 273 = 300$ K,

T_1 – температура молекул газа после остановки,

m_{He} – масса молекулы гелия.

$$m_{He} = \frac{k\mu}{R} = \frac{1.38\cdot 10^{-23}\cdot 4\cdot 10^{-3}}{8.31} = 0.66\cdot 10^{-26}\ \text{кг}$$

где k – постоянная Больцмана, R – универсальная газовая постоянная.

$$W_{\text{ср}} = \frac{3}{2}T_1 = \frac{3}{2}kT_0 + \frac{m_{He}\nu^2}{2} = \frac{3}{2}\cdot 1.38\cdot 10^{-23}\cdot 300 + \frac{0.66\cdot 10^{-26}\cdot 300^2}{2} \approx 6.5\cdot 10^{-21}\ \text{Дж}$$

Внутренняя энергия идеального газа равна сумме кинетических энергий молекул, участвующих в хаотическом движении

$$W_{\text{внутр}} = W_{\text{ср}}\cdot N_a = 6.5\cdot 10^{-21}\cdot 6.02\cdot 10^{23} = 39.1\cdot 10^2\ \text{Дж} \approx 3.9\ \text{кДж}$$

Ответ: $W_{\text{ср}} \approx 6.5\cdot 10^{-21}$ Дж, $W_{\text{вн}} \approx 3.9$ кДж.

4.3. Информатика

Задача 4.3.1. (10 баллов)

Алгоритм автономного управления БПЛА измеряет в процессе полета 3 значения α, β и γ. Все 3 показателя вещественного типа с 2 знаками после запятой.

$$-1.00 \leqslant \alpha \leqslant 1.00, 0.00 \leqslant \beta \leqslant 3.00 \text{ и } 1.00 \leqslant \gamma \leqslant 10.00.$$

Вы знаете, что параметр α может за секунду измениться в любую из сторон не более чем на 0.07, β — 0.01, γ — 0.11.

Зная начальные значения параметров (всегда постоянные), определите наименьшее количество бит, которое необходимо затратить на хранение информации об изменении параметров в течение 1 минуты, если изменение каждого из показателей кодируется наименьшим количеством бит?

Решение

Изменения параметров α, β, γ принимают 15, 3 и 23 различных значения соответственно. Таким образом, для их кодирования необходимо 4 бита, 2 бита и 5 битов соответственно. В сумме за 1 секунду тратится 11 битов. За 60 секунд — 660 битов.

Ответ: 660

Задача 4.3.2. (20 баллов)

На стене висят умные часы со светодиодным табло. Они показывают в формате ЧЧММ от 0000 до 2359. С целью экономии энергии при смене времени они переключают минимальное число диодов.

Цифры представляются следующим образом:

```
..... ..... ..... ..... ..... ..... ..... ..... ..... .....
.###. ...#. .###. .###. .#.#. .###. .###. .###. .###. .###.
.#.#. ...#. ...#. ...#. .#.#. .#... .#... ...#. .#.#. .#.#.
.#.#. ...#. .###. .###. .###. .###. .###. ...#. .###. .###.
.#.#. ...#. .#... ...#. ...#. ...#. .#.#. ...#. .#.#. ...#.
.###. ...#. .###. .###. ...#. .###. .###. ...#. .###. .###.
..... ..... ..... ..... ..... ..... ..... ..... ..... .....
```

Здесь # показаны горящие светодиоды, а . - погашеные.

Например, исходное время 20:19 будет выглядеть на табло как

```
...................
.###.###.....#.###.
...#.#.#.#...#.#.#.
.###.#.#.....#.###.
.#...#.#.#...#...#.
.###.###.....#.###.
...................
```

Через минуту оно сменится на

```
...................
.###.###...###.###.
...#.#.#.#...#.#.#.
.###.#.#...###.#.#.
.#...#.#.#.#...#.#.
.###.###...###.###.
...................
```

В данном случае минимальным числом диодов для переключения является 10.

Найдите минимальное число для перехода из текущего времени во время, которое будет через минуту.

Формат входных данных

Целое 4-значное число N с ведущими нулями, обозначающее текущее время в формате ЧЧММ.

Формат выходных данных

Целое число, являющееся минимальным числом диодов, состояние которых необходимо для изменения времени на 1 минуту вперед.

Система оценки

Баллы за задачу будут начисляться пропорционально количеству успешно пройденных тестов.

Пример №1

Стандартный ввод
2019

Стандартный вывод
10

Решение

В данной задаче не обязательно отрисовывать 2 табло – до и после смены. Достаточно составить таблицу, в которой написано, какое наименьшее число диодов нужно переключить с одной цифры на другую.

Во время нахождения нового времени стоит обратить внимание на граничные значения – для минут невозможны значения больше 59, а для часов – более 23.

Пример программы-решения

Ниже представлено решение на языке C++

```
#define _CRT_SECURE_NO_WARNINGS
#include <stdio.h>
#include <vector>

static const int table[][10] =
{
    //0  1  2  3  4  5  6  7  8  9
    { 0, 7, 3, 3, 5, 3, 2, 5, 1, 2 }, // 0
    { 7, 0, 8, 6, 4, 8, 9, 2, 8, 7 }, // 1
    { 3, 8, 0, 2, 6, 4, 3, 6, 2, 3 }, // 2
    { 3, 6, 2, 0, 4, 2, 3, 4, 2, 1 }, // 3
    { 5, 4, 6, 4, 0, 4, 5, 4, 4, 3 }, // 4
    { 3, 8, 4, 2, 4, 0, 1, 6, 2, 1 }, // 5
    { 2, 9, 3, 3, 5, 1, 0, 7, 1, 2 }, // 6
    { 5, 2, 6, 4, 4, 6, 7, 0, 6, 5 }, // 7
    { 1, 8, 2, 2, 4, 2, 1, 6, 0, 1 }, // 8
    { 2, 7, 3, 1, 3, 1, 2, 5, 1, 0 }  // 9
};

int main()
{
    int time = 0;
    scanf("%d", &time);
    int hours = time / 100;
    int minutes = time % 100;

    minutes++;
    if (minutes == 60)
    {
        minutes = 0;
        hours++;
```

```
    }
    if (hours == 24)
        hours = 0;

    int time2 = hours * 100 + minutes;

    std::vector<int> before{ time / 1000, (time % 1000) / 100,
        (time % 100) / 10 , (time % 10) };
    std::vector<int> after{ time2 / 1000, (time2 % 1000) / 100,
        (time2 % 100) / 10 , (time2 % 10) };

    int sum = 0;
    for (int i = 0; i < 4; i++)
        sum += table[before[i]][after[i]];

    printf("%d", sum);
}
```

Задача 4.3.3. (20 баллов)

На современной автостоянке установили Шлагбаум Универскально Распознающий Автомобили (Ш.У.Р.А.), который пропускает только те машины, которые есть у него в базе данных. Однако машин настолько много, что Ш.У.Р.А. нуждается в помощи. Напишите программу, которая будет отвечать на запросы, содержащие номера автомобилей и выносить вердикт, можно ли пропустить данный автомобиль или нет.

Формат входных данных

В первой строке записаны 2 числа: $N(1 \leqslant \ N \leqslant 10^5)$ — число номеров автомобилей в базе данных. $M(0 \leqslant M \leqslant 10^5)$ — число запросов к базе.

Следующая строка содержит N слов в формате LLNNNLRR, где L — буквы латинского алфавита, а N и R — цифры от 0 до 9. Эта строка содержит список всех занесенных в базу данных номеров автомобилей.

Далее идут M строк, содержащих номер в том же формате, что и в базе данных. Это номера автомобилей, которые хотят проехать через шлагбаум.

Формат выходных данных

M строк, содержащих ответы на соответствующие запросы. Если в запросе указан номер, существующий в базе данных, то выводить YES, иначе NO.

Система оценки

Баллы за задачу будут начисляться пропорционально количеству успешно пройденных тестов.

Пример №1

Стандартный ввод
3 4
DD820G70 RR001D80 ID000Q24
DD820G70
ID000Q25
DD020G70
RR001D80

Стандартный вывод
YES
NO
NO
YES

Решение

Данную задачу можно решить несколькими способами. В приведенном решении каждая входная строка превращается в уникальное число. Массив таких чисел сортируется, после чего каждая входная строка кодируется тем же алгоритмом, что и входная, после чего в сохраненном массиве бинарным поиском ищется такое же число.

Пример программы-решения

Ниже представлено решение на языке C++

```cpp
#define _CRT_SECURE_NO_WARNINGS

#include <stdio.h>
#include <vector>
#include <string>
#include <iostream>
#include <cstdio>
#include <algorithm>

unsigned long long EncodeNumber(std::string &number)
{
    unsigned long long code = (unsigned long long)number[0];
    code += (unsigned long long)number[1] << 8;
    code += (unsigned long long)number[2] << 16;
    code += (unsigned long long)number[3] << 24;
    code += (unsigned long long)number[4] << 32;
    code += (unsigned long long)number[5] << 40;
    code += (unsigned long long)number[6] << 48;
    code += (unsigned long long)number[7] << 56;
    return code;
}

bool binarySearch(std::vector<unsigned long long> &data, unsigned long long value)
{
    int l = 0;
    int r = data.size() - 1;
    while (l <= r)
    {
        unsigned long long m = l + (r - l) / 2;
        if (data[m] == value)
```

```
            return true;
        if (data[m] < value)
            l = m + 1;
        else
            r = m - 1;
    }
    return false;
}

int main()
{
    int n;
    int m;
    scanf("%d %d", &n, &m);

    std::vector<unsigned long long> database;
    database.resize(n);

    for (int i = 0; i < n; i++)
    {
        std::string number;
        std::cin >> number;
        database[i] = EncodeNumber(number);
    }

    std::sort(database.begin(), database.end());

    for (int i = 0; i < m; i++)
    {
        std::string number;
        std::cin >> number;
        unsigned long long code = EncodeNumber(number);
        if (binarySearch(database, code))
            printf("YES\n");
        else
            printf("NO\n");
    }

    return 0;
}
```

Задача 4.3.4. (25 баллов)

Беспилотные транспортные средства в умном городе умеют общаться между собой с помощью зашифрованных сообщений. Для этого они выбирают ключ — такое число A, являющееся произведением двух простых чисел.

Напомним, что простыми числами называют натуральные числа больше 1, которые делятся только сами на себя и на 1.

Требуется написать программу, которая будет определять, подходят ли числа под данные требования.

Формат входных данных

Число N $(1 \leqslant N \leqslant 10^4)$ — количество чисел-кандидатов.

Далее следует N строк, в каждой содержится одно целое число $M (2 \leqslant M < 10^9)$ — возможный ключ.

Формат выходных данных

N строк, которые содержат YES, если N-ое число-кандидат подходит по требованиям и NO в противном случае.

Система оценки

Баллы за задачу будут начисляться пропорционально количеству успешно пройденных тестов.

Пример №1

Стандартный ввод
1 6

Стандартный вывод
YES

Пример №2

Стандартный ввод
2 7 10

Стандартный вывод
NO YES

Решение

Данная задача может быть решена с помощью 2 программ.

Первая программа будет выполнятся на компьютере участника 1 раз и писать в консоль все простые числа до некоторого числа, большего чем квадратный корень из максимально возможного числа, так как максимальным делителем может быть корень из самого числа. Данная программа может использовать любой алгоритм нахождения простых чисел.

Полученный текст копируется во вторую программу в массив простых чисел, и внутри нее во всех числах ищутся простые делители перебором по массиву.

Следует отметить, что простые делители могут быть одинаковыми.

Пример программы-решения

Ниже представлено решение на языке C++

```
#define _CRT_SECURE_NO_WARNINGS

#include <string>
#include <stdio.h>
#include <cstdio>
#include <iostream>
#include <vector>
#include <queue>
#include <algorithm>

const int prime_numbers[] = {
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53,
...
99881, 99901, 99907, 99923, 99929, 99961, 99971, 99989, 99991
};

int main()
{
    int count = 0;
    scanf("%d", &count);
    for (int c = 0; c < count; c++)
    {

        int n = 0;
        scanf("%d", &n);

        int prime_count = sizeof(prime_numbers) / sizeof(prime_numbers[0]);

        int dividers = 0;
        for (int i = 0; i < prime_count; i++)
        {
            int n_copy = n;
            while (n_copy % prime_numbers[i] == 0)
            {
                n_copy /= prime_numbers[i];
                dividers++;
            }
            if (prime_numbers[i] > n || dividers > 2)
                break;
        }

        if (dividers == 2)
            printf("YES\n");
        else
            printf("NO\n");
    }
}
```

Задача 4.3.5. (25 баллов)

Разработанный беспилотный дрон умеет выполнять следующие комманды:

MOV X — передвижение в точку $X_0 + X$, где X_0 это координата дрона до выполнения операции, REP N — повторить следующий блок команд N раз, BLB — начало блока, BLE — конец блока, END — конец программы.

Дрону передаются комманды, которые он должен выполнить. Изначально дрон находится в точке 0.

Требуется определить координату дрона после выполнения всех команд.

Формат входных данных

На вход поступает неопределённое число строк с коммандами.

Гарантируется, что:

- Только одна комманда в строке.
- В программе нет ошибок (например, отсутствие BLE на каждый BLB)
- Последняя комманда в программе — END.
- Координата дрона в любой момент выполнения программы не выйдет за пределы $(-10^9, 10^9)$.
- Конструкция BLB ... BLE всегда идёт сразу за коммандой REP N.

Для любой комманды MOV X верно $(-10^9 \leqslant X \leqslant 10^9)$, где X — целое.

Для любой комманды REP N верно $(0 \leqslant N \leqslant 10^9)$, где N — целое.

Формат выходных данных

Одно число — координата дрона на момент завершения программы.

Пример №1

Стандартный ввод
MOV 2 REP 3 BLB MOV 1 BLE END

Стандартный вывод
5

Решение

В данной задаче все команды имеют одинаковую длину, поэтому понять, какая именно была команда можно по 3 первым символам.

Создается список повторений, каждый элемент которого равен числу повторений текущего блока операций. Изначально в списке 1 элемент, равный 1, так как программа целиком выполняется 1 раз. Затем при каждой операции повторения и начале нового блока добавляем новый элемент в список. При конце блока удаляем последний элемент списка.

При передвижении достаточно умножить длину передвижения на последний элемент списка.

Пример программы-решения

Ниже представлено решение на языке C++

```cpp
#include <cstdio>
#include <string>
#include <iostream>
#include <list>
#include <utility>

int main()
{
    int x = 0;
    std::string line = "";
    std::list<int> repeats_count;
    repeats_count.push_back(1);
    int current_block = 0;

    while (line != "END")
    {
        std::getline(std::cin, line);
        std::string command = line.substr(0, 3);

        if (command == "END")
            break;
        else if (command == "REP")
            repeats_count.push_back(atoi(line.substr(4, line.size() - 4).c_str())
            * repeats_count.back());
        else if (command == "BLB")
        {
            current_block++;
        }
        else if (command == "BLE")
        {
            repeats_count.pop_back();
            current_block--;
        }
        else
        {
            int jump = atoi(line.substr(4, line.size() - 4).c_str());
            if (repeats_count.size() != 0)
                x += jump * repeats_count.back();
            else
                x += jump;
        }
    }
    std::cout << x;
}
```