3. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП

Предметный тур

На индивидуальное решение задач дается по 2 часа на один предмет. Для каждой из параллелей (9 класс или 10-11 класс) предлагается свой набор задач по математике, задачи по информатике - общие для всех участников.

Решение каждой задачи по математике дает определенное количество баллов (см. критерии оценки). При этом некоторые задачи делятся на подзадачи. За каждую подзадачу можно получить от 0 до указанного количества баллов.

Решение задач по информатике предполагало написание программ. Ограничения по используемым языкам программирования не было. Проверочные тесты для каждой задачи по информатике делились на несколько групп. Прохождение всех тестов в группе тестов дает определенное количество баллов за решение задачи.

Участники получают оценку за решение задач в совокупности по всем предметам данного профиля (математика и информатика) — суммарно от 0 до 200 баллов:

- **Математика 9 класс** количество набранных баллов (от 0 до 100);
- **Математика 10-11 класс** количество набранных баллов (от 0 до 100);
- **Информатика** количество набранных баллов (от 0 до 300) делится на коэффициент 3.

5.1. Математика. 9 класс

Задача 5.1.1. (20 баллов)

У правильного десятиугольника отметили все вершины и еще 2019 точек внутри. Некоторые из 2029 отмеченных точек соединили отрезками так, что исходный десятиугольник оказался разбит на треугольники и каждая точка является вершиной хотя бы одного треугольника, причем любые два треугольника либо не имеют общих точек, либо имеют общую вершину, либо имеют общую сторону. (Такое разбиение фигур называется **триангуляцией**.)

а) Сколько треугольников получилось?

б) Докажите, что количество треугольников не зависит от способа триангуляции.

Решение

а) Можно последовательно ставить точки внутри многоугольника, соединять со всеми вершинами этого многоугольника и считать сколько треугольников добавилось. Изначально треугольников не было. Поставим точку и соединим со всеми вершинами. Появятся 10 треугольников. Потом ставим следующую точку внутрь какого-то треугольника. Один треугольник вычитается и добавляется три, т.е. плюс два треугольника. Всего получается $10 + 2018 \cdot 2 = 4046$.

б) Пусть при некоторой триангуляции получились n треугольников. Сосчитаем сумму всех углов всех треугольников. При каждой точке внутри десятиугольника сумма углов равна 360°, а сумма углов в вершинах равна сумме внутренних углов десятиугольника. Получаем: $360^\circ \cdot 2019 + 180^\circ \cdot (10 - 2) = 180^\circ \cdot n$. Откуда $n = 2 \cdot 2019 + 8 = 4046$.

Задача 5.1.2. (30 баллов)

Пусть переменные x, y, z принимают только натуральные значения. Докажите, что уравнение

$$x^2 + y^2 = z^3$$

а) имеет решение;

б) имеет бесконечное количество решений;

в) имеет бесконечное количество решений, в которых z — нечетное число.

Решение

а) $x = y = z = 2$ является решением данного уравнения, так как $2^2 + 2^2 = 2^3$.

б) Тройки чисел $(2n^3; 2n^3; 2n^2)$ для любого натурального n являются решениями:

$$(2n^3)^2 + (2n^3)^2 = 2 \cdot 2^2 n^{3\cdot 2} = (2n^2)^3.$$

в) Найдем одно такое решение, например, $(5; 10; 5)$ или $(11; 2; 5)$ и воспользуемся приемом из пункта б). Тройка

$$(5n^3; 10n^3; 5n^2)$$

при нечетных n будет решением исходного уравнения, в котором $z = 5n^2$ нечетное число.

Критерии оценки

Только за пункт а) — 10 баллов, за пункт б) — 20 баллов (включает пункт а)), за пункт в) — 30 баллов (включает первые два пункта).

Задача 5.1.3. (50 баллов)

На одном из полей 8×8 находится робот-разведчик, который каждую секунду перемещается в соседнее поле. Охранная система каждую секунду может проверить любые n полей, есть ли там робот. Может ли охранная система за одну минуту наверняка обнаружить шпиона, если

а) $n = 15$;

б) $n = 9$;

в) $n = 8$?

(Считается, что если у робота есть шанс не оказаться на проверяемом поле, то он не обнаружен.)

Решение

а) Приведем алгоритм проверки, для которого в некоторый момент робот окажется в проверямом поле. Пронумеруем поля как в таблице:

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

Сперва проверим все поля с 1 по 15. На следующей секунде проверим поля с 8 по 22, затем с 15 по 29. Каждый раз первые 7 проверяемых убираем и добавляем следующие 7. Таким образом добираемся до конца таблицы за 8 секунд. У шпиона нет возможности "проскочить" не оказавшись на проверяемом поле. Следовательно, охранная система в какой-то момент обнаружит шпиона не зависимо где он находился в начале и как передвигался.

б) Алгоритм примерно такой же, только вместо 7 полей передвигаемся на 1 поле: на первой секунде проверяем с 1 по 9, на второй со 2 по 10, затем с 3 по 11 и т.д. Шпион будет обнаружен за не более чем 56 секунд.

в) Раскрасим поля в шахматном порядке. Предположим, что шпион в первой секунде проверки оказался на черном поле. Тогда в нечетные секунды он будет в черных, а в четных секундах в белых полях. Начиная с угла пронумеруем диагонали в одном направлении с 1 по 15. Пусть угловая клетка (первая диагональ) будет черного цвета. Проверим 1 и 3 ряд клеток (черные) и еще какие-то. На второй секунде проверим 2-й и 4-й ряд (белые). Потом 5-й ряд, 6-й ряд, и т.д. по одному. Ряды 12 и 14 можем проверить вместе, так же как и ряд 13 с 15-м. Шпион не сможет пройти с непроверенных полей в проверенные, не оказавшись в проверяемом. Единственный момент, когда это можно сделать, только если предположение вначале неверно, т.е. на первой секунде шпион находился в белой клетке. Если охранная система проверит еще раз по тому же алгоритму с 16 по 30 секунду, то сможет поймать шпиона не более чем за 30 секунд.

Критерии оценки

Только за пункт а) — 10 баллов, за пункт б) — 25 баллов (включает пункт а)), за пункт в) — 50 баллов (включает первые два пункта).

Ответ: а) да; б) да; в) да.

5.2. Математика. 10-11 класс

Задача 5.2.1. (20 баллов)

Функция $f(x)$ задана следующим образом:

$$f(x) = \frac{x^2 \cdot (-1)^{-[x]} + x}{|x|},$$

где $[x]$ означает наибольшее целое число, не превосходящее числа x.

Найдите значение выражения:

$$\underbrace{f(f(\ldots f}_{2019}(20.19)\ldots)).$$

Решение

За исключением некоторых целых точек, $f(f(x)) = -x$. Поэтому

$$\underbrace{f(f(\ldots f}_{2018}(20.19)\ldots)) = -20.19.$$

Остается вычислить $f(-20.19) = -21.19$.

Ответ: -21.19

Задача 5.2.2. (40 баллов)

Пусть переменные x, y, z принимают только натуральные значения. Докажите, что уравнение

$$x^{2018} + y^{2018} = z^{2019}$$

а) имеет решение;

б) имеет бесконечное количество решений;

в) имеет бесконечное количество решений, в которых z — нечетное число.

Решение

а) $x = y = z = 2$ является решением данного уравнения, так как

$$2^{2018} + 2^{2018} = 2 \cdot 2^{2018} = 2^{2019}.$$

б) Тройки чисел $(2n^{2019}; 2n^{2019}; 2n^{2018})$ для любого натурального n являются решениями:

$$(2n^{2019})^{2018} + (2n^{2019})^{2018} = 2 \cdot 2^{2018} n^{2019 \cdot 2018} = (2n^{2018})^{2019}.$$

в) Воспользуемся тождеством:

$$a^n(a^n+b^n)^n + b^n(a^n+b^n)^n = (a^n+b^n)\cdot(a^n+b^n)^n = (a^n+b^n)^{n+1}.$$

Возьмем a любое нечетное число, b – четное и $n = 2018$. Тогда решениями уравнения являются все тройки чисел $x = a(a^{2018}+b^{2018})$, $y = b(a^{2018}+b^{2018})$, $z = a^{2018}+b^{2018}$. Нечетность z очевидна.

Критерии оценки

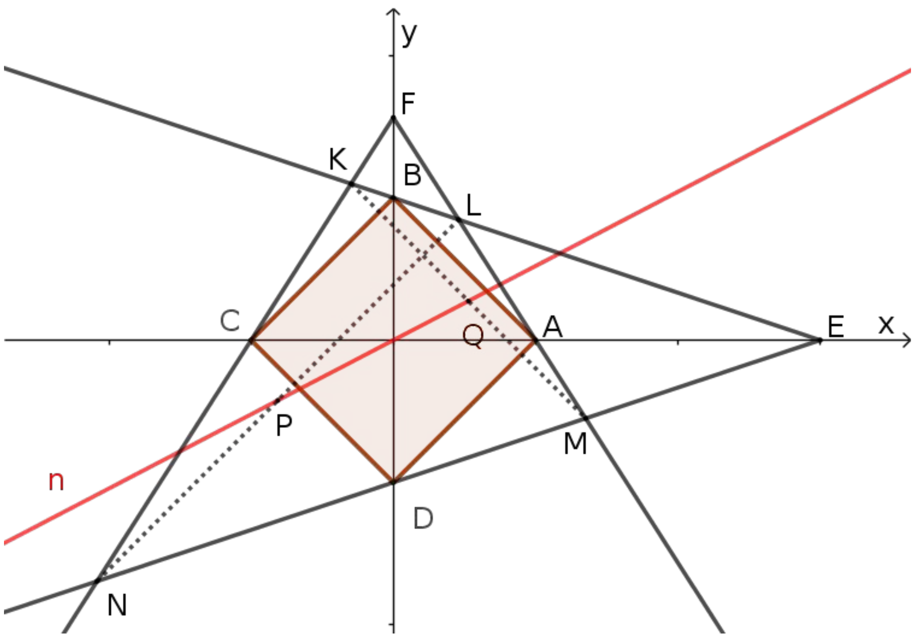
Только за пункт а) — 10 баллов, за пункт б) — 20 баллов (включает пункт а)), за пункт в) — 40 баллов (включает первые два пункта)

Задача 5.2.3. (40 баллов)

На продолжениях диагоналей AC и BD квадрата $ABCD$ отметили точки E и F соответственно. Точки пересечения лучей EB и ED с лучами FA и FC образовали выпуклый четерехугольник $KLMN$. Докажите, что прямая, проходящая через середины диагоналей получившегося четырехугольника $KLMN$, проходит через центр квадрата $ABCD$.

Решение

Введем систему координат так, как показано на рисунке (точка $A(1;0)$, точка $B(0;1)$):



Пусть точки E и F имееют координаты $(e;0)$ и $(0;f)$ соответственно. Запишем уравнения прямых

$$BE:\ \frac{x}{e}+y=1;$$

$$DE:\ \frac{x}{e}-y=1;$$

$$AF:\ x+\frac{y}{f}=1;$$

$$CF:\ -x+\frac{y}{f}=1.$$

Решая соответствующие уравнения найдем координаты вершин четырехугольника $KLMN$:

$$K\left(\frac{e-ef}{ef+1};\frac{ef+f}{ef+1}\right),$$

$$L\left(\frac{ef-e}{ef-1};\frac{ef-f}{ef-1}\right),\ M\left(\frac{ef+e}{ef+1};\frac{f-ef}{ef+1}\right),\ N\left(\frac{-e-ef}{ef-1};\frac{-ef-f}{ef-1}\right).$$

Тогда точки P и Q, середины диагоналей LN и KM, имеют координаты:

$$P\left(\frac{-e}{ef-1};\frac{-f}{ef-1}\right),\ Q\left(\frac{e}{ef+1};\frac{f}{ef+1}\right).$$

Для центра квадрата $O(0;0)$ вектора $\overrightarrow{OP}\left(\frac{-e}{ef-1};\frac{-f}{ef-1}\right)$ и $\overrightarrow{OQ}\left(\frac{e}{ef+1};\frac{f}{ef+1}\right)$ коллинеарны, поскольку $\overrightarrow{OQ}=\frac{1-ef}{1+ef}\cdot\overrightarrow{OP}$. Следовательно, точки P, O, Q лежат на одной прямой.

5.3. Информатика

Задача 5.3.1. Игра (100 баллов)

Как-то Ильнар и Азат придумали игру для двух человек. На доске пишется число n, после чего игроки делают свои ходы.

Ходят по очереди. Первым ходит Ильнар. За один ход игрок должен заменить написанное на доске число (обозначим его m) на число $m-x$, где x является степенью числа 2, то есть $x=2^k$ для некоторого целого неотрицательного числа k, и выполняется условие $1\leqslant x\leqslant m$. Игрок, который не может сделать ход, проигрывает.

Определите, кто выиграет при оптимальной игре.

Формат входных данных

В первой строке вводится одно целое число n $(0\leqslant n\leqslant 10^9)$ – начальное число.

Формат выходных данных

Выведите *Ilnar won!*, если выиграет Ильнар, или *Azat won!*, если выиграет Азат.

Примеры

Пример №1

Стандартный ввод
2

Стандартный вывод
Ilnar won!

Пример №2

Стандартный ввод
`0`

Стандартный вывод
`Azat won!`

Задача 5.3.2. Бактерии (100 баллов)

На планете Нирокку существует n различных видов бактерий. Виды бактерий пронумерованы от 1 до n. В лаборатории "Кадзи" хранятся экземпляры некоторых из этих видов.

В лаборатории существует n колоний бактерий, в i-ой из которых находятся все имеющиеся в лаборатории бактерии i-го вида. Некоторые колонии могут пустовать. Также стоит отметить, что в "Кадзи" поддерживают условия для существования, но не размножения бактерий.

Вечером в лабораторию приезжает министр экспериментов, который хочет увидеть коллекцию бактерий. Учёные лаборатории решили угодить ему: они хотят, чтобы суммарное количество бактерий стало равно любимому числу министра. Для этого учёные воспользуются раствором ускорения роста численности бактерий в колонии.

Раствор можно применять только к тем колониям, количество бактерий в которых не менее двух и ранее к ним не применяли данный раствор. В результате действия раствора количество бактерий в колонии увеличится в k раз. Число k может быть любым целым числом, большим 1, и выбирается заново перед каждым применением раствора, то есть оно может меняться.

До вечера остаётся мало времени, и потому учёные успеют применить раствор не более чем к одной колонии. Также учёные потеряли и не могут найти информацию о том, к каким колониям уже применялся раствор. В случае повторного применения раствора к некоторой колонии происходит взрыв, последствия которого до приезда министра устранить не является возможным.

Помогите учёным определить, можно ли угодить министру, не рискуя при этом взорвать лабораторию.

Формат входных данных

В первой строке два целых числа:

$1 \leqslant n \leqslant 10^5$ – количество различных видов бактерий на планете Нирокку;

$0 \leqslant m \leqslant 10^{18}$ – любимое число министра экспериментов.

Во второй строке n целых чисел:

$0 \leqslant a_i \leqslant 10^6$ – количество бактерий i-го $(1 \leqslant i \leqslant n)$ вида в лаборатории "Кадзи".

Формат выходных данных

В случае если угодить министру невозможно, выведите строку "No" (без кавычек).

В случае отсутствия необходимости применять раствор, выведите строку "Yes" (без кавычек).

В остальных случаях выведите строку "Yes i k" (без кавычек), где i – номер колонии, к которой учёным можно и нужно применить раствор, а k – количество раз, в которое необходимо увеличить численность i-ой колонии.

Если правильных ответов несколько, выведите любой из них.

Примеры

Пример №1

Стандартный ввод
`5 5` `0 0 1 2 0`

Стандартный вывод
`Yes 4 2`

Пример №2

Стандартный ввод
`2 7` `3 3`

Стандартный вывод
`No`

Пример №3

Стандартный ввод
`4 8` `0 3 2 3`

Стандартный вывод
`Yes`

Задача 5.3.3. Царство (100 баллов)

В тридевятом царстве n городов и $n-1$ дорог, по которым можно из любого города добраться в любой другой (возможно, проезжая через другие города). Города пронумерованы от 1 до n, а дороги – от 1 до $n-1$. Все дороги с двусторонним движением.

Автомобилисты царства последнее время сильно озабочены ценами на бензин. Они называют пару городов (i, j) странной, если из города i можно добраться до города j и стоимость бензина в городе i больше, чем в городе j.

А царь озабочен народными волнениями и хочет перекрыть все дороги. На время. А также хочет всегда знать степень недовольства своих подданных. Одним из факторов, влияющих на степень недовольства, является количество пар странных городов.

Ваша задача – определить количество пар странных городов до перекрытия дорог и после каждого очередного перекрытия дороги. Не справитесь – не сносить вам головы!

Формат входных данных

В первой строке вводится целое число n ($2 \leqslant n \leqslant 3 \cdot 10^5$).

Во второй строке вводится n целых чисел c_i ($1 \leqslant c_i \leqslant 10^9$) – стоимость бензина в i-ом городе.

В следующих $n-1$ строках содержатся описания дорог: пары чисел a_i и b_i ($1 \leqslant a_i, b_i \leqslant n$), говорящие о том, что i-ая дорога проложена между городами a_i и b_i.

В последней строке задается порядок перекрытия дорог, то есть $n-1$ целых чисел q_i ($1 \leqslant q_i \leqslant n-1$) – номер дороги, перекрытой i-ой по счёту.

Гарантируется, что до перекрытия дорог в царстве можно было из любого города добраться в любой другой, а в конечном итоге все дороги перекрыли.

Формат выходных данных

Выведите в одной строке n целых чисел – количество пар странных городов до перекрытия дорог и после каждого очередного перекрытия дороги.

Заметьте, что ответ может не помещаться в 32-битный тип данных.

Примеры

Пример №1

Стандартный ввод
3 1 2 3 1 2 2 3 1 2

Стандартный вывод
3 1 0

Пример №2

Стандартный ввод
5 1 2 3 1 2 1 2 2 3 3 4 4 5 2 3 1 4

Стандартный вывод
8 4 2 1 0