3. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП

Предметный тур

4.1. Физика. 9 класс

Задача 4.1.1. Универсальный гонщик (50 баллов)

В романе Жюля Верна «Властелин мира» описывается машина-амфибия «Грозный», способная двигаться под водой, по суше, по поверхности воды и по воздуху.

Длина этой машины 10 метров. Предположим, что когда она двигается под водой, она имеет продолговатую форму, очень близкую к цилиндру радиуса 1.5 метра. Пусть масса такой машины равна 7000 кг. Сила сопротивления воды при быстром движении рассчитывается для такой машины по следующей формуле:

$$F = C \cdot \frac{\rho \cdot v^2}{2} \cdot S$$

Здесь C = 0.82 – коэффициент формы, S – характерная площадь, для подобной формы оцениваемая как $V^{2/3}$, $\rho = 1000$ кг/м^3 – плотность воды, v – скорость движения.

Объём цилиндра можно вычислить по формуле: $V = \pi \cdot r^2 \cdot L$.

При быстром движении по суше верна такая же формула, только в качестве плотности следует брать плотность воздуха, которая равна $\rho_{\text{возд}} = 1.29$ кг/м^3. По суше машина движется на колесах Коэффициент скольжения трения между колёсами и землёй равен 0.1, Полезная мощность машины 1.5 МВт.

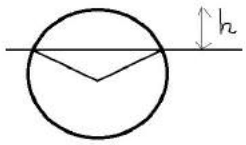
Ускорение свободного падения принять равным 9.81 м/с^2.

При движении в воде считать, что машина умеет отталкиваться от воды, создавая некоторую силу тяги F, предельное значение которой ограничено мощностью машины.

1. За какое время машина-амфибия проплывёт 10 км под водой, используя свой двигатель на полную мощность, оставаясь при этом на одной глубине?
2. До какой температуры нагреется эта машина, если в него ударит молния, если считать, что тепло по машине распространится равномерно, а её средняя удельная теплоёмкость на единицу массы равна 490 Дж/(кг·К) и на неё налепился в снежном облаке слой мокрого снега толщиной в 1 см (удельная теплота плавления 330 кДж/кг, плотность 350 кг/м^3)? Энергию молнии принять равной 300 миллионов джоулей, а начальную температуру автомобиля вместе со снегом за ноль градусов по Цельсию. Считать, что снег налепился только на боковую поверхность цилиндрической формы.
3. Какую максимальную скорость эта машина может развивать на суше? Получите ответ с точностью до 1 см/с. По земле машина двигается на обычных

колёсах.

4. Эта машина, плавая на поверхности воды, погружается на глубину 0.466 метра.



Вода ночью теплее, чем воздух, и происходит теплопередача – воздух охлаждает, а вода нагревает машину. Считая, что машина плывёт ночью, оцените устоявшуюся температуру машины, если воздух имеет температуру 5 градусов по Цельсию, а вода 15 градусов по Цельсию.

5. Известно, что максимальная скорость, с которой эта машина может погружаться вертикально вниз в воде составляет 2.27 м/с. Во сколько раз надо увеличить мощность двигателя этой машины, чтобы удвоить эту скорость?

Решение

1. Используя двигатель на полную мощность, машина будет двигаться с некоторой постоянной скоростью. Запишем второй закон Ньютона в проекции на направление движения:

$$F - C \cdot \frac{\rho \cdot v^2}{2} \cdot S = 0;\; F = C \cdot \frac{\rho \cdot v^2}{2} \cdot S$$

Мощность равна произведению силы на скорость, откуда можно найти скорость:

$$N = F \cdot v = C \cdot \frac{\rho \cdot v^3}{2} \cdot S;\; v = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot N}{C \cdot \rho \cdot S}} = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 1.5 \cdot 10^6}{0.82 \cdot 10^3 \cdot (10 \cdot \pi \cdot 1.5^2)^{\frac{2}{3}}}} = 5.98\text{м/с}$$

При движении с постоянной скоростью время движения будет равно:

$$t = \frac{10000}{5.98} = 1672\,\text{секунды}$$

Ответ: $t = 1672$ секунды

Критерии оценки

- Указано, что машина будет двигаться с постоянной скоростью – 2 балла.
- Правильно записан второй закон Ньютона – 3 – балла.
- Записано выражение для мощности или его аналог, позволяющий найти скорость – 1 балл.
- Получено правильное выражение для времени – 2 балла.
- Получен правильный числовой ответ – 2 балла.

2. Запишем уравнение теплового баланса. Вся энергия, которая есть в молнии, уходит на плавление снега, нагревание воды и нагревание автомобиля:

$$Q = m \cdot \lambda + m \cdot c_1 \cdot t + M \cdot c_2 \cdot t \to t = \frac{Q - m \cdot r}{m \cdot c_1 + M \cdot c_2}$$

Осталось посчитать массу снега m. Эту массу можно найти, умножив среднюю плотность на объём снега, равный разности объёмов двух цилиндров:

$$m = \rho \cdot \pi \cdot L \cdot ((r + a)^2 - r^2) = 350 \cdot \pi \cdot 10 \cdot (1.51^2 - 1.5^2) \approx 331 \text{ кг}$$

$$t = \frac{300 \cdot 10^6 - m \cdot 330000}{m \cdot 330 + 7000 \cdot 490} \approx 53.9^\circ\, C$$

Ответ: $53.9^\circ C$.

Критерии оценки

- Указано, что энергия молнии пойдет на плавление снега, нагрев получившейся воды и автомобиля или эти соображения использованы при составлении уравнений – 2 балла.
- Правильно записано уравнение теплового баланса – 3 балла.
- Получено выражение для массы снега – 1 балл.
- Получено правильное выражение для температуры – 2 балла.
- Получен правильный числовой ответ – 2 балла.

3. Максимальную скорость можно найти из записи второго закона Ньютона. Запишем его в проекции на ось направления движения, учитывая то, что автомобиль едет за счёт силы трения колёс о землю (больше ему не от чего отталкиваться):

$$m \cdot g \cdot f - C \cdot \frac{\rho_{\text{возд}} \cdot v_{max}^2}{2} \cdot S = 0$$

$$v_{max} = \sqrt{\frac{m \cdot g \cdot f}{C \cdot \frac{\rho_{\text{возд}}}{2} \cdot S}} \approx 27.56 \text{ м/с.}$$

Ответ: 27.56 м/с.

Критерии оценки

- Отмечено (или учтено при записи уравнений), что машина двигается вперед за счет силы трения колес о поверхность – 1 балл.
- Записан второй закон Ньютона для движения машины с постоянной скоростью – 4 балла.
- Записано выражение для скорости – *3 балла.*
- Получен правильный числовой ответ – *2 балла.*

4. Поток тепла пропорционален произведению разности температур и площади поверхности, через которую поток проходит. Для того чтобы машина находилась в тепловом равновесии тепловой поток от воды к машине и от машины к воздуху должны быть равны.

Найдем площади соприкосновения:

Площадь под линией состоит из равнобедренного треугольника и сектора, дополнительного к сектору с углом 2α, причём $h = R \cdot (1 - \cos\alpha)$. Отсюда:

$$\cos\alpha = 1 - \frac{h}{R} \approx 0.689; \alpha \approx 0.811 \text{ рад}$$

Тогда площадь, граничащая с воздухом, относится к площади, граничащей с водой, как $0.811 \div (2\pi - 0.811)$.

Так как поток тепла пропорционален разности температур и площади поверхности, то получаем уравнение теплового баланса:

$$0.811 \cdot (t - 5) = (2\pi - 0.811) \cdot (15 - t) \to t \approx 13.71°C$$

Ответ: $13.71°C$.

Критерии оценки

- Использована в любой форме формула для теплового потока – 1 балл.
- Отмечено (или учтено при записи уравнений), должно быть тепловое равновесие, приводящее к равенству потоков – 3 балла.
- Записано уравнение теплового баланса – 2 балла.
- Вычислено отношение площадей соприкосновения (допустимо ставить 1 балл, если отношение вычислено неправильно или не вычислено, но сами площади вычислены.
- Получен правильный числовой ответ – 2 балла.

5. Запишем второй закон Ньютона для погружения машины. Будем считать, что для самого быстрого погружения она движется торцом вниз, помогая себе двигателями. Тогда:

$$C \cdot \frac{\rho \cdot v^2}{2} \cdot S + \rho \cdot g \cdot V - m \cdot g \cdot V - F = 0$$

Отсюда можно выразить мощность двигателя:

$$N = F \cdot v = \left(C \cdot \frac{\rho \cdot v^2}{2} \cdot S + \rho \cdot g \cdot V - m \cdot g\right) \cdot v$$

При удвоении скорости новая мощность будет равна:

$$N_1 = C \cdot \frac{8 \cdot \rho \cdot v^3}{2} \cdot S + 2 \cdot v \cdot (\rho \cdot g \cdot V - m \cdot g)$$

Отсюда:

$$\frac{N_1}{N} = \frac{C \cdot \frac{8 \cdot \rho \cdot v^3}{2} \cdot S + 2 \cdot v \cdot (\rho \cdot g \cdot V - m \cdot g)}{\left(C \cdot \frac{\rho \cdot v^2}{2} \cdot S + \rho \cdot g \cdot V - m \cdot g\right) \cdot v} =$$

$$= \frac{C \cdot \frac{8 \cdot \rho \cdot v^2}{2} \cdot S + 2 \cdot (\rho \cdot g \cdot V - m \cdot g)}{C \cdot \frac{\rho \cdot v^2}{2} \cdot S + \rho \cdot g \cdot V - m \cdot g}$$

$$\frac{N_1}{N} \approx 2.33$$

Ответ: 2.33.

Критерии оценки

- Отмечено, что для наибольшей скорости машина погружается вертикально вниз, вперед торцом – 1 балл.
- Записан второй закон Ньютона для погружения машины с постоянной скоростью – 2 балла.
- Записано выражение для мощности двигателя при погружении – 1 балл (можно ставить 3 балла, если второй закон Ньютона не был записан отдельно, а сразу использован для мощности).
- Записано выражение для мощности при погружении с удвоенной скоростью – 2 балла.
- Получен правильный числовой ответ – 2 балла.

Задача 4.1.2. Температурный градиент (50 баллов)

Подводный дрон, представляющий из себя полый шар, получает энергию из разницы температуры морской воды на разной глубине. Набирая воду у поверхности океана, дрон увеличивает свою среднюю плотность и спускается на дно, а глубоко под водой использует разность температур между запасённой водой и водой вокруг для получения электричества с КПД 60%.

Радиус дрона равен 30 см, объём шара $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, масса незаполненного дрона 50 кг, средняя плотность материала, из которого сделан дрон, равна 7200 кг/м^3 (полость для воды при расчете этой плотности не учитывается).

Напряжение, необходимое для работы системы управления дрона, равно 220 вольт, общее сопротивление его электрической схемы равно 800 Ом.

До пятого пункта считать, что плотность воды равна $\rho_0 = 1000$ кг/м^3. Теплоёмкость воды равна 4200 Дж/(кг·°C). На каждые 1000 метров температура воды понижается на 11 градусов по Цельсию.

1. Какое минимальное количество воды дрон может взять с собой на дно?
2. Какое максимальное количество воды дрон может взять с собой на дно?
3. Какое максимальное количество энергии дрон может получить, охладив воду при спуске на 1500 метров?
4. Какое минимальное количество раз в году дрону нужно спускаться на 1.5 км, чтобы пополнять запас энергии, необходимый для работы его системы управления? Считать, что в году ровно 365 суток по 24 часа.
5. За счёт того, что плотность воды увеличивается с понижением температуры, при спуске вниз в наполненном дроне образуется свободное место и можно непрерывно догружать ещё воду по мере погружения вниз, тем самым увеличивая количество энергии, которое можно получить. Какую дополнительную массу воды можно подгрузить, если действовать таким образом, когда полностью заполненный водой дрон опустится на дно, находящееся на глубине

1.5 км, если на поверхности температура равна 31 градус Цельсия, а плотность воды линейно зависит от её температуры: $\rho = \rho_0(1 - \alpha T)$, где для воды коэффициент α принять равным:

- $0.53 \cdot 10^{-4} K^{-1}$ (при температуре $5 - 10°C$);
- $1.50 \cdot 10^{-4} K^{-1}$ (при температуре $10 - 20°C$);
- $3.02 \cdot 10^{-4} K^{-1}$ (при температуре $20 - 40°C$);
- $4.58 \cdot 10^{-4} K^{-1}$ (при температуре $40 - 60°C$);
- $5.87 \cdot 10^{-4} K^{-1}$ (при температуре $60 - 80°C$).

В расчётах считать, температура с глубиной снижается строго линейно, а количество подгружаемой воды на каждом интервале изменения температур из указанных приблизительно прямо пропорционально глубине погружения.

Решение

1. Минимальным будет количество воды, при котором средняя плотность дрона будет равна плотности воды (при большем количестве дрон погружается).

   Тогда:

$$\rho_{\text{в}} = \frac{m + m_{\text{в}}}{\frac{4}{3}\pi r^3} \to m_{\text{в}} = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_{\text{в}} - m = \frac{4}{3}\pi \cdot 0.3^3 \cdot 1000 - 50 \approx 63.1 \text{ кг}.$$

   Ответ: 63.1 кг

Критерии оценки

- Указано условие на минимальное количество воды или записаны условия плавания – 4 балла.
- Получено правильное выражение для массы воды – 4 балла.
- Получен правильный числовой ответ – 2 балла.

2. Максимальное количество воды можно вычислить, считая, что при этом количестве воды внутри дрона не останется свободного места. Для вычисления свободного объёма внутри дрона нужно из общего его объёма вычесть тот объём, который занимает материал дрона. После этого умножаем на плотность воды:

$$m_{\text{в}max} = \rho_{\text{в}} V_{\text{св}} = \rho_{\text{в}} \left(\frac{4}{3}\pi r^3 - \frac{m}{\rho_{\text{ср}}}\right) = 1000 \cdot \left(\frac{4}{3}\pi \cdot 0.3^3 - \frac{50}{7200}\right) \approx 106.15 \text{ кг}$$

   Ответ: 106.15 кг.

Критерии оценки

- Указано условие на максимальное количество – 2 балла.
- Получено выражение для свободного объема дрона – 3 балла.
- Получено правильное выражение для массы воды – 3 балла.
- Получен правильный числовой ответ – 2 балла.

3. Охладив воду при спуске на 1500 метров, можно добиться снижения температуры на $\Delta T_0 = 11 \cdot \frac{1500}{1000} = 16.5°C$. Учитывая КПД, максимальную массу воды и её теплоёмкость, получаем общее количество энергии:

$$Q = m_{\text{в}max} \cdot c \cdot \Delta T \cdot \eta = 106.15 \cdot 4200 \cdot 11 \cdot \frac{1500}{1000} \cdot 0.6 \approx 4.41 \text{ МДж}$$

Ответ: 4.41 МДж.

Критерии оценки

- Найдено изменение температуры при погружении – 2 балла.
- Записано количество энергии, которое запасено в воде – 3 балла.
- Записано запасенная энергия, с учетом КПД преобразования – 3 балла.
- Получен правильный числовой ответ – 2 балла.

4. Чтобы узнать, сколько раз в году нужно спускаться, нужно поделить количество энергии, которое требуется дрону на непрерывную работу в течение года, на Q, полученное из предыдущего пункта задачи и округлить вверх до целого числа:

$$N \geqslant \frac{\frac{U^2}{R} \cdot 3600 \cdot 24 \cdot 365}{Q} = \frac{\frac{220^2}{800} \cdot 3600 \cdot 24 \cdot 365}{4413717} \approx 432.27 \rightarrow N_{min} = 433$$

Ответ: 433.

Критерии оценки

- Рассчитано количество энергии, которое необходимо дрону на год – 4 балла.
- Получено выражение для количества погружений – 3 балла.
- Произведено правильное округление (вверх) – 1 балл.
- Получен правильный числовой ответ – 2 балла.

5. Рассмотрим погружение дрона, находящегося на некоторой глубине, на малое расстояние Δx вниз. Тогда при погружении на это расстояние уменьшится температура, возрастёт плотность и уменьшится объём воды. Распишем это уменьшение и выведем коэффициент пропорциональности в приближённой формуле для массы подгружаемой воды в этот момент:

$$\Delta m \approx \beta \cdot \Delta x;\ \Delta T = -\frac{11 \cdot x}{1000};\ \rho = \rho_0(1 - \alpha T) \rightarrow \Delta\rho = -\alpha \cdot \Delta T = \frac{11 \cdot x \cdot \alpha}{1000}$$

$$m = \rho \cdot V = const \rightarrow -\frac{\Delta\rho}{\rho} \approx \frac{\Delta V}{V} \rightarrow \Delta V \approx -V \cdot \frac{\Delta\rho}{\rho} \rightarrow$$

$$\rightarrow \Delta m \approx m \cdot \frac{11 \cdot x \cdot \alpha}{1000} \rightarrow \beta \approx \frac{11 \cdot \alpha \cdot m}{1000}$$

Здесь массу $m = 106.15$ кг , можно считать примерно постоянной.

Это выражение можно использовать в случае погружения в одном температурном диапазоне.

Исходя из того, что каждый километр температура снижается на 11 градусов по Цельсию, получаем, что первый километр спуск идёт в третьем температурном диапазоне, а оставшиеся 500 метров – во втором.

Тогда общая Δm может быть рассчитана следующим образом:

$$\Delta m \approx 11 \cdot 106.15 \cdot (3.02 \cdot 10^{-4} + 0.5 \cdot 1.50 \cdot 10^{-4}) \cong 0.44 \text{ кг}$$

Ответ: 0.44 кг.

Критерии оценки

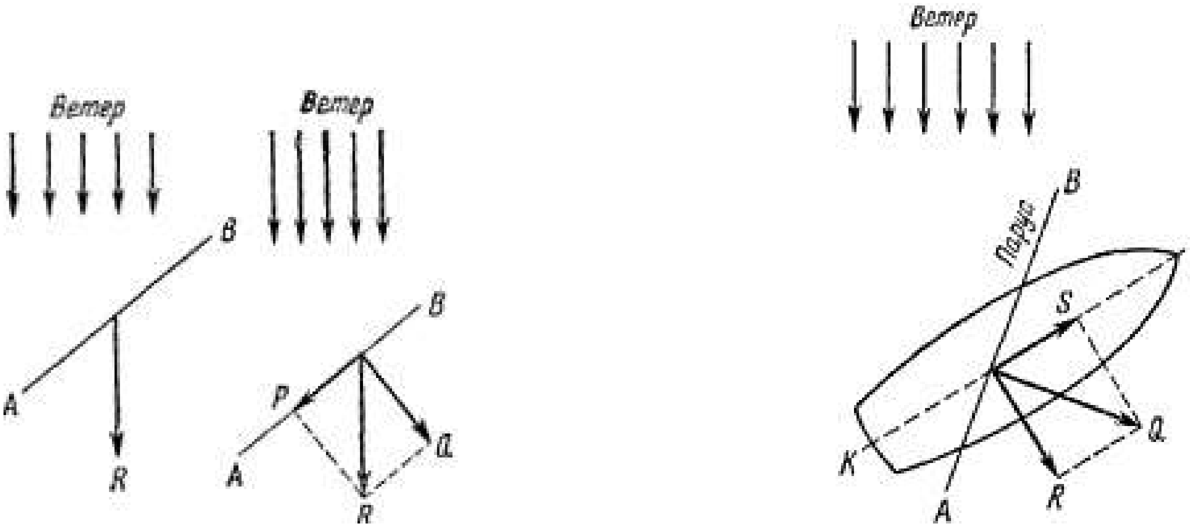
- Получено выражение для изменения объема воды или массы воды, которую можно долить – 6 баллов.
- Учтено, что погружение происходит в разных температурных диапазонах – 2 балла.
- Получен правильный числовой ответ – 2 балла.

4.2. Физика. 10-11 класс

Задача 4.2.1. На парусной яхте против ветра (50 баллов)

Парусные суда с косым парусным вооружением могут ходить под небольшим углом к направлению ветра, практически против него. Объяснить это можно следующим образом.

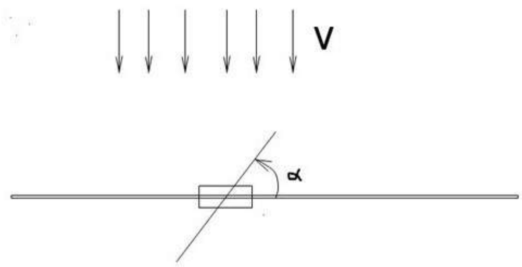
Ветер толкает парус всегда под прямым углом к его плоскости.



Так как ветер напирает равномерно на всю поверхность паруса, то заменяем силу давления ветра силой R, приложенной к середине паруса. Эту силу разложим на две: силу Q, перпендикулярную к парусу, и силу , направленную вдоль него (см. рис. вверху, посередине). Последняя сила толкает парус, так как трение ветра о холст незначительно. Остается сила Q, которая толкает парус под прямым углом к нему. Ускорение свободного падения 9.81 м/с^2, универсальная газовая постоянная 8.31 Дж/(моль·К).

Рисунок справа показывает, как можно идти против ветра. Перпендикулярная движению сила R встречает сильное сопротивление воды за счёт того, что киль делается глубоким. Можно считать, что смещения перпендикулярно курсу судна не возникает. Кроме того, мы пренебрежем креном судна. Остаётся только сила S. При расчётах и рассуждениях в задачах можно считать, что молекулы воздуха, столкнувшись с парусом, не прилипают к нему, а отскакивают, но не абсолютно упруго.

1. Во сколько раз увеличится сила тяги, если массу паруса увеличить в 3 раза? Материал и толщина паруса при этом не меняются.
2. По рейке без трения может скользить брусок. На бруске укреплён парус, угол между ним и рейкой равен $\alpha = 30°$. На парус дует ветер со скоростью $V = 1$ м/с перпендикулярно рейке. Какую максимальную скорость может развить брусок за счёт разгона ветром? Сопротивление воздуха не учитывать.



3. Пусть угол между направлением движения парусника и ветром равен 60 градусов, парусник плывёт против ветра. Под каким углом к ветру надо поставить парус, чтобы сила S была максимальной?
4. Будет ли двигаться парусная лодка вперёд, если на корме установить мощный вентилятор и направить поток воздуха в парус? Считать, что весь поток летит в парус. Ответ поясните.
5. Пусть парусник плывёт вдоль ветра, а парус развёрнут перпендикулярно ветру так, чтобы ветер давал максимальную силу. Скорость ветра равна 20 м/с, парусник уже набрал скорость 10 м/с. Оцените ускорение парусника в этот момент, пренебрегая сопротивлением воды. Площадь паруса равна 10 м^2, масса судна с грузом 200 кг, температура воздуха $20°C$, давление 750 мм.рт.столба, плотность ртути 13600 кг/м^3, молярная масса воздуха 29 г/моль.

Решение

1. Сила пропорциональна площади паруса, т.к. толщина и плотность постоянны, масса паруса так же пропорциональна площади. Следовательно сила прямо пропорциональна массе паруса.

   Ответ: в 3 раза.

Критерии оценки

- Приведен расчет или рассуждение, говорящее о прямой пропорциональности между силой и массой — 8 баллов.

- Получен правильный числовой ответ — 2 балла.

2. Скорость перестанет увеличиваться, когда в системе отсчёта, связанной с бруском, ветер будет параллелен парусу: $u = V \cdot ctg(\alpha) = 1 \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3}$ м/с.

   Ответ: $\sqrt{3}$ м/с.

Критерии оценки

- Найдено условие, при котором скорость будет максимальна — 4 балла.
- Получено выражение для этой скорости — 4 балла.
- Получен правильный числовой ответ — 2 балла.

3. Пусть искомый угол равен x. Тогда сила, которую создаёт ветер, дуя в парус, пропорциональна $sin(x)$, а её проекция на киль пропорциональна $cos(90° - (60° - x)) = sin(60° - x)$. Это значит, что общая сила пропорциональна $f(x) = sin(x) \cdot sin(60° - x)$. Производная функции $f(x)$ равна $sin(60° - 2x)$, следовательно, максимум силы достигается при $x = 30°$. **Ответ:** под углом

   $30°$.

Критерии оценки

- Приведен расчет равнодействующей силы для паруса — 4 балла.
- Получено значение проекции этой силы вдоль паруса — 2 балла.
- Показано (тригонометрически или с помощью производной) при каком значении угла достигается максимум для этой проекции — 2 балла.
- Получен правильный числовой ответ — 2 балла.

Так же правильным (и даже более полным) нужно признать решение, в котором показывается, что в общем случае ставить парус нужно под углом составляющим половину угла между курсом парусника и ветром.

4. Поплывёт вперёд. Рассмотрим начальный момент движения, когда парусник неподвижен и вентилятор гонит газ к парусу. Пусть он передаёт воздуху импульс P, тогда сам он приобретает импульс -P. Молекулы воздуха, столкнувшись с парусом, не прилипают к нему, а отскакивают, поэтому приращение нормальной к парусу составляющей импульса всегда больше до двух раз этой составляющей. Соответственно, импульс, переданный струёй газа парусу, больше (до двух раз) того, который она получила от вентилятора. Следовательно, парусник поплывёт вперёд.

   Ответ: Парусник поплывёт вперёд.

Критерии оценки

- Приведено рассуждение показывающее, что равнодействующая сила будет направлена вперед или указан закон сохранения импульса — 8 баллов.
- Получен правильный ответ — 2 балла.

5. Скорость ветра относительно паруса v равна 10 м/с. Ускорение рассчитаем в инерциальной системе отсчёта, которая движется со скоростью парусника в данный момент. За время Δt масса воздуха, ударившаяся о парус, равна $\rho v S \Delta t$. Импульс этой массы воздуха равен $\rho v^2 S \Delta t$. При абсолютно упругом ударе переданный импульс в 2 раза больше, при абсолютно неупругом равен этому значению. Следовательно, переданный парусу воздухом импульс за время Δt можно оценить как:

$$\rho \cdot v^2 \cdot S \cdot \Delta t < \Delta P < 2 \cdot \rho \cdot v^2 \cdot S \cdot \Delta t$$

Отсюда можно оценить ускорение:

$$\frac{\rho \cdot v^2 \cdot S}{m} < a < 2 \cdot \frac{\rho \cdot v^2 \cdot S}{m}$$

Осталось вычислить плотность воздуха, исходя из данных условия. По закону Менделеева-Клапейрона:

$$p \cdot V = \frac{m}{\mu} \cdot R \cdot T \to \rho = \frac{m}{V} = \frac{p \cdot \mu}{R \cdot T} = \frac{\rho_{Hg} \cdot g \cdot h \cdot \mu}{R \cdot T}$$

Итак, получаем оценку:

$$a_{min} = \frac{\rho_{Hg} \cdot g \cdot h \cdot \mu \cdot v^2 \cdot S}{R \cdot T \cdot m} = \frac{13600 \cdot 9.81 \cdot 0.75 \cdot 0.029 \cdot 10^2 \cdot 10}{8.31 \cdot 293 \cdot 200} \approx 5.96 \text{ м/с}^2$$

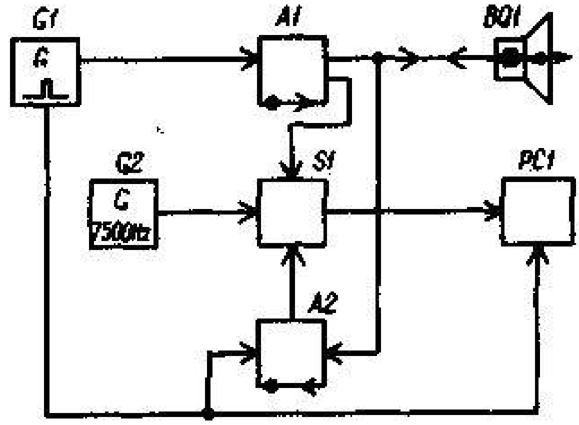
Ответ: $5.96 \text{ м/с}^2 < a < 11.92 \text{ м/с}^2$.

Критерии оценки

- Записан импульс переносимый воздухом — 2 балла.
- Записан закон сохранения импульса для удара воздуха о парус — 2 балла.
- Учтено, что удар может быть разной упругости (получено неравенство для импульсов или ускорений) — 2 балла.
- Вычислена плотность воздуха — 2 балла.
- Получен полный правильный ответ — 2 балла. Если получено только одно значение для граничных случаев (абс. упругий или абс. неупругий удары) — 1 балл.

Задача 4.2.2. Эхолот подводного робота (50 баллов)

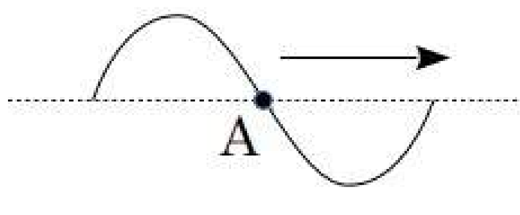
Эхолот позволяет постоянно мониторить толщу воды под дроном, тем самым отслеживая перепады рельефа дна. Общая структурная схема эхолота выглядит так:



Тактовый генератор $G1$ управляет взаимодействием узлов прибора и обеспечивает его работу в автоматическом режиме. Генерируемые им короткие (0.1 с) прямоугольные импульсы положительной полярности повторяются каждые 10 с.

Своим фронтом эти импульсы устанавливают цифровой счетчик PC1 в нулевое состояние и закрывают приемник 2, делая его нечувствительным к сигналам на время работы передатчика. Спадом тактовый импульс запускает передатчик 1, и излучатель-датчик $BQ1$ излучает в направлении дна короткий (40 мкс) ультразвуковой зондирующий импульс. Одновременно открывается электронный ключ $S1$, и колебания образцовой частоты 7500 Гц от генератора $G2$ поступают на цифровой счетчик 1. По окончании работы передатчика приемник 2 открывается и приобретает нормальную чувствительность. Эхосигнал, отраженный от дна, принимается датчиком $BQ1$ и после усиления в приемнике закрывает ключ $S1$. Измерение закончено, и индикаторы счетчика 1 высвечивают измеренную глубину. Очередной тактовый импульс вновь переводит счетчик 1 в нулевое состояние, и процесс повторяется.

1. Какую часть времени работы эхолота датчик $BQ1$ работает как излучатель?
2. Оцените, исходя из данных условия, погрешность измерения расстояния до дна эхолотом, если скорость звука в морской воде равна 1.5 км/сек.
3. На рисунке изображён профиль поперечной волны, распространяющейся вправо. В каком направлении движется в данный момент частица среды, обозначенная буквой ? Чему равна скорость движения точки , если частота волны равна 75 кГц, скорость 1.5 км/с, а кривую на рисунке можно считать синусом.



4. Узкий пучок волн частоты $\nu = 75$ кГц направлен от неподвижного эхолота дрона к приближающейся подводной лодке. Определить скорость V подводной лодки, если частота ν_1 биений (разность частот колебаний источника и сигнала, отраженного от лодки) равна 50 Гц. Скорость u звука в морской воде принять равной 1.5 км/с.

5. Электрическая схема приёмника A2 состоит из конденсатора ёмкости $C = 50$ мкФ и индуктивно-резистивных элементов. Какой максимальный заряд и напряжение накапливаются на этом конденсаторе, если максимальный общий ток, проходящий через конденсатор, равен 15 А? Частота принимаемого ультразвука равна 75 кГц.

Решение

1. BQ1 излучает на протяжении 40 мкс каждый раз, когда происходит спад тактового импульса. Тактовый импульс повторяется раз в 10 секунд. Это значит, что излучатель находится в рабочем состоянии каждые 40 мкс из 10 секунд, то есть $x = 4 \cdot 10^{-6}$.

   Ответ: $4 \cdot 10^{-6}$.

Критерии оценки

- Указано (или правильно использовано в вычислении) условие работы излучателя – 2 балла.
- Указано (или правильно использовано в вычислении) время повтора импульса – 2 балла.
- Получено выражение для доли времени – 4 балла.
- Получен правильный числовой ответ – 2 балла.

2. Погрешность измерения расстояния эхолотом определяется одним тактом колебания образцовой частоты 7500 Гц, используемой для работы счётчика. Так как эта частота означает, что счётчик переключается 7500 раз за секунду, то погрешность измерения времени $\Delta t = 1/7500$ сек. Если ультразвуковой сигнал дошёл до дна, отразился и вернулся обратно за общее время t, то расстояние вычисляется как: $L = \frac{v \cdot t}{2}$. Отсюда следует, что погрешность измерения расстояния равна:

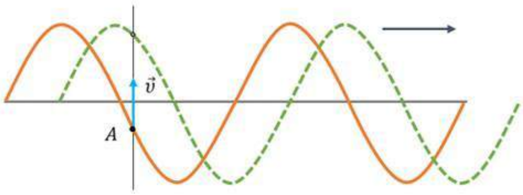
$$\Delta L = \frac{v \cdot \Delta t}{2} = \frac{1500 \cdot 1}{2 \cdot 7500} = 0.1 \text{ метр.}$$

   Ответ: 0.1 метр.

Критерии оценки

- Определено основное условие на погрешность измерения – 4 балла.
- Получено выражение для расстояния до дна – 2 балла.
- Получено выражение для погрешности измерения – 2 балла.
- Получен правильный числовой ответ – 2 балла.

3. Чтобы ответить на этот вопрос, начертим профиль волны, который будет иметь место спустя небольшой интервал времени, учитывая, что волна распространяется вправо.



Из рисунка видно, что скорость точки А направлена вверх. Модуль скорости точки А равен скорости волны $v = 1.5$ км/сек, так как угловой коэффициент наклона синуса в начале координат равен 1.

Ответ: 1.5 км/сек.

Критерии оценки

- Определено направление скорости точки А – 5 баллов.
- Найден модуль скорости точки А – 5 баллов.

4. Частота звука, принимаемого подводной лодкой, равна:

$$\nu_l = \frac{V + u}{u}\nu$$

Тогда, частота звука, отражённого от дна (принимаемого локатором), равна:

$$\nu_2 = \frac{u}{u - V}\nu_l$$

Отсюда получаем:

$$\nu_2 = \frac{V + u}{u - V}\nu$$

Разность частот колебаний источника и сигнала, отражённого от лодки, равна:

$$\nu_1 = \nu_2 - \nu = \nu \cdot \frac{2 \cdot V}{u - V}$$

Отсюда находим скорость приближения подводной лодки к дрону:

$$V = u \cdot \frac{\nu_1}{\nu_1 + 2 \cdot \nu} = 1500\frac{50}{50 + 2 \cdot 75000} \approx 0.500 \text{ м/с}$$

Ответ: 0.5 м/с.

Критерии оценки

- Найдена частота звука отраженного от дна – 4 балла.
- Найдена разность частот колебаний источника и сигнала – 2 балла.
- Получено выражение для скорости лодки – 4 балла.
- Получен правильный числовой ответ – 2 балла.

5. Чувствительный приёмник работает как колебательный контур.

   Тогда максимальная сила тока и максимальный заряд на нём связаны соотношением $I = w \cdot q$, где $w = 2 \cdot \pi \cdot f = 6.28 \cdot 75000 \approx 471240$ с$^{-1}$. Значит, максимальный заряд равен:

$$q_{max} = \frac{15}{471240} \approx 31.8\,\text{мкКл}.$$

   Максимальное напряжение:

$$U_{max} = \frac{q_{max}}{C} = \frac{31.8}{50} \approx 0.64\,\text{В}.$$

   Ответ: $q_{max} \approx 31.8$ мкКл, $U_{max} \approx 0.64$ В.

Критерии оценки

- Указано, что приемник работает как колебательный контур (или этот факт используется в рассуждениях или вычислениях) – 2 балла.
- Найдена собственная частота колебательного контура – 2 балла.
- Указана связь между амплитудами заряда и тока – 1 балл.
- Получено правильное значение величины заряда – 2 балла.
- Получено правильное значение величины напряжения – 2 балла.

4.3. Информатика

Задача 4.3.1. Мишень (100 баллов)

Вы реализуете игру "дартс" в виртуальной реальности. Игра устроена следующим образом. Дана мишень в форме круга радиуса R, расположенная в плоскости XY с центром в координатах $(0, 0)$, разбитая на n равных секторов. Сектора пронумерованы от 1 до n по часовой стрелке. В момент броска мишень находится в таком положении, что сегмент с номером 1 расположен в верхней полуплоскости справа от оси Y. Мишень закручивается вокруг оси Z по часовой стрелке и приобретает постоянную угловую скорость w градусов в секунду.

Игрок, стоя лицом к мишени на расстоянии z, бросает дротик из координаты (x, y) в плоскости XY перпендикулярно мишени в её сторону. Дротик летит прямолинейно с постоянной скоростью v, не изменяя высоту полёта.

Требуется написать программу, которая определяет номер сектора, в который попадёт игрок.

Формат входных данных

Входные данные содержат целые числа R, w, x, y, z, v, n. Гарантируется, что участник не попал в границу между секторами.

Ограничения:

$1 \leqslant r, w, v, z \leqslant 100$ $-100 \leqslant x, y \leqslant 100$ $2 \leqslant n \leqslant 100$

Формат выходных данных

Выходные данные должны содержать единственное целое число – номер сектора, в который попал участник, или 0, если участник не попал в мишень.

Пример №1

Стандартный ввод
10 20 10 0 100 100 100

Стандартный вывод
20

Решение

Для того что проверить попадёт ли игрок в мишень достаточно проверить следующее условие: $R^2 \leqslant x^2 + y^2$.

Для вычисления времени полёта дротика до мишени используем формулу $t = z/v$. Используем формулу $Rotation = w \cdot t$ для того, чтобы узнать, на сколько градусов повернётся мишень во время полёта дротика.

Далее вычислим угол $StartAngle$ к оси координат OX радиус-вектора (x, y). Для удобства повернём $StartAngle$ на $-\pi/2$. $StartAngle = atan2(y, x) - \pi/2$.

Посчитаем конечный угол в радианах:

$$ResultAngle = StartAngle + Rotation/360 \cdot 2 \cdot \pi.$$

Преобразуем угол $ResultAngle$ так, чтобы он лежал в диапазоне от 0 до $2 \cdot \pi$.

Размер одного сектора $OneSector = 2 \cdot \pi/n$.

Тогда искомый индекс $n - \lfloor ResultAngel/OneSector \rfloor$.

Пример программы-решения

Ниже представлено решение на языке C++

```cpp
#define _CRT_SECURE_NO_WARNINGS
#define _USE_MATH_DEFINES

#pragma comment(linker, "/STACK:66777216")

#include <iostream>
#include <cstdio>
#include <cstdlib>
#include <vector>
#include <algorithm>
#include <cmath>
#include <stack>
#include <functional>
#include <set>
#include <queue>
#include <string>
```

```
#include <map>
#include <iomanip>
#include <sstream>
#include <cassert>

#define sqr(x) ((x)*(x))

using namespace std;

int main()
{
        freopen("input.txt", "r", stdin);
        freopen("output.txt", "w", stdout);

        int R, r, w, x, y, z, v, n;
        cin >> R >> w >> x >> y >> z >> v >> n;

        if (x * x + y * y > R * R)
        {
                cout << 0;
                return 0;
        }

        double t = double(z) / double(v);
        double start_angle = atan2(y, x) + 2 * M_PI - M_PI / 2;
        double total_rotation = (t * w) / 360 * 2 * M_PI + start_angle;
        double cur_sin = sin(total_rotation);
        double cur_cos = cos(total_rotation);
        double cur_angle = atan2(cur_sin, cur_cos);
        if (cur_angle < 0)
                cur_angle += 2 * M_PI;
        double one_sector = 2 * M_PI / n;
        int ind = cur_angle / one_sector;

        cout << n - ind;

}
```

Задача 4.3.2. Распознавание метки (100 баллов)

Приложение дополненной реальности пытается найти на изображении, полученном с камеры телефона, метку, представляющую собой ярко раскрашенный прямоугольник. Благодаря контрастному цвету прямоугольника на этапе предварительной обработки изображение удалось преобразовать в массив из W на H элементов, каждый из которых равен либо '#' (ASCII 35), если он принадлежит прямоугольнику, либо '.' (ASCII 46) в противном случае.

Алгоритм предварительной обработки неидеален, и мог совершить от 0 до N ошибок — выдать '#' вместо '.' или наоборот.

В первом примере теста ошибочным может быть левый верхний элемент элемент непосредственно справа от него, элемент непосредственно снизу от него. Все остальные варианты из нуля или одной ошибки не дают прямоугольника в результате исправления.

Напишите программу, которая по данному изображению подсчитывает количество различных возможных положений метки.

Формат входных данных

Первая строка входного файла содержит целые числа WHN. Следующие H строк содержат по W символов . и # каждая – изображение после предварительной обработки.

Ограничения:

$1 \leqslant W, H \leqslant 100$, $0 \leqslant N \leqslant W \times H$

Формат выходных данных

Выходной файл должен содержать единственное целое число — количество возможных расположений метки.

Система оценки

Решения работающие для $W, H \leqslant 20$ оцениваются из 50 баллов. Баллы выставляются за каждый успешно пройденный тест.

Пример №1

Стандартный ввод

`3 3 1`
`.#.`
`##.`
`...`

Стандартный вывод
`3`

Решение

Прямоугольник, подходящий для того, чтобы быть меткой, должен обладать следующим свойством: количество точек внутри этого прямоугольника + количество решёток вне этого прямоугольника не должно превосходить N.

Так как $W, H \leqslant 100$, можно перебрать все возможные прямоугольники и с помощью префиксных сумм ($. = 1$, $\# = 0$) *(100 баллов)* или двойного цикла *(50 баллов)*, посчитать количество точек внутри прямоугольника. Это количество обозначим P. Пусть рассматриваемый прямоугольник имеет координаты $x1, y1$ — левый верхний угол, $x2, y2$ — правый нижний угол. Тогда общее количество клеток, входящих в рассматриваемый прямоугольник, $S = (x2 - x1 + 1) \cdot (y2 - y1 + 1)$.

Общее количество решёток на изображении обозначим как C. Тогда количество решёток вне выбранного прямоугольника равно $K = C - (S - P)$. Следовательно, количество действий для исправления изображения равно $K + P$. Асимптотика решения с использованием префикс сумм $O(W^4)$, с использованием двойного цикла – $O(W^6)$.

Пример программы-решения

Ниже представлено решение на языке C++

```
#define _CRT_SECURE_NO_WARNINGS
#define _USE_MATH_DEFINES

#pragma comment(linker, "/STACK:66777216")

#include <iostream>
#include <cstdio>
#include <cstdlib>
#include <vector>
#include <algorithm>
#include <cmath>
#include <stack>
#include <functional>
#include <set>
#include <queue>
#include <string>
#include <map>
#include <iomanip>
#include <sstream>
#include <cassert>

#define sqr(x) ((x)*(x))

using namespace std;

int mp[101][101];
int pref_sum[101][101];

int calc_sum(int y1, int x1, int y2, int x2)
{
	int res = pref_sum[y2][x2];
	res += pref_sum[y1 - 1][x1 - 1];
	res -= pref_sum[y1 - 1][x2];
	res -= pref_sum[y2][x1 - 1];
	return res;
}

int main()
{
	freopen("input.txt", "r", stdin);
	freopen("output.txt", "w", stdout);
	int W, H, N;
	cin >> W >> H >> N;

	for (int i = 1; i <= H; i++)
	{
		int row_sum = 0;
		for (int j = 1; j <= W; j++)
		{
			char val;
			cin >> val;
			if (val == '#')
				mp[i][j] = 1;
			row_sum += mp[i][j];
			pref_sum[i][j] = row_sum;
			pref_sum[i][j] += pref_sum[i - 1][j];
		}
	}
```

```
        int ans = 0;

        for (int i = 1; i <= H; i++)
                for (int j = 1; j <= W; j++)
                        for (int ii = i; ii <= H; ii++)
                                for (int jj = j; jj <= W; jj++)
                                {
                                        int sum_center = calc_sum(i, j, ii, jj);
                                        int res = (ii - i + 1) * (jj - j + 1) -
                                                sum_center;
                                        int res_outside = calc_sum(1, 1, H, W) -
                                                sum_center;
                                        res += res_outside;
                                        if (res <= N)
                                                ans++;
                                }

        cout << ans;
}
```

Задача 4.3.3. Полоса препятствий (100 баллов)

Одно из заданий на соревнованиях по подводной робототехнике — полоса препятствий. Полоса состоит из n подряд идущих стен, высота i-й стены h_i.

Цель робота — преодолеть все стены, достать флаг, который находится в конце полосы за всеми стенами, и вернуться обратно. Стену можно преодолеть двумя способами: подняться, проплыть над ней и опуститься обратно или сделать подкоп. Если стена была преодолена с помощью подкопа, то в при проходе в обратную сторону можно воспользоваться уже готовым подкопом. Всего разрешается сделать не более m подкопов.

Робот имеет ограниченный заряд батареи. Изначально он способен подняться над стеной высотой k или меньше, далее после каждого подъёма максимальная высота стены, которую может преодолеть робот, снижается на 1.

Робот поддерживает две команды: D – идти через подкоп (если подкопа ещё нет, то робот выкапывает его), U – проплыть над препятствием.

Формат входных данных

Первая строка входного файла содержит целые числа nmk. Следующая строка содержат n целых чисел h_i - высоты стен.

Ограничения: $1 \leqslant n, m \leqslant 10^5$, $1 \leqslant k, h_i \leqslant 10^9$

Формат выходных данных

Выходной файл должен содержать строку NO, если задание выполнить невозможно. В противном случае – две строки: строку YES и строку из $2n$ символов U и D – последовательность команд робота, которая позволит ему преодолеть полосу препятствий и вернуться обратно. Первые n символов содержат описание прохождение от стены с номером 1 до стены с номером n, следующие n символов содержат описание прохождения от стены с номером n до стены с номером 1.

Система оценки

Баллы за каждую подзадачу начисляются только в случае, если все тесты этой подзадачи и необходимых подзадач успешно пройдены.

Подзадача	Баллы	Дополнительные ограничения	Необходимые подзадачи	Информация о проверке
1	40	$1 \leqslant n, m \leqslant 10^2$, $1 \leqslant k, h_i \leqslant 10^9$	-	полная
2	60	$1 \leqslant n, m \leqslant 10^5$, $1 \leqslant k, h_i \leqslant 10^9$	1	полная

Пример №1

Стандартный ввод
`10 5 10` `10 1 4 2 4 3 4 4 8 9`

Стандартный вывод
`YES` `DUDUDUUUDDDDUUUDUDUD`

Решение

1. Можно потратить все подкопы, если $n \leqslant m$, иначе можно сделать n подкопов и пройти маршрут только с помощью команд D. Далее всегда считаем, что $n \leqslant m$.
2. Если стена преодолевается с помощью подкопа, то подкоп лучше сделать при первом проходе стены. Это позволит сэкономить один дополнительный прыжок.
3. Исходя из пункта 2, каждую стену, через которую следует преодолеть с помощью подъёма, мы переплываем дважды.
4. Теперь мы знаем, что всего следует сделать $2 \cdot n - 2 \cdot m$ подъёмов и высота последнего подъёма $H = k - (2 \cdot n - 2 \cdot m) + 1$.
5. Не важно, сможет ли робот переплыть препятствие при первом проходе, так как при обратном проходе максимальная высота подъёма робота будет меньше.
6. Используя пункты 1-5. Для решения задачи нам достаточно пробежать по всем стенам слева направо и действовать следующим образом: если высота стены меньше или равна H, то эту стену мы переплываем и увеличиваем максимальную возможную высоту подъёма H на 1. В противном случае эту стену следует преодолеть подкопом. Если уже робот уже смог преодолеть $n - m$ стен, то все оставшиеся стены проходим подкопом. Далее можно легко восстановить ответ, зная, какие стены как преодолеваются подкопом. Асимптотика решения $O(n)$.

Пример программы-решения

Ниже представлено решение на языке C++

```cpp
#define _CRT_SECURE_NO_WARNINGS
#define _USE_MATH_DEFINES

#pragma comment(linker, "/STACK:66777216")

#include <iostream>
#include <cstdio>
#include <cstdlib>
#include <vector>
#include <algorithm>
#include <cmath>
#include <stack>
#include <functional>
#include <set>
#include <queue>
#include <string>
#include <map>
#include <iomanip>
#include <sstream>
#include <cassert>

#define sqr(x) ((x)*(x))

using namespace std;

int arr[1000000];
int mark[1000000];

int main()
{
        freopen("input.txt", "r", stdin);
        freopen("output.txt", "w", stdout);
        int n, m, k;
        cin >> n >> m >> k;
        int goal = k - n + m + 1;
        int val = k - 2 * n + 2 * m + 1;

        for (int i = 0; i < n; i++)
        {
                cin >> arr[i];
                if (arr[i] <= val && val <= k && val < goal)
                {
                        val++;
                }
                else
                {
                        mark[i] = 1;
                }
        }
        if (val >= goal)
        {
                cout << "YES" << endl;

                for (int i = 0; i < n; i++)
                        if (mark[i])
                                cout << "D";
                        else
                                cout << "U";

                for (int i = n - 1; i >= 0; i--)
```

```
                        if (mark[i])
                                cout << "D";
                        else
                                cout << "U";
        }
        else
                cout << "NO";
}
```