2. ВТОРОЙ ЭТАП

Задачи второго этапа

3.1. Задание 1

Задача 3.1.1. Орбитальная механика (6 баллов)

Спутник, выполняющий съёмку Земли, обращается по круговой низкой околоземной орбите с высотой $H = 500$ км. Разрешение получаемых снимков при этом $a = 1$ м. Так как значительную часть времени он находится вне зоны радиовидимости наземных антенн приёма данных, то для ускорения передачи снимков на Землю она ведётся через группировку геостационарных спутников. Высота геостационарной орбиты составляет $H_{\text{ГСО}} = 35794$ км при среднем радиусе Земли $R_{\text{зем}} = 6730$ км.

а) Сколько таких ретрансляторов P нужно, чтобы в каждый момент времени фотоспутник Ф был в зоне радиовидимости антенны спутника-ретранслятора Р? Считать, что передача данных возможна, если угол между прямой, соединяющей спутник Ф и ретранслятор, и прямой, соединяющей ретранслятор и центр Земли, составляет не более 5.73 градусов. Все спутники-ретрансляторы расположены в вершинах правильного многоугольника, вписанного в окружность геостационарной орбиты.

б) В какой-то момент заказчик снимков попросил снять небольшую площадь на Земле в точке П с разрешением $0.7 \cdot a$. Для этого спутник Ф переводится на эллиптическую орбиту с перигеем над точкой П. На сколько нужно затормозить спутник Ф для этого? Принять, что спутник тормозится включением на очень малое время реактивного двигателя, сопло, которого направлено вперёд.

в) Как и насколько изменится период обращения спутника Ф? Укажите ответ со знаком $+$, если период увеличился и со знаком -, если уменьшился.

Критерий оценки

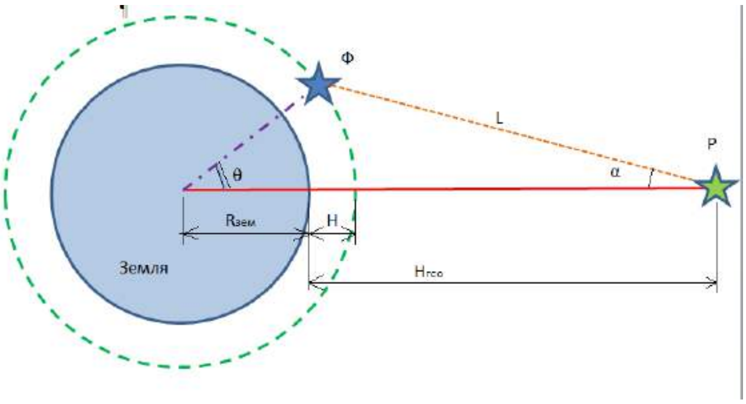
П. “А”: Точный ответ: 2 балла

П. “Б”, Точный ответ в м/с с округлением до целого: 2 балла

П. “В”, Точный ответ в секундах с округлением до 0.5 с: 2 балла

Решение

а) Нарисуем схему взаимного расположения спутников и Земли α



Тогда задача сводится к нахождению угла θ на основе известного угла $\alpha = 5.73°$. Из рисунка ясно, что каждый спутник-ретранслятор обслуживает часть орбиты фотоспутника с углом дуги 2θ. Запишем для данной схемы систему из двух уравнений и двух неизвестных: угла θ и отрезка L. Для второго уравнения используем теорему синусов.

$$\begin{cases} (H_{\text{ГСО}} + R_{\text{зем}}) = (H + R_{\text{зем}}) \cdot cos\theta + L \cdot cos\alpha \\ \frac{L}{sin\theta} = \frac{H+R_{\text{зем}}}{sin\alpha} \end{cases}$$

Избавимся от неизвестной дальности L:

$$L = \frac{H + R_{\text{зем}}}{sin\alpha} \cdot sin\theta$$

Тогда в первом уравнении останется неизвестным только искомый угол θ:

$$(H_{\text{ГСО}} + R_{\text{зем}}) = (H + R_{\text{зем}}) \cdot cos\theta + \frac{H + R_{\text{зем}}}{sin\alpha} \cdot sin\theta \cdot cos\alpha$$

Упростим:

$$(H_{\text{ГСО}} + R_{\text{зем}}) = (H + R_{\text{зем}}) \cdot cos\theta + \frac{1}{tg\alpha} \cdot (H + R_{\text{зем}}) \cdot sin\theta$$

Сведём уравнение к одной переменной $tg\theta$ при помощи подсказок из Указания:

$$(H_{\text{ГСО}} + R_{\text{зем}}) = (H + R_{\text{зем}}) \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2\theta}} + \frac{1}{tg\alpha} \cdot (H + R_{\text{зем}}) \cdot \frac{tg\theta}{\sqrt{1 + tg^2\theta}}$$

Сделаем замену переменной $x = tg\theta$.
Также обозначим для упрощения $\frac{(H_{\text{ГСО}}+R_{\text{зем}})}{(H+R_{\text{зем}})} = A$
Тогда:

$$A = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} + \frac{1}{tg\alpha} \cdot \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$$

Преобразуем:

$$A \cdot \sqrt{1 + x^2} = 1 + \frac{1}{tg\alpha} \cdot x$$

Возведём в квадрат:

$$A^2 \cdot (1 + x^2) = 1 + 2 \cdot \frac{1}{tg\alpha} \cdot x + \left(\frac{1}{tg\alpha}\right)^2 \cdot x^2$$

Пришли к квадратному уравнению:

$$\left(\left(\frac{1}{tg\alpha}\right)^2 - A^2\right) \cdot x^2 + 2 \cdot \frac{1}{tg\alpha} \cdot x + (1 - A^2) = 0$$

Его решение, очевидно, должно быть положительным, так как угол $\theta > 0$. Тогда в формуле для корней выбираем знак «+»:

$$x = \frac{-2 \cdot \frac{1}{tg\alpha} + \sqrt{\left(\frac{2}{tg\alpha}\right)^2 - 4 \cdot \left(\left(\frac{1}{tg\alpha}\right)^2 - A^2\right) \cdot (1 - A^2)}}{2 \cdot \left(\left(\frac{1}{tg\alpha}\right)^2 - A^2\right)}$$

Подставляем числа:

$$tg\alpha \approx \alpha = \frac{5.73}{57.3} = 0.1$$

$$A = \frac{(H_{\text{ГСО}} + R_{\text{зем}})}{(H + R_{\text{зем}})} = \frac{35794 + 6370}{500 + 6370} = 6.137409$$

И находим $x = tg\theta$

$$x = \frac{-2 \cdot 10 + \sqrt{20^2 - 4 \cdot (10^2 - 37.66779) \cdot (1 - 37.66779)}}{2 \cdot (10^2 - 37.66779)} =$$

$$= \frac{-2 \cdot 10 + \sqrt{20^2 - 4 \cdot (10^2 - 37.66779) \cdot (1 - 37.66779)}}{2 \cdot (10^2 - 37.66779)} =$$

$$= \frac{-2 \cdot 10 + \sqrt{400 + 4 \cdot 62.33221 \cdot 36.66779}}{2 \cdot 62.33221} = \frac{-2 \cdot 10 + \sqrt{9542.33754}}{124.66442} =$$

$$= \frac{-2 \cdot 10 + 97.6849}{124.66442} = \frac{77.6849}{124.66442} = 0.62315$$

Определим угол θ:

$$\theta = arctgx = arctg(0.62315) = 31.929 \text{ градусов}$$

Фотоспутник будет видеть один и тот же ретранслятор на протяжении дуги своей орбиты в 2θ. Тогда количество необходимых ретрансляторов можно определить как:

$$N_{\text{ретр}} = \frac{360°}{2 \cdot \theta} = \frac{360°}{2 \cdot arctgx} = \frac{360°}{2 \cdot 31.929} = 5.64$$

Очевидно, что число спутников не может быть дробным. Значит, ретрансляторы будут работать с небольшим перекрытием зон радиовидимости, а их нужно 6 штук.

б) Так как по условию, разрешение снимка для точки π должно быть $0.7 \cdot a$, то и высота орбиты в перигее должна быть $0.7 \cdot H$. Тогда с учётом второго закона Кеплера и закона сохранения момента импульса:

$$(V_{\text{орб}} - \Delta V) \cdot (R_{\text{зем}} + H) = V_{\text{перигей}} \cdot (R_{\text{зем}} + 0.7 \cdot H)$$

где $V_{\text{орб}}$ – скорость спутника на первоначальной круговой орбите с высотой

С другой стороны, по закону сохранения энергии,

$$\frac{m\cdot(V_{\text{орб}}-\Delta V)^2}{2}-\frac{G\cdot M_{\text{зем}}\cdot m}{R_{\text{зем}}+H}=\frac{m\cdot(V_{\text{перигей}})^2}{2}-\frac{G\cdot M_{\text{зем}}\cdot m}{R_{\text{зем}}+0.7\cdot H}$$

Тогда

$$\frac{(V_{\text{орб}}-\Delta V)^2}{2}-\frac{G\cdot M_{\text{зем}}}{R_{\text{зем}}+H}=\frac{\left((V_{\text{орб}}-\Delta V)\cdot\frac{(R_{\text{зем}}+H)}{(R_{\text{зем}}+0.7\cdot H)}\right)^2}{2}-\frac{G\cdot M_{\text{зем}}}{R_{\text{зем}}+0.7\cdot H}$$

После преобразования и домножения на 2:

$$-(V_{\text{орб}}-\Delta V)^2+\left((V_{\text{орб}}-\Delta V)\cdot\frac{(R_{\text{зем}}+H)}{(R_{\text{зем}}+0.7\cdot H)}\right)^2=$$

$$=2\cdot G\cdot M_{\text{зем}}\cdot\left(\frac{1}{R_{\text{зем}}+0.7\cdot H}-\frac{1}{R_{\text{зем}}+H}\right)$$

$$(V_{\text{орб}}-\Delta V)^2\cdot\left(\frac{(R_{\text{зем}}+H)^2}{(R_{\text{зем}}+0.7\cdot H)^2}-1\right)=$$

$$=2\cdot G\cdot M_{\text{зем}}\cdot\left(\frac{1}{R_{\text{зем}}+0.7\cdot H}-\frac{1}{R_{\text{зем}}+H}\right)$$

Приведём дробь справа к общему знаменателю:

$$(V_{\text{орб}}-\Delta V)^2\cdot\left(\frac{(R_{\text{зем}}+H)^2}{(R_{\text{зем}}+0.7\cdot H)^2}-1\right)=$$

$$=2\cdot G\cdot M_{\text{зем}}\cdot\left(\frac{R_{\text{зем}}+H-R_{\text{зем}}-0.7\cdot H}{(R_{\text{зем}}+0.7\cdot H)\cdot(R_{\text{зем}}+H)}\right)$$

$$(V_{\text{орб}}-\Delta V)^2\cdot\left(\frac{(R_{\text{зем}}+H)^2-(R_{\text{зем}}+0.7\cdot H)^2}{(R_{\text{зем}}+0.7\cdot H)^2}\right)=$$

$$=2\cdot G\cdot M_{\text{зем}}\cdot\left(\frac{0.3\cdot H}{(R_{\text{зем}}+0.7\cdot H)\cdot(R_{\text{зем}}+H)}\right)$$

Раскроем разность квадратов слева в числителе:

$$(V_{\text{орб}}-\Delta V)^2\cdot\left(\frac{2\cdot R_{\text{зем}}\cdot H+H^2-2\cdot 0.7\cdot R_{\text{зем}}\cdot H-0.49\cdot H^2}{(R_{\text{зем}}+0.7\cdot H)^2}\right)=$$

$$=2\cdot G\cdot M_{\text{зем}}\cdot\left(\frac{0.3\cdot H}{(R_{\text{зем}}+0.7\cdot H)\cdot(R_{\text{зем}}+H)}\right)$$

$$(V_{\text{орб}}-\Delta V)^2\cdot\left(\frac{0.6\cdot R_{\text{зем}}\cdot H+0.51\cdot H^2}{(R_{\text{зем}}+0.7\cdot H)}\right)=2\cdot G\cdot M_{\text{зем}}\cdot\left(\frac{0.3\cdot H}{(R_{\text{зем}}+H)}\right)$$

$$(V_{\text{орб}}-\Delta V)^2\cdot\left(\frac{0.6\cdot R_{\text{зем}}+0.51\cdot H}{(R_{\text{зем}}+0.7\cdot H}\right)=2\cdot G\cdot M_{\text{зем}}\cdot\left(\frac{0.3}{(R_{\text{зем}}+H)}\right)$$

Тогда для скорости спутника сразу после выдачи тормозного импульса

$$V_{\text{орб}}-\Delta V=\sqrt{\frac{2\cdot G\cdot M_{\text{зем}}\cdot\left(\frac{0.3}{(R_{\text{зем}}+H)}\right)}{\frac{0.6\cdot R_{\text{зем}}+0.51\cdot H}{R_{\text{зем}}+0.7\cdot H)}}}$$

Итак,

$$\Delta V = V_{\text{орб}} - \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M_{\text{зем}} \cdot \left(\frac{0.3}{(R_{\text{зем}}+H)}\right)}{\frac{0.6 \cdot R_{\text{зем}}+0.51 \cdot H}{(R_{\text{зем}}+0.7 \cdot H)}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{G \cdot M_{\text{зем}}}{R_{\text{зем}} + H}} - \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M_{\text{зем}} \cdot \left(\frac{0.3}{(R_{\text{зем}}+H)}\right)}{\frac{0.6 \cdot R_{\text{зем}}+0.51 \cdot H}{(R_{\text{зем}}+0.7 \cdot H)}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 5.97 \cdot 10^{24}}{1000 \cdot (6370 + 500)}} - \sqrt{\frac{\frac{2 \cdot 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 5.97 \cdot 10^{24}}{1000} \cdot \left(\frac{0.3}{6370+500}\right)}{\frac{0.6 \cdot 6370+0.51 \cdot 500}{6370+350}}}$$

$$= 7613.28 - \sqrt{\frac{\frac{2 \cdot 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 5.97 \cdot 10^{2}4}{10^3} \cdot 4.3668 \cdot 10^{-5}}{0.606696}}$$

$$= 7613.28 - \sqrt{\frac{2 \cdot 6.67 \cdot 5.97 \cdot 10^5 \cdot 4.3668}{0.606696}} = 7613.28 - 7571.14 = 42.14 \text{ м/с}$$

в) Для старой, круговой орбиты, большая полуось эллипса равна $R_{\text{зем}} + H$. Для новой, эллиптической орбиты, большая полуось эллипса будет:

$$0.5 \cdot (2 \cdot R_{\text{зем}} + H + 0.7 \cdot H) = R_{\text{зем}} + 0.85 \cdot H$$

Тогда по третьему закону Кеплера:

$$\frac{T_{\text{нов}}}{T_{\text{круг}}} = \left(\frac{R_{\text{зем}} + 0.85 \cdot H}{R_{\text{зем}} + H}\right)^{1.5}$$

Отсюда:

$$T_{\text{нов}} = T_{\text{круг}} \left(\frac{R_{\text{зем}} + 0.85 \cdot H}{R_{\text{зем}} + H}\right)^{1.5} = 2\pi \frac{(R_{\text{зем}} + H)^{1.5}}{\sqrt{G \cdot M_{\text{зем}}}} \left(\frac{R_{\text{зем}} + 0.85 \cdot H}{R_{\text{зем}} + H}\right)^{1.5}$$

Тогда разность периодов обращения:

$$T_{\text{нов}} - T_{\text{круг}} = 2\pi \frac{(R_{\text{зем}} + H)^{1.5}}{\sqrt{G \cdot M_{\text{зем}}}} \left(\left(\frac{R_{\text{зем}} + 0.85 \cdot H}{R_{\text{зем}} + H}\right)^{1.5} - 1\right) =$$

$$= 5667 \cdot \left(\left(\frac{6795}{6870}\right)^{1.5} - 1\right) = -92.54 \text{ с}$$

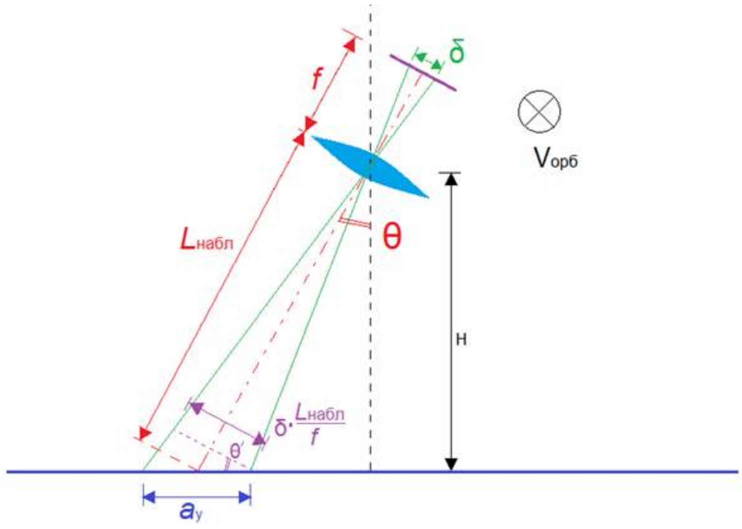
Ответ: а) 6; б) 42.14; в) 92.54.

3.2. Задание 2

Задача 3.2.1. Оптика (13 баллов)

Спутник вращается по круговой орбите высотой $H = 500$ км. Съёмка Земли выполняется с помощью оптико-электронной. Фотоприёмник представляет собой матрицу размером 4000×1200 пикселей, широкая сторона матрицы расположена поперёк направления полёта. Размер пикселя матрицы составляет $\delta = 10$ мкм.

1. Каким должно быть фокусное расстояние объектива, чтобы при съёмке с креном (отклонением оси объектива от вертикали) до $\theta = 30^\circ$ разрешение снимков было не хуже 5 метров. Принять, что разрешение снимка определяется как наибольший размер проекции пикселя, соответствующего центру поля зрения. В случае, если размеры сторон проекции пикселя для одного и того же направления отличаются, рассмотреть их среднее.



Поперечный разрез, спутник летит ОТ наблюдателя рисунка. Так как размер пикселя $\delta << f$ (фокусное расстояние), то выполняется примерное равенство углов $\theta' = \theta$.

2. Для обеспечения съёмки цветных изображений на фотоприёмную матрицу наклеили синий, зелёный и красный светофильтры. Каждый из них покрывает область матрицы с размером 4000×400 пикселей. Центральные длины волн этих цветовых диапазонов 490; 560; 660 нм соответственно, ширина диапазонов 80 нм для каждого (то есть диапазоны длин волн 450...530 нм, 520...600 нм, 620...700 нм). Какой должна быть светосила объектива, чтобы при съёмке в надир местности с коэффициентом отражения $r = 0.3$ в каждом из трёх цветовых диапазонов изображение не было недоэкспонированным. Недоэкспонированным является снимок, где в пикселе сигнал составляет менее $N = 10000$ электронов. Светимость поверхности $E_{\text{пов}}$ [Вт/м2] и поток, падающий на фотоприёмник $E_{\text{фок}}$ [Вт/м2], связаны соотношением

$$E_{\text{фок}} = 0.25 \cdot (D/f)2 \cdot E_{\text{пов}} \cdot K_{\text{опт}} \cdot K_{\text{атм}}$$

Принять, что средняя спектральная облучённость поверхности Земли в месте съёмки составляет $e_{\text{зем}} = 1$ Вт/(м^2·нм).

В среднем на 10 фотонов, попавших на пиксель фотоприёмника, приходится 4 сгенерированных электрона в пикселе. Коэффициент пропускания объектива $K_{\text{опт}} = 0.8$, коэффициент пропускания атмосферы $K_{\text{атм}} = 0.7$.

3. Функцию передачи контраста камеры на больших пространственных частотах можно оценить как:

$$CTF_{\text{системы}}(v) = \frac{4}{\pi} \cdot MTF_{\text{системы}}(v) = \frac{4}{\pi} \cdot MTF_{\text{фотоприемника}}(v) \cdot MTF_{\text{объектива}}(v) =$$

$$= \frac{4}{\pi} \cdot \frac{sin(\pi \cdot v \cdot \delta)}{\pi \cdot v \cdot \delta} \cdot \left(1 - \frac{v}{v_{\text{гр}}}\right)$$

Где граничная пространственная частота объектива на длине волны λ определяется как:

$$v_{\text{гр}} = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{D}{f}$$

Каким будет контраст изображения группы гаражей, стоящих параллельно на земле с альбедо 0.1? Крыши гаражей покрыты крашеными стальными листами с альбедо 0.5. Рассматривается снимок в красном диапазоне (длина волны - 660 нм). Ширина гаражей равна расстоянию между ними и составляет $a = 3.8$ метра. Съёмка ведётся в надир с высоты $H = 500$ км.

Начальные данные

Постоянная планка, h, Дж · с: $6.63 \cdot 10^{-34}$

Скорость света, c, м/с: $3 \cdot 10^{8}$

Время выдержки, мс: 0.53

Критерий оценки

П. 1: Точный ответ, с округлением до сотых в метрах: 2 балла

П. 2: Точный ответ с округлением до тысячных: 5 баллов

П. 3: Точный ответ с округлением до сотых: 6 баллов

Решение

1. Так как высота орбиты $H << R_{\text{зем}}$, а угол 30 градусов достаточно мал, то поверхность Земли можно считать плоской.

   Очевидно, что в случае съёмки с креном квадратному пикселю матрицы соответствует его трапециевидная проекция на поверхность Земли. Пусть X – направление вдоль полёта, а Y – поперёк полёта.

   Тогда для центра поля зрения размеры трапеции (средняя линия a_x и высота a_y) определяются через дальность наблюдения $L_{\text{набл}}$ как:

$$a_x = \frac{L_{\text{набл}}}{f} \cdot \delta$$

$$a_y = \frac{L_{\text{набл}}}{f} \cdot \delta \cdot \frac{1}{cos\theta}$$

   Тогда

$$a_y = \frac{L_{\text{набл}}}{f} \cdot \delta \cdot \frac{1}{cos\theta'} \sim \frac{L_{\text{набл}}}{f} \cdot \delta \cdot \frac{1}{\cos\theta} = \frac{H}{f} \cdot \delta \cdot \frac{1}{(cos\theta)^2}$$

   Интерес представляет a_y , так как она больше a_x:

$$a_y = \frac{L_{\text{набл}}}{f} \cdot \delta \cdot \frac{1}{cos\theta} = \frac{H}{f} \cdot \delta \cdot \frac{1}{(cos\theta)^2}$$

Тогда искомое фокусное расстояние:

$$f = \frac{H}{a_y} \cdot \delta \cdot \frac{1}{(cos\theta)^2} = \frac{500 \cdot 10^3}{5} \cdot 10 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{4}{3} = 1.33\text{ м}$$

2. Для спектрального диапазона с центральной длиной волны λ и шириной $\Delta\lambda$ число упавших на пиксель фотонов будет

$$N_{\text{фот}} = \frac{N}{0.4}$$

Тогда общая энергия, облучившая пиксель фотоприёмника за время накопления сигнала:

$$W = N_{\text{фот}} \cdot \frac{h \cdot c}{\lambda} = \frac{N}{0.4} \cdot \frac{h \cdot c}{\lambda}$$

С учётом связи светимости поверхности Земли и облучённости фокальной плоскости имеем при времени накопления T:

$$W = E_{\text{фок}} \cdot \delta^2 \cdot T = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{D}{f}\right)^2 \cdot (r \cdot e_{\text{зем}} \cdot \Delta\lambda) \cdot K_{\text{опт}} \cdot K_{\text{атм}} \cdot \delta^2 \cdot T$$

Тогда:

$$\frac{N}{0.4} \cdot \frac{h \cdot c}{\lambda} = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{D}{f}\right)^2 \cdot (r \cdot e_{\text{зем}} \cdot \Delta\lambda) \cdot K_{\text{опт}} \cdot K_{\text{атм}} \cdot \delta^2 \cdot T$$

Отсюда можно выразить искомую минимальную светосилу для всех трёх спектральных диапазонов с учётом полученного в п.2 времени накопления T:

$$\left(\frac{D}{f}\right)^2 = 10 \cdot N \cdot \frac{h \cdot c}{\lambda} \cdot \frac{1}{r \cdot e_{\text{зем}} \cdot \Delta\lambda \cdot K_{\text{опт}} \cdot K_{\text{атм}} \cdot \delta^2 \cdot T} =$$

$$= 10 \cdot 10^4 \cdot \frac{6.63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{\lambda} \cdot \frac{1}{0.3 \cdot 1 \cdot 80 \cdot 0.8 \cdot 0.7 \cdot 10^{-10} \cdot 5.31 \cdot 10^{-4}} =$$

$$= 10 \cdot 10^4 \cdot \frac{6.63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{\lambda} \cdot \frac{1}{0.3 \cdot 1 \cdot 80 \cdot 0.8 \cdot 0.7 \cdot 10^{-10} \cdot 5.31 \cdot 10^{-4}} =$$

$$= \frac{2.787 \cdot 10^{-8}}{\lambda} \;|_{\lambda=490\cdot 10^{-9};560\cdot 10^{-9};660\cdot 10^{-9}} = 0.0568;\ 0.0498;\ 0.0422$$

Так как речь идёт о минимальном сигнале, то нужно ориентироваться на наибольшее требуемое значение светосилы среди всех трёх спектральных каналов.

3. Контраст сцены составляет

$$k_{\text{сцены}} = \frac{\rho_{\text{крыши}} - \rho_{\text{земли}}}{\rho_{\text{крыши}} + \rho_{\text{земли}}} = \frac{0.5 - 0.1}{0.5 + 0.1} = \frac{2}{3}$$

Ширина изображения одного гаража составляет:

$$d = \frac{f}{H} \cdot a$$

Пространственная частота изображения группы гаражей может быть найдена как:

$$v = \frac{1}{2 \cdot d} = \frac{1}{2 \cdot \frac{f}{H} \cdot a} = \frac{1}{2 \cdot \frac{1.333}{500 \cdot 10^3} \cdot 3.8} = 49354\text{ (пар линий)/м}$$

Граничная пространственная частота на центральной длине волны красного канала объектива с учётом найденной ранее светосилы:

$$v_{\text{гр}} = \frac{1}{\lambda} \cdot \left(\frac{D}{f}\right) = \frac{1}{660 \cdot 10^{-9}} \cdot \sqrt{0.0568} = 361102 \text{ (пар линий)/м}$$

Тогда контраст изображения примет вид:

$$k_{\text{изобр}} = CTF_{\text{системы}}(v) \cdot k_{\text{сцены}} = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{sin(\pi \cdot v \cdot \delta)}{\pi \cdot v \cdot \delta} \cdot \left(1 - \left(\frac{v}{v_{\text{гр}}}\right)\right) \cdot k_{\text{сцены}} =$$

$$= \frac{4}{3.14} \cdot \frac{sin(3.14 \cdot 49354 \cdot 10^{-5})}{3.14 \cdot 49354 \cdot 10^{-5}} \cdot \left(1 - \left(\frac{49354}{361102}\right)\right) \cdot \frac{2}{3} =$$

$$= \frac{4}{3.14} \cdot 0.6451 \cdot 0.8633 \cdot \frac{2}{3} = 0.47$$

Ответ: 1. 1.33; 2. 0.0568; 3. 0.47

3.3. Задание 3

Задача 3.3.1. Управление полезной нагрузкой (9 баллов)

Студенческий спутник ДЗЗ размещен на орбите, заданной следующими кеплеровыми элементами:

- большая полуось: 6838.5 км,
- наклонение: 97.2675 градусов,
- аргумент перицентра: 121.0227 градусов
- эксцентриситет: 0.0010868
- долгота восходящего узла: 42.0376 градусов
- средняя аномалия: 301.0 градусов

Аппарат начинает движение по Орбите 12 декабря 2018 года в 21:00 UTC. Программа полета ориентирует спутник всегда в надир.

Необходимо ввести программу управления полезной нагрузкой согласно предоставленному шаблону так, чтобы в течении первых суток снять следующие точки:

1. Самара (Самарская область, Россия) (GPS - координаты: 53.1774, 50.1165)
2. Петергоф (Ленинградская область, Россия) (GPS - координаты: 59.8783, 29.9000)
3. Топика (Канзас, США) (GPS - координаты: 39.0256, -95.6834)

Запаса энергии аппарата хватает на 60 секунд работы камеры. Периоды работы камеры в разное время суммируются.

Съемка считается произведенной, если аппарат находился над точкой, удаленной не более, чем на 5 км от заданной, и камера была включена.

Радиус Земли, м: 6371008.8

Гравитационный параметр,$\mu = G \cdot M$, м^3/с^2: $3.986004418 \cdot 10^{14}$

Средняя скорость вращения Земли, об/сут: 1.00273781191135448

Начальный угол вращения Земли: 36.51°

Начальные данные

Постоянная планка, h, Дж · с: $6.63 \cdot 10^{-34}$

Скорость света, с, м/с: $3 \cdot 108$

Время выдержки, мс: 0.53

Наименование девайса	**Номер девайса “i”**	**Имя девайса “name”**	**Функции девайса**		
			Номер функции девайса	**Методы функции**	**Состояние функции в начальный момент**
Камера	0	camera	0	enable() disable() enabled()	disabled
Навигатор	1	navigator	0	location() enable() disable() enabled()	enabled

Критерий оценки

- Аппарат не менее 1 раза находился на расстоянии, не более чем на 5 км удаленном от одной из точек съемки, и камера была включена - 2 балла
- Аппарат не менее 1 раза находился на расстоянии, не более чем на 15 км удаленном от одной из точек, и камера была включена - 1 балл

При выполнении нескольких условий баллы суммируются.

Решение

В задаче дан шаблон:

```python
#определение камеры
camera = spacecraft.device("camera").function(0)
#определение навигатора
navigator = spacecraft.device("navigator").function(0)


def on_target(flight_time, coords):
    #TODO: Your code here
    return False


def loop():
    #счетчик времени миссии
    flight_time = runtime.flight_time()
```

```

        #использование метода location устройства "Навигатор"
        #для определения текущих координат
        location = navigator.location()
        #текущие координаты
        coords = (location[0], location[1])

        #условие включения камеры
        if on_target(flight_time, coords):
            if not camera.enabled():
                camera.enable()
        else:
            if camera.enabled():
                camera.disable()
```

Сделаем небольшой предварительный расчёт. Допустимая погрешность съёмки составляет 30 км. Это соответствует углу:

$$\alpha = \frac{180^\circ \cdot L}{2\pi \cdot R_{\text{зем}}}$$

Вычисляя, получаем: $\alpha = 0.27^\circ$

Подключим библиотеку math, дописав первой строкой: import math

Теперь можем дописать функцию def on_target следующим образом:

```
def on_target(flight_time, coords):
    #TODO: Your code here
    if (math.fabs(coords[0] - 53.1774) < 0.27 and
        math.fabs(coords[1] - 50.1165) < 0.27):
        return True
    if (math.fabs(coords[0] - 59.8783) < 0.27 and
        math.fabs(coords[1] - 29.9000) < 0.27):
        return True
    if (math.fabs(coords[0] - 39.0256) < 0.27 and
        math.fabs(coords[1] + 95.6834) < 0.27):
        return True
    return False
```

3.4. Задание 4

Задача 3.4.1. Расчет орбиты (30 баллов)

Наноспутник формата 3U массой 2,96 кг может быть размещен на произвольной орбите 1 апреля 2019 года в 21:00 (МСК). Задайте параметры орбиты через кеплеровы элементы так, чтобы 2-го, 3-го и 4-го апреля в 9:00 каждого дня аппарат прошел над Олимпийским парком Сочи.

Координатами Олимпийского парка считать GPS - координаты: 43.405398, 39.954817

При расчет орбиты учитывать, что орбита не подвержена прецессии, а влияние атмосферы на движение КА отсутствует.

Начальные данные

Радиус Земли, м: 6371008.8

Гравитационный параметр, $\mu = G \cdot M$, м^3/с^2: $3.986004418 \cdot 10^{14}$

Средняя скорость вращения Земли, об/сут: 1.00273781191135448

Начальный угол вращения Земли: 99.81°

Критерий оценки

- Аппарат в любой из дней проходит с отклонением до 100 км от цели и до 60 мин от нужного времени - 2 балла;
- Аппарат в любой из дней проходит с отклонением до 100 км от цели и до 15 мин от нужного времени - 3 балла;
- Аппарат в любой из дней проходит с отклонением до 25 км от цели и до 60 мин от нужного времени - 2 балла;
- Аппарат в любой из дней проходит с отклонением до 25 км от цели и до 15 мин от нужного времени - 3 балла;

При выполнении нескольких условий баллы суммируются.

Решение

Сразу определимся с типом нашей орбиты: мы можем выбрать круговую полярную орбиту, так как в условии сказано, что орбита не подвержена прецессии. Это значительно упрощает задачу.

Наклонение полярной орбиты составляет 90 градусов, а эксцентриситет окружности равен нулю. Так как орбита круговая, мы можем задать аргумент перицентра, также равный нулю, чтобы перицентр оказался на экваторе.

$i = 90°$

$e = 0$

$\omega = 0$

Для простоты мы взяли за плоскость отсчёта плоскость экватора Земли, но элементы орбит считаются в небесной системе координат. И, если совмещением плоскости отсчёта с плоскостью экватора мы добились того, что оси Z небесной и земной систем отсчёта совпадают, то всё равно остаётся вращение Земли вокруг своей оси, а значит, оси X и Y вращаются относительно небесной системы отсчёта.

Ось X в земной системе отсчёта лежит в плоскости нулевого меридиана, а в условии указан начальный угол вращения, равный 99.81° - это есть угол между направлениями на нулевой меридиан Земли и на точку весеннего равноденствия, и это понадобится нам для вычисления долготы восходящего узла.

Долгота Олимпийского парка, по сути, и есть долготой восходящего узла в земной системе отсчёта, нам осталось учесть начальный угол вращения Земли и её скорость вращения.

Аппарат начинает своё движение 1 апреля в 21:00, а над Олимпийским парком должен пролететь 2 апреля в 9:00, то есть, пройдёт 12 часов. Переведём скорость вращения Земли из оборотов в сутки в градусы в сутки. 12 часов - это половина суток, значит угол вращения Земли в 9:00 2 апреля будет составлять:

$$\alpha = 99.81^\circ + \frac{1.00273781191135448 \cdot 360^\circ}{2} = 280.3028061440438064^\circ$$

Тогда долгота восходящего узла аппарата будет равна сумме угла вращения Земли 2 апреля в 9:00 и долготы Олимпийского парка:

$$\Omega = \alpha + 39.954817^\circ = 320.2576231440438064^\circ$$

Если долгота восходящего узла превысила бы по модулю 360 градусов, то следовало бы отнять или прибавить 360 градусов от полученного числа.

Давайте теперь определимся с большой полуосью орбиты. Её можно вычислить через период по известной из небесной механики формуле:

$$a = \sqrt[3]{\mu \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2}$$

Из-за того, что прецессии орбит нет, мы можем утверждать, что каждые звёздные сутки аппарат будет пролетать через одну и ту же точку. Поэтому мы можем выбрать период вращения аппарата по орбите таким образом, чтобы в звёздные сутки укладывалось целое число периодов, например, 15. Известно, что в звёздных сутках 86164 секунды, тогда:

$$T = \frac{86164\ \text{с}}{15} = 5744.2(6)\ \text{с}$$

Считаем большую полуось:

$$a = \sqrt[3]{3.9860044181014 \left(\frac{5744.2(6)}{2\pi}\right)^2} = 6932.3808\ \text{км}$$

Осталось найти среднюю аномалию. Как вы помните, средняя аномалия отсчитывается от экватора, и наш спутник должен начать своё движение в такой точке, чтобы 12 часов оказаться на широте Олимпийского парка. Сначала найдём количество витков, которое совершит аппарат за 12 часов, не забываем перевести часы в секунды:

$$N = \frac{12 \cdot 60 \cdot 60}{T} = 7.520542221809572443247760085418 5$$

За каждый виток аппарат совершит один оборот в 360 градусов, поэтому будем учитывать только дробную часть, чтобы найти угол, на который сместится аппарат за 12 часов - от своей начальной точки до целевой:

$$\phi = 360^\circ \cdot 0.5205422218095724432477600854185 = 187.3951999514460795691936307506 6^\circ$$

Итак, чтобы оказаться в нужной точке через 12 часов, необходимо вычесть из широты Олимпийского парка тот угол, на который сместится аппарат на своей орбите через эти 12 часов:

$$M_0 = 43.405398^\circ - 187.39519985144607956919363075066^\circ = -143.989802^\circ$$

Средняя аномалия орбиты в итоге: $M_0 = 216.01°$

Ответ: $e = 0$, $i = 90°$, $\omega = 0°$, $\Omega = 320.2576°$, $= 6932.3808$ км, $M_0 = 216.01°$.

3.5. Задание 5

Задача 3.5.1. Программа полета (42 баллов)

Миссией космического аппарата является съемка г. Москвы и г. Красноярска. При этом съемка каждого города должна происходить в период времени с 9:45 по 12:45 по местному времени. На орбите аппарат оказывается 12 апреля 2019 года в 00:00:00 по UTC.

Координатами центра г. Москвы считать: 55.753960, 37.620393

Координатами центра г. Красноярска считать: 56.010569, 92.852545

Программа полета всегда ориентирует спутник в надир. Запаса энергии аппарата хватает на 180 секунд работы камеры в течении первых трех суток полета. Периоды работы камеры в разное время суммируются.

Съемка считается произведенной, если аппарат находился над точкой, удаленной не более, чем на 50 км от центра города, и камера была включена.

Для решения задачи требуется:

1. Определить и задать параметры орбиты, удовлетворяющей условиям съемки
2. Задать программу управления полезной нагрузкой так, чтобы съемка производилась успешно в течение первых трех суток полета

Начальные данные

Радиус Земли, м: 6371008.8

Гравитационный параметр, $\mu = G \cdot M$, м^3/с^2: $3.986004418 \cdot 10^{14}$

Средняя скорость вращения Земли, об/сут: 1.00273781191135448

Начальный угол вращения Земли: 199.91°

Наименование девайса	Номер девайса “i”	Имя девайса “name”	Функции девайса		
			Номер функции девайса	Методы функции	Состояние функции в начальный момент
Камера	0	camera	0	enable() disable() enabled()	disabled
Навигатор	1	navigator	0	location() enable() disable() enabled()	enabled

В этой миссии на навигатор наложено ограничение: максимальная высота его работы - 3000 км над поверхностью Земли. При расчет орбиты учитывать, что орбита не подвержена прецессии, а влияние атмосферы на движение КА отсутствует.

Критерий оценки

- Аппарат не менее 1 раза в сутки смог провести съемку одного из городов в указанный период времени с отклонением от указанных координат центра не более чем на 25 км: 4 балла
- Аппарат не менее 1 раза смог провести съемку одного из городов в указанный период времени с отклонением от указанных координат не более чем на 50 км: 3 балла

Решение

В отличие от предыдущей задачи здесь необходимо провести съемку уже двух городов. Обратите внимание, что широта двух городов близка по значению. Поэтому, чтобы успешно выполнить миссию, необходимо подобрать орбиту так, чтобы между первым и вторым городом при проходе спутника укладывалось целое число витков.

Для простоты также определимся, что будем работать с полярной круговой орбитой, а следовательно:

$i = 90°$

$e = 0$

$\omega = 0$

Первой точкой съёмки будем рассматривать г. Красноярск, т. к. он лежит немного севернее г. Москвы.

Долгота восходящего узла определяется также как и в предыдущей задаче:

$$\alpha = 199.91° + \frac{1.00273781191135448 \cdot 360°}{24/t} = 260.0742687°$$

$$\omega = \alpha + 92.852545 = 352.9268137°$$

где $t = 4$ часам, т. к. спутник начинает движение в 00:00 по UTS, что соответствует 07:00 часам местному времени г. Красноярск. Так как промежуток времени достаточно большой, необязательно брать строго 4 часа.

Теперь встает вопрос о том, как правильно подобрать радиус орбиты. Как говорилось в предыдущей задаче, орбита должна быть кратной вращению Земли. Значит имеем:

$$T = \frac{T_{\text{зв}}}{N}$$

При этом за то время, что Земля проворачивается от Красноярска к Москве, аппарат также должен совершить целое число витков вокруг Земли (в принципе можно не строго целое число витков, но число виктов должно быть близко к целому), то есть:

$$T \cdot k = \frac{\Delta\lambda}{\omega_{\text{з}}}$$

Из двух уравнений можно получить соотношение $k(N)$. Таблица с перебором значений N и соответствующим ему значением k выглядит следующим образом:

N	k	h, км
11	1.687649088	8524.746
13	1.994494377	7626.308
15	2.301339666	6932.380
17	2.841093728	6377.405

Формула для вычисления высоты:

$$a = \sqrt[3]{\mu \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2}$$

Из приведённых соотношений видно, что кратность от 17 и более недопустима по высоте, а от 10 и менее ведет к возрастанию высоты орбиты, что нежелательно, так как при высоте от 3000 км навигатор перестает функционировать.

Наилучшим соотношением для нас будет пара чисел $N = 13$ и с округлением $k = 2$. Соответственно, значение большой полуоси $a = 7626.308$.

Осталось определить значение средней аномалии, что по порядку действий совпадает с предыдущей задачей:

$$N = \frac{t \cdot 60 \cdot 60}{T} = 2.172601086$$

Также берём дробную часть:

$$\phi = 360^\circ \cdot 0.671231605 = 62.13639096^\circ$$

$$M_0 = 56.010569^\circ - 62.13639096^\circ = -6.12582196^\circ$$

$$M_0 = 353.8741780^\circ$$

Алгоритм управления похож на тот, что рассматривался в задаче «Управление полезной нагрузкой».

Для начала также вычислим допустимую угловую погрешность:

$$\alpha = \frac{180^\circ \cdot L}{2\pi \cdot R_{\text{зем}}}$$

$$\alpha = 0.45^\circ$$

И допишем алгоритм:

```
import math
camera = spacecraft.device("camera").function(0)
navigator = spacecraft.device("navigator").function(0)


def on_target(flight_time, coords):
    #TODO: Your code here
    if (math.fabs(coords[0] - 55.753960) < 0.45 and
        math.fabs(coords[1] - 37.620393) < 0.45):
        return True
```

```
    if (math.fabs(coords[0] - 56.010569) < 0.45 and
        math.fabs(coords[1] - 92.852545) < 0.45):
        return True
    return False


def loop():
    flight_time = runtime.flight_time()

    location = navigator.location()
    coords = (location[0], location[1])

    if on_target(flight_time, coords):
        if not camera.enabled():
            camera.enable()
    else:
        if camera.enabled():
            camera.disable()
```

Ответ: $e = 0$, $i = 90^\circ$, $w = 0^\circ$, $\Omega = 352.9268137^\circ$, $= 7626.308$ км, $M_0 = 353.8741780^\circ$.