

§3 Заключительный этап: индивидуальная часть

3.1 Задачи по химии (9 класс)

1. А. Рассчитайте молярную концентрацию 2% раствора гидроксида натрия (мас%)
Считайте плотность раствора равной 1 г/мл.

Б. Рассчитайте рН этого раствора

В. Запишите уравнения реакции/реакций, протекающих при добавлении по каплям 10 мл этого раствора (А) к 100 мл 0,1 М хлорида алюминия.

Г. Этот раствор (А) выпарили, полученный осадок накрыли марлей, чтобы не попадала пыль, и поставили на полку. Через месяц его снова растворили. Будет ли отличаться состав полученного раствора от изначально (А)?

(9 баллов)

Решение:

А. 2 балла

$$C = \frac{20 \text{ г/литр}}{40 \text{ г/моль}} = 0,5 \text{ моль/литр}$$

Б. 2 балла

$$pOH = -lg0,5 = 0,3; \quad pH = 14 - 0,3 = 13,7$$

В. 3 балла

Выпадение осадка возможно $AlCl_3 + 3NaOH = Al(OH)_3 + 3NaCl$, однако

так как NaOH (0,005 моль) добавляется по каплям к $AlCl_3$ (0,01 моль), то часть молекул $AlCl_3$ перейдет в гидроксодихлорид алюминия



Растворения осадка вследствие образования комплекса $Al(OH)_3 + NaOH = Na[Al(OH)_4]$ не будет, так как NaOH в недостатке

Г. Будет – 1 балл

Со временем твердый гидроксид натрия будет поглощать воду и углекислый газ.

При растворении получится раствор карбоната натрия. Поглощенная вода не будет влиять на качественный состав раствора.

Возможно влияние поглощенной воды на количественный состав раствора, если готовить его добавление ровно такого же объема воды к навеске, что и в прошлый раз. Только неясно, как можно отмерить (взвесить) навеску, т.к. после месяца выдерживания на воздухе это будет уже не твердое вещество, а, скорее всего, жидкость. Поэтому рассуждения про количественный состав не оцениваются.

Про карбонат – 2 балла

2. В две пробирки, содержащие совершенно одинаковые навески карбоната кальция, одновременно прибавили одинаковые объемы растворов кислот: в одну 2 М уксусной кислоты, а в другую – 2 М соляной кислоты. Карбонат был взят в недостатке.

А. Запишите уравнения реакций, протекающих в пробирках.

Б. На одном графике схематически изобразите зависимости объема выделившегося газа от времени для обеих реакций (пробирок).

(6 баллов)

Решение:

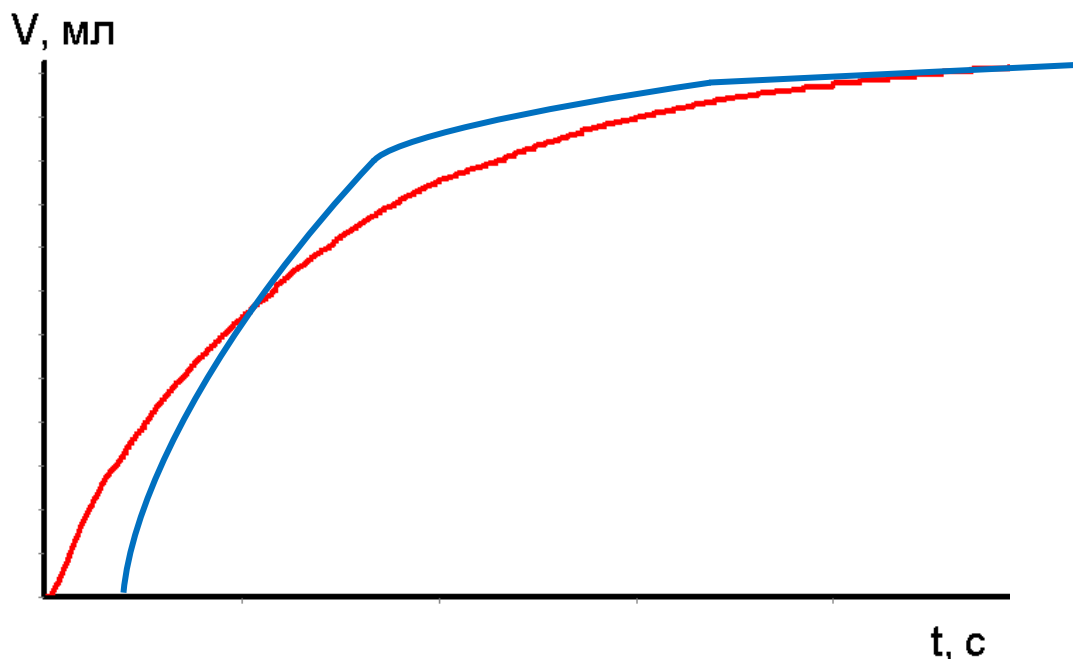
А. 2 балла



Б. 2 балла за один любой график

4 балла за верное соотношение:

1. график взаимодействия с соляной кислотой идет более «остро» - более быстрый начальный период
2. конечный объем выделившегося газа одинаков



3. А. Рассчитайте рН 0,5 М раствора уксусной кислоты

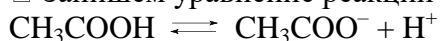
Б. Опишите процессы, происходящие при прибавлении к 100 мл 0,5 М раствора уксусной кислоты 10 мл 0,1М соляной кислоты (качественно)

(5 баллов)

Решение:

А. 3 балла

Запишем уравнение реакции (соответствующего равновесия):



Константа этого равновесия

$$K_{\text{кисл}}(\text{CH}_3\text{COOH}) = \frac{[\text{CH}_3\text{COO}^-] \cdot [\text{H}^+]}{[\text{CH}_3\text{COOH}]}$$

Для расчета рН необходимо рассчитать $[\text{H}^+]$.

Выразим все концентрации, присутствующие в константе, через $[\text{H}^+]$ и известную величину С.

При диссоциации концентрации катиона и аниона равны:

$$[\text{CH}_3\text{COO}^-] = [\text{H}^+].$$

Равновесная концентрация кислоты (концентрация оставшихся молекул):

$$[\text{CH}_3\text{COOH}] = C_{\text{к-ты}} - [\text{H}^+].$$

Подставив эти выражения в выражение для константы равновесия:

$$K_{\text{кисл}}(\text{CH}_3\text{COOH}) = \frac{[\text{H}^+]^2}{C_{\text{к-ты}} - [\text{H}^+]}$$

Из справочных данных для уксусной кислоты известна $K_{\text{кисл}}(\text{CH}_3\text{COOH}) = 1,74 \cdot 10^{-5}$.

□ Поскольку равновесие диссоциации уксусной кислоты в значительной степени смещено в сторону исходных веществ, можем полагать $[H^+] \ll C_{K-ты}$ и считать, что $C_{K-ты} - [H^+] \approx C_{K-ты}$.

В этом случае уравнение можно упростить:

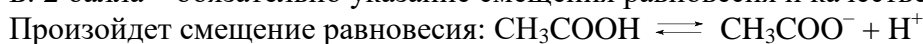
$$K_{K-ты} \approx \frac{[H^+]^2}{C_{K-ты}}, \quad \text{отсюда } [H^+] \approx \sqrt{K_{K-ты} \cdot C_{K-ты}}$$

$$[H^+] \approx \sqrt{1,74 \cdot 10^{-5} \cdot 0,5} = 2,96 \cdot 10^{-3} \text{ М} \approx 3 \cdot 10^{-3} \text{ М}.$$

Так как $3 \cdot 10^{-3} \ll 0,5$, введенное нами упрощение оправдано.

$$pH = -\lg(3 \cdot 10^{-3}) = 2,5$$

Б. 2 балла – обязательно указание смещения равновесия и качественное описание.



В сторону исходных веществ.

В исходном растворе $[H^+] = 3 \cdot 10^{-3} \text{ М}$, и $\nu(H^+) = 3 \cdot 10^{-4} \text{ моль}$

Добавление соляной кислоты уменьшило (вследствие смещения концентрации) это количество, но добавление 10 мл 0,1М HCl это добавление $\nu(H^+) = 1 \cdot 10^{-3} \text{ моль}$.

Следовательно, pH раствора уменьшится (оценочно до 2)

4. А. Сколько тригидрата ацетата натрия необходимо для приготовления 200 мл 0,5 М раствора?

Б. Смешали 200 мл 0,5 М раствора уксусной кислоты и 200 мл 0,5М раствора ацетата натрия. Рассчитайте pH этого раствора.

В. Опишите процессы, происходящие при прибавлении к 100 мл вышеописанного раствора (пункт Б) 10 мл 0,1М соляной кислоты (7 баллов)

Решение:

А. 3 балла

$$\nu(CH_3COONa) = 0,2 \cdot 0,5 = 0,1 \text{ моль}$$

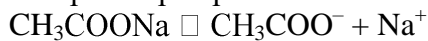
$$\nu(CH_3COONa \cdot 3H_2O) = \nu(CH_3COONa) = 0,1 \text{ моль}$$

$$m(CH_3COONa \cdot 3H_2O) = 136 \cdot 0,1 = 13,6 \text{ г}$$

Б. 2 балла за расчет

В полученном растворе $C_{CH_3COOH} = C_{CH_3COONa} = 0,25 \text{ М}$

□ В растворе практически необратимо диссоциирует ацетат натрия:



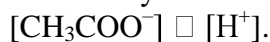
и обратимо — уксусная кислота: $CH_3COOH \rightleftharpoons H^+ + CH_3COO^-$

□ Из справочных данных значение константы диссоциации уксусной кислоты

$$K_d(CH_3COOH) = \frac{[CH_3COO^-] \cdot [H^+]}{[CH_3COOH]} = 1,74 \cdot 10^{-5}$$

Чтобы рассчитать pH, необходимо определить концентрацию H^+ , для чего надо узнать равновесные концентрации ацетат-иона и уксусной кислоты.

Поскольку система, кроме уксусной кислоты, содержит ацетат натрия,



Равновесная концентрация ацетат-иона создается как уксусной кислотой, так и ацетатом натрия.

Так как $K_d(CH_3COOH)$ мала, то при диссоциации уксусной кислоты лишь малая часть кислоты распадается на ионы. Поэтому мы можем считать с достаточной точностью, что

$$[CH_3COO^-] = C_{CH_3COONa}$$

Равновесная концентрация уксусной кислоты также создается и кислотой, и ацетатом натрия, но равновесие взаимодействия ацетат-иона с водой существенно смещено в сторону исходных и потому мы можем считать с достаточной точностью, что $[CH_3COOH] = C_{CH_3COOH}$.

Тогда в выражении для константы процесса мы можем заменить равновесные концентрации общими:

$$\square K_d(CH_3COOH) = \frac{C_{CH_3COONa} \cdot [H^+]}{C_{CH_3COOH}} \text{ и } [H^+] = K_d(CH_3COOH) \frac{C_{CH_3COOH}}{C_{CH_3COONa}}$$

В данном случае

$$[H^+] = K_d(CH_3COOH) \cdot \frac{0,25}{0,25} = 1,74 \cdot 10^{-5} \text{ М и pH}=4,76$$

В. 2 балла – обязательно указание смещения равновесия

Произойдет смещение равновесия: $CH_3COOH \rightleftharpoons CH_3COO^- + H^+$

В сторону исходных веществ. Добавляемые ионы H^+ будут связываться ацетат-ионами. Количество добавленных ионов водорода не столь велико (10 мл 0,1М HCl это $\nu(H^+) = 1 \cdot 10^{-3}$ моль) и не окажет существенного влияние на pH раствора

Было $1,74 \cdot 10^{-5}$, добавив $1 \cdot 10^{-3}$ моль ионов водорода pH должен на пару значений упасть

5. Представьте, что Вам выданы пронумерованные пробирки с растворами карбоната натрия, иодида калия, хлорида железа (III), серной кислоты и гидроксида калия.

Предложите способ определить, не используя других реактивов, что в какой пробирке.

Опишите этот способ.

Напишите уравнения протекающих реакций.

(12 баллов)

Решение:

Способ определения 5 баллов (5 веществ) – таблица или алгоритмическое описание. По 1 баллу за доказательное обнаружение одного вещества.

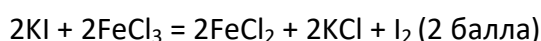
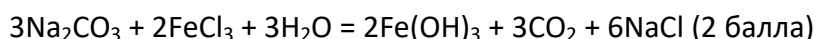
	Na ₂ CO ₃	KI	FeCl ₃	H ₂ SO ₄	NaOH
Na ₂ CO ₃		--	↑↓ бурый	↑ б/ц	
KI	--		↓ бурый раствор	--	--
FeCl ₃	↑↓ бурый	↓ бурый раствор		--	↓ бурый
H ₂ SO ₄	↑ б/ц	--			*
NaOH	--		↓ бурый	*	

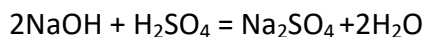
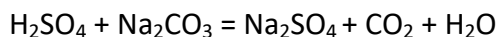
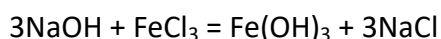
-- нет взаимодействия

(*) реакция протекает, но мы не наблюдаем признаков

↑ выделение газа

Уравнения реакций 7 баллов





6. При проведении обратимой реакции синтеза аммиака при повышенном давлении при начальных концентрациях водорода 0,6 моль/литр и азота 0,4 моль/литр после достижения равновесия в системе обнаружено содержание 0,3 моль/литр аммиака. Считая, что объем системы не изменяется — реакцию проводят в несжимаемом реакторе:

А. Рассчитайте равновесные концентрации N_2 и H_2 ,

Б. Рассчитайте константу равновесия при этой температуре

(7 баллов)

Решение:

А. 4 балла

	3H_2	$+ \text{N}_2$	\rightarrow	2NH_3
C_0	0,6М	0,4 М		
Δ	-0,45 М	-0,15 М		+0,3 М
[...]	0,15М	0,25М		0,3 М

Б. 3 балла Константа равновесия: $K = \frac{[\text{NH}_3]^2}{[\text{H}_2]^3 \cdot [\text{N}_2]} = \frac{0,3^2}{0,15^3 \cdot 0,25} = 360$

3.2 Задачи по химии (10-11 класс)

1.

Условие:

А. Рассчитайте молярную концентрацию 7% раствора хлороводорода (мас%) Считайте плотность раствора равной 1 г/мл.

Б. Рассчитайте рН этого раствора.

В. Запишите уравнение реакции/реакций, протекающих при добавлении этого раствора к раствору нитрата свинца (0,01 М).

Г. Если поставить открытую склянку с этим раствором (А) рядом со склянкой с раствором аммиака в шкаф, то со временем на предметах вокруг будет наблюдаться образование белого налета. Что это за налет? Обоснуйте свое мнение уравнением реакции.

(9 баллов)

Решение:

А. 2 балла

$$C = \frac{70 \text{ г/литр}}{36,5 \text{ г/моль}} = 1,9 \text{ моль/литр}$$

Б. 2 балла

$$\text{pH} = -\lg 1,9 = -0,3$$

В. 4 балла

Выпадение осадка $\text{Pb}(\text{NO}_3)_2 + 2\text{HCl} = \text{PbCl}_2 + 2\text{HNO}_3$

Растворение осадка вследствие образования комплекса $\text{PbCl}_2 + 2\text{HCl} = \text{H}_2[\text{PbCl}_4]$

Г. 1 балл

$\text{HCl} + \text{NH}_3 = \text{NH}_4\text{Cl}$ (диффузия газов и образование твердого вещества в виде налета)

2.

Условие:

В две пробирки, содержащие одинаковые навески алюминия (2,7 г), одновременно прибавили кислоты: в одну 100 мл 2 М уксусной, а в другую 100 мл 2 М соляной

А. Запишите уравнения реакций, протекающие в пробирках.

Б. Рассчитайте максимально возможный объем выделившегося во второй пробирке газа при комнатной температуре и давлении 1 атм.

В. На одном графике схематически изобразите зависимости объема выделившегося газа от времени для обеих реакций (пробирок).

Г. При каком объеме раствора 2М HCl достигается максимальный объем выделяющегося газа?

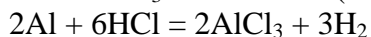
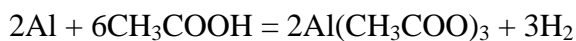
Д. Запишите возможные уравнения процессов, протекающих при прибавлении 2М раствора гидроксида натрия к раствору, полученному в пробирке 1.

Е. Укажите количества веществ, находящихся в растворе, полученном при прибавлении к раствору пункта Г 100 мл 2М карбоната калия.

(16 баллов)

Решение:

А. 2 балла



Б. 2 балла

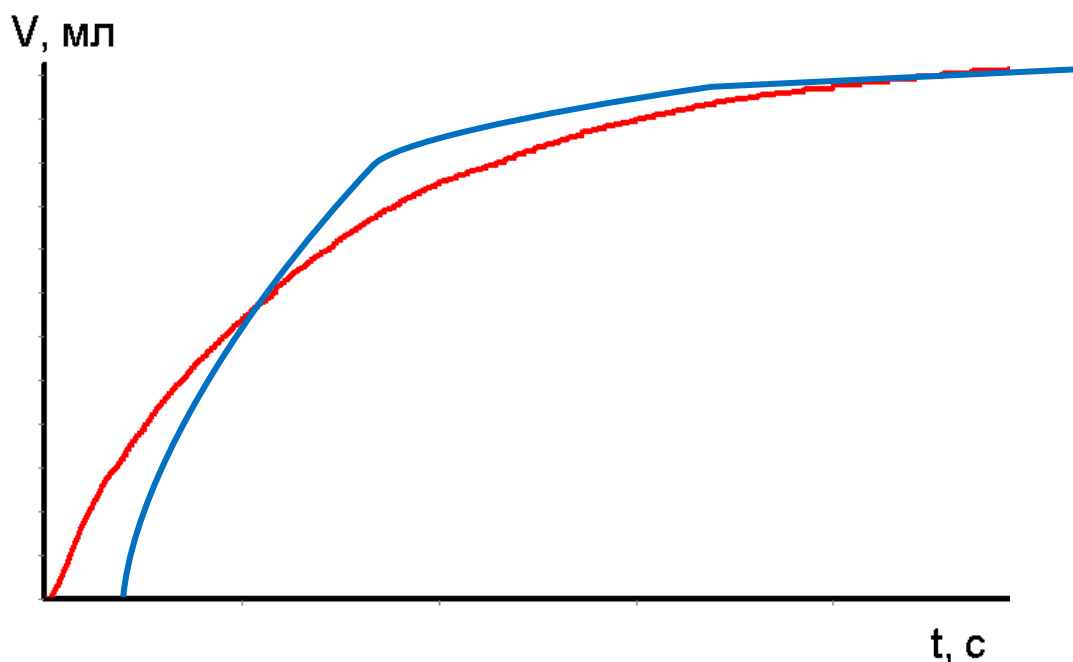
$$\nu(\text{Al}) = 0,1 \text{ моль}, \quad \nu(\text{HCl}) = 2\text{М} \cdot 0,1\text{л} = 0,2 \text{ моль}$$

Кислота в недостатке, поэтому $\nu(\text{H}_2) = \frac{1}{2} \nu(\text{HCl}) = 0,1 \text{ моль}$

$$\text{При комнатной температуре } 25^\circ\text{C} \quad V = \frac{\nu(\text{H}_2) \cdot R \cdot T}{p} = \frac{0,1 \cdot 8,314 \cdot 298}{101,3} = 2,45 \text{ л}$$

В. 2 балла за один любой график

4 балла за верное соотношение



В случае соляной кислоты более быстрый в начале реакции подъем графика выделения водорода.

Конечный объем водорода одинаков.

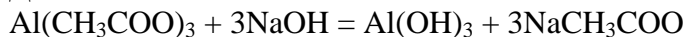
Алюминий в избытке и кислоты разные, но алюминий реагирует с водой и потому объем водорода в обоих случаях лимитируется количеством алюминия.

Г. 2 балла

$\nu(\text{Al}) = 0,1 \text{ моль}$, необходимое $\nu(\text{HCl}) = 3 \cdot 0,1 = 0,3 \text{ моль}$

Что составляет $V = \frac{0,3 \text{ моль}}{2 \text{ моль/литр}} = 0,15 \text{ литр}$, или 150 мл

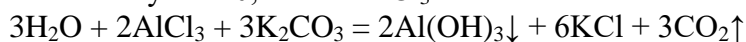
Д. 3 балла



в присутствии NaOH: $2\text{Al} + 6\text{H}_2\text{O} = 2\text{Al}(\text{OH})_3 + 3\text{H}_2$ (возможна запись до комплекса)

Е. 3 балла

В п. Г получено 0,1 моль AlCl_3



$\nu(\text{K}_2\text{CO}_3) = 0,2 \text{ моль}$, он в избытке.

В результате протекания реакции образуется 0,3 моль KCl и остается 0,05 моль K_2CO_3

Формально говоря, осадок гидроксида алюминия и углекислый газ уходят из раствора, потому расчет их количеств не влияет на оценку решения.

3.

Условие:

А. Рассчитайте pH 0,5 М раствора аммиака.

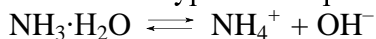
Б. Опишите процессы, происходящие при прибавлении к 100 мл 0,5 М раствора аммиака 10 мл 0,1 М гидроксида калия (качественно).

(4 балла)

Решение:

А. 2 балла

Запишем уравнение реакции (соответствующего равновесия):



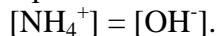
Константа этого равновесия

$$K_{\text{осн}}(\text{NH}_3\text{H}_2\text{O}) = \frac{[\text{NH}_4^+] \cdot [\text{OH}^-]}{[\text{NH}_3\text{H}_2\text{O}]}$$

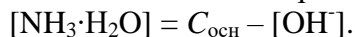
Для расчета pH необходимо рассчитать $[\text{OH}^-]$.

Выразим все концентрации, присутствующие в константе, через $[\text{OH}^-]$ и известную величину C .

При диссоциации концентрации катиона и аниона равны:



Равновесная концентрация основания (концентрация оставшихся молекул):



Подставив эти выражения в выражение для константы равновесия:

$$K_{\text{осн}}(\text{NH}_3\text{H}_2\text{O}) = \frac{[\text{OH}^-]^2}{C_{\text{осн}} - [\text{OH}^-]}.$$

Из справочных данных для аммиака известна $K_{\text{осн}}(\text{NH}_3\text{H}_2\text{O}) = 1,76 \cdot 10^{-5}$.

Поскольку равновесие диссоциации аммиака в значительной степени смещено в сторону исходных веществ, можем полагать $[\text{OH}^-] \ll C_{\text{осн}}$ и считать, что $C_{\text{осн}} - [\text{OH}^-] \approx C_{\text{осн}}$.

В этом случае уравнение можно упростить:

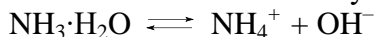
$$K_{\text{осн}} \approx \frac{[\text{OH}^-]^2}{C_{\text{осн}}}, \quad \text{отсюда } [\text{OH}^-] \approx \sqrt{K_{\text{осн}} \cdot C_{\text{осн}}}$$

$$[\text{OH}^-] \approx \sqrt{1,76 \cdot 10^{-5} \cdot 0,5} = 3 \cdot 10^{-3} \text{ М.}$$

Так как $3 \cdot 10^{-3} \ll 0,5$, введенное нами упрощение оправдано.

$$\text{pH} = 14 - \lg(3 \cdot 10^{-3}) = 14 - 2,5 = 11,5$$

Б. 2 балла – обязательно указание смещения равновесия



В сторону исходных веществ.

В исходном растворе $[\text{OH}^-] = 3 \cdot 10^{-3} \text{ М}$, и $\nu(\text{OH}^-) = 3 \cdot 10^{-4} \text{ моль}$

Добавление гидроксида калия уменьшило (вследствие смещения концентрации) это количество, но добавление 10 мл 0,1М КОН это добавление $\nu(\text{OH}^-) = 1 \cdot 10^{-3} \text{ моль}$.

Следовательно, pH раствора увеличится (оценочно до 12)

4. А. Сколько хлорида аммония необходимо для приготовления 200 мл 0,5 М раствора?

Б. Смешали 200 мл 0,5 М раствора аммиака и 200 мл 0,5М раствора хлорида аммония.

Рассчитайте pH этого раствора.

В. Опишите процессы, происходящие при прибавлении к 100 мл вышеописанного раствора (пункт Б) 10 мл 0,1М соляной кислоты.

(6 баллов)

Решение:

А. 2 балла

$$\nu(\text{NH}_4\text{Cl}) = 0,2 \cdot 0,5 = 0,1 \text{ моль}$$

$$m(\text{NH}_4\text{Cl}) = 53,5 \cdot 0,1 = 5,35 \text{ г}$$

Б. 2 балла за расчет

В полученном растворе $C_{\text{NH}_3\text{H}_2\text{O}} = C_{\text{NH}_4\text{Cl}} = 0,25 \text{ М}$

В растворе практически необратимо диссоциирует хлорид аммония:



и обратимо — гидроксид аммония (аммиак): $\text{NH}_3 \cdot \text{H}_2\text{O} \rightleftharpoons \text{NH}_4^+ + \text{OH}^-$

Из справочных данных значение константы диссоциации аммиака

$$K_{\text{осн}}(\text{NH}_3\text{H}_2\text{O}) = \frac{[\text{NH}_4^+] \cdot [\text{OH}^-]}{[\text{NH}_3\text{H}_2\text{O}]} = 1,76 \cdot 10^{-5}$$

Чтобы рассчитать pH, необходимо определить концентрацию OH^- , для чего надо узнать равновесные концентрации иона аммония и непродиссоциированной форма аммиака (гидроксида аммония).

Поскольку система, кроме аммиака, содержит хлорид аммония



Равновесная концентрация иона аммония создается как аммиаком, так и хлоридом аммония.

Так как $K_{\text{осн}}(\text{NH}_3\text{H}_2\text{O})$ мала, то при диссоциации аммиака лишь малая часть основания распадается на ионы. Поэтому мы можем считать с достаточной точностью, что

$$[\text{NH}_4^+] = C_{\text{NH}_4\text{Cl}}$$

Равновесная концентрация аммиака (гидроксида аммония) также создается и аммиаком, и хлоридом аммония, но равновесие взаимодействия иона аммония с водой существенно смещено в сторону исходных и потому мы можем считать с достаточной точностью, что

$$[\text{NH}_3\text{H}_2\text{O}] = C_{\text{NH}_3\text{H}_2\text{O}}$$

Тогда в выражении для константы процесса мы можем заменить равновесные концентрации общими:

$$\square K_{\text{осн}}(\text{NH}_3\text{H}_2\text{O}) = \frac{C_{\text{NH}_4\text{Cl}} \cdot [\text{OH}^-]}{C_{\text{NH}_3\text{H}_2\text{O}}} \text{ и } [\text{OH}^-] = K_{\text{осн}}(\text{NH}_3\text{H}_2\text{O}) \cdot \frac{C_{\text{NH}_3\text{H}_2\text{O}}}{C_{\text{NH}_4\text{Cl}}}$$

В данном случае

$$[\text{OH}^-] = K_{\text{осн}}(\text{NH}_3\text{H}_2\text{O}) \cdot \frac{0,25}{0,25} = 1,76 \cdot 10^{-5} \text{ М и pH}=9,25$$

В. 2 балла – обязательно указание смещения равновесия

Произойдет смещение равновесия: $\text{NH}_3 \cdot \text{H}_2\text{O} \rightleftharpoons \text{NH}_4^+ + \text{OH}^-$

в сторону продуктов. Добавляемые ионы H^+ будут связываться гидроксид-ионами.

Количество добавленных ионов водорода не столь велико (10 мл 0,1М HCl это

$\nu(\text{H}^+) = 1 \cdot 10^{-3} \text{ моль}$) и не окажет существенного влияние на pH раствора

5. А. Запишите сокращенно-ионное уравнение, объясняющее среду раствора гидрофосфата натрия

Б. Рассчитайте pH 0,2 М раствора гидрофосфата натрия.

В. Предскажите окраску в 0,2 М растворе гидрофосфата натрия:

Фенолфталеина (pH перехода 8,2 – 10,0)

Метилового оранжевого (pH перехода 3,2 – 4,0)

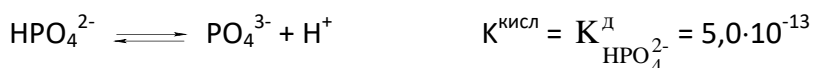
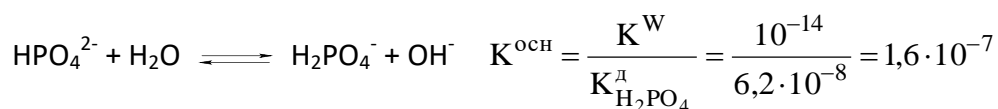
Лакмуса (pH перехода 6 – 7)

(9 баллов)

Решение:

А. 2 балла

Na_2HPO_4

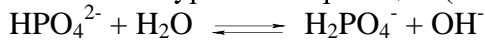


$K_{\text{осн}} > K_{\text{кисл}}, \Rightarrow$ среда слабо основная

Доказывать не надо, только уравнение реакции

Б. 4 балла

Запишем уравнение реакции (соответствующего равновесия):



Константа этого равновесия

$$K_{\text{осн}}(\text{HPO}_4^{2-}) = \frac{[\text{H}_2\text{PO}_4^-] \cdot [\text{OH}^-]}{[\text{HPO}_4^{2-}]}$$

Для расчета pH необходимо рассчитать $[\text{OH}^-]$.

Выразим все концентрации, присутствующие в константе, через $[\text{OH}^-]$ и известную величину C.

$$[\text{H}_2\text{PO}_4^-] = [\text{OH}^-].$$

Равновесная концентрация оставшихся гидрофосфат-ионов:

$$[\text{HPO}_4^{2-}] = C - [\text{OH}^-].$$

Подставив эти выражения в выражение для константы равновесия:

$$K_{\text{осн}}(\text{HPO}_4^{2-}) = \frac{[\text{OH}^-]^2}{C - [\text{OH}^-]}.$$

Выше рассчитана $K_{\text{осн}}(\text{HPO}_4^{2-}) = 1,6 \cdot 10^{-7}$.

□ Поскольку константа гидролиза мала, равновесие в значительной степени смещено в сторону исходных веществ, можем полагать $[\text{OH}^-] \ll C$ и считать, что $C - [\text{OH}^-] \approx C$.

В этом случае уравнение можно упростить:

$$K_{\text{осн}} \approx \frac{[\text{OH}^-]^2}{C}, \quad \text{отсюда } [\text{OH}^-] \approx \sqrt{K_{\text{осн}} \cdot C}$$

$$[\text{OH}^-] \approx \sqrt{1,6 \cdot 10^{-7} \cdot 0,2} = 1,8 \cdot 10^{-4} \text{ М.}$$

Так как $1,8 \cdot 10^{-4} \ll 0,2$, введенное нами упрощение оправдано.

$$\text{pH} = 14 - \lg(1,8 \cdot 10^{-4}) = 14 - 3,74 = 10,25$$

В. 3 балла

Окраски:

Фенолфталеина (pH перехода 8,2 – 10,0) - малиновый

Метилового оранжевого (pH перехода 3,2 – 4,0) - желтый

Лакмуса (pH перехода 6 – 7) - синий

6. Для реакции $\text{O}_2 + \text{N}_2 = 2\text{NO}$ при 3000°C константа равновесия (K_p) равна 0,207.

Начальная смесь при общем давлении 1 атм содержала равные количества кислорода и азота.

А. Рассчитайте парциальное давление водорода в равновесной смеси при 3000°C . Реакцию проводили в сосуде неизменного объема

Б. Рассчитайте выход реакции при этих условиях

(6 баллов)

Решение:

А. 4 балла

	O_2	N_2	NO
Исходно в смеси, атм	0,5	0,5	0
В равновесной системе	0,5- x	0,5- x	2 x

Количество вещества газа пропорционально давлению.

При одних и тех же условиях коэффициент пропорциональности одинаков.

В рассматриваемой системе не происходит изменения общего количества вещества в ходе реакции и потому в выражении для константы этот коэффициент сокращается:

$$K = \frac{[\text{NO}]^2}{[\text{N}_2] \cdot [\text{O}_2]} = \frac{(2x)^2}{(0,5-x) \cdot (0,5-x)} = 0,207$$

$$\frac{(2x)^2}{(0,5-x) \cdot (0,5-x)} = 0,207, \quad \text{отсюда } \frac{(2x)}{(0,5-x)} = \sqrt{0,207} = 0,455$$

$$\text{и } x = 0,093$$

Б. 2 балла

$$\text{Выход} = \frac{\text{практически полученное количество продукта}}{\text{теоретически возможное количество}}$$

$$\text{В нашем случае: } \frac{2x}{1} = \frac{0,093}{0,5} = 0,186 \text{ или } 18,6\%$$

3.3 Задачи по биологии

Задание 1 (20 баллов)

Условие:

При повреждении растения образуется характерная ткань - каллус.

- A. Чем она принципиально отличается от ткани шрамов у животных и человека?
- B. Какое свойство растительных клеток проявляется в возможности образования каллуса?
- C. Клетки каких тканей растений (и какие) теряют эту способность (приведите не менее 3 примеров).
- D. К какому типу ткани относится каллус?
- E. Чем отличается функционирование каллуса от функционирования других типов этой ткани?

Решение:

- A. У растений это дедифференцированные клетки той же ткани, а у животных (в большинстве своем) зарастает соединительной тканью (4 балла)
- B. Тотипотентность (= плюрипотентность), способность к дедифференцировке (4 балла)
- C. Все мертвые или потерявшие ядро. Сосуды ксилемы, ситовидные клетки (членики ситовидной трубки), клетки пробки, склеренхима (после окончания роста) (4 балла)
- D. Меристема (вторичная меристема)/ Образовательная ткань (4 балла)
- E. У каллуса делятся все клетки, а у первичных меристем - только специальные клетки-инициалы (4 балла)

Задание 2 (20 баллов)

Условие:

В далеком будущем, исследуя соседнюю галактику, человечество столкнулось с инопланетной расой, называющей себя Рейфами. В результате нескольких контактов стало известно следующее. Каждой общиной Рейфов управляет королева, являющаяся единственной особью женского пола в общине. Относительно меньшая часть общины состоит из мужчин, имеющих высокий интеллект. Большая часть – из рабочих особей, крупных и мускулистых, способных только к выполнению приказов интеллектуальных особей и рутинных дел.

Достоверно про эту расу известно:

- Наблюдалось только рождение рабочей особи. Это был «выход» из образования, названного наблюдателями «кожистым коконом». Особь появлялась несколько меньшего размера, чем взрослая, и явственно более беспомощная, но уже вполне сформированная.
- Известно, что рабочие особи в пределах одной общины генетически идентичны.
- Продолжительность жизни рабочей особи неизвестна.
- Продолжительность жизни королевы и мужчин – высокая и приблизительно одинаковая

- Рождение «интеллектуальных» особей не наблюдалось, но есть сведения, что они рождаются достаточно незрелыми и имеют некий аналог человеческого детства.
- Смены пола у взрослых особей не бывает.
- Есть сведения о традиции увозить юную королеву (до созревания) из общины.
- Обнаружены генетические особенности, сближающие эту расу с земными насекомыми, и, возможно с рыбами.

А. Предложите механизм определения пола у этой расы, пол (генетический и фенотипический) всех особей, продолжительность жизни рабочих.

В. Предположите, существует ли у Рейфов живорождение.

С. Предположим, община Рейфов осталась без королевы, но имеет потребность в новой. Предложите механизмы, как они могли бы получить родственную им королеву, и какие особи должны были у них остаться для осуществления этого.

Ответы обоснуйте.

Решение:

Данная задача предполагала более одного варианта правильного ответа. Приведены 2 примера ответа, полностью удовлетворяющие условию. За ответ, объяснявший хотя бы часть условия, при отсутствии ошибок в использовавшихся знаниях по генетике пола, начислялась половина (10) баллов

Вариант 1.

Королева - фертильная самка, «интеллектуальные» - самцы, рабочие - стерильные самки. Все «интеллектуальные» - получают из оплодотворенных яиц, половых хромосом нет. Под действием неких веществ (феромонов) выделяемых королевой все незрелые «интеллектуальные» развиваются как самцы. Рабочие - появляются из неоплодотворенных яиц, гаплоидные, имеют низкую относительно интеллектуальных продолжительность жизни. Живорождения, вероятнее всего нет т.к. одной самке многовато

Королева образуется сама после смерти старой из старшей незрелой (ребенка до полового созревания) особи

Если нужна альтернативная королева - надо увести ребенка достаточно далеко от взрослой королевы.

Вариант 2

Королева - фертильная самка. Рабочие - ее партеногенетические дочери - клоны, которые не фертильны из-за выделяемых ей веществ. Из оплодотворенных я/к получают самцы.

Новую королеву можно получить из рабочей особи, так же как в прошлом варианте из ювенильной.

Продолжительность жизни рабочих такая же как у остальных.

Задание 3 (20 баллов)

Условие:

3.1

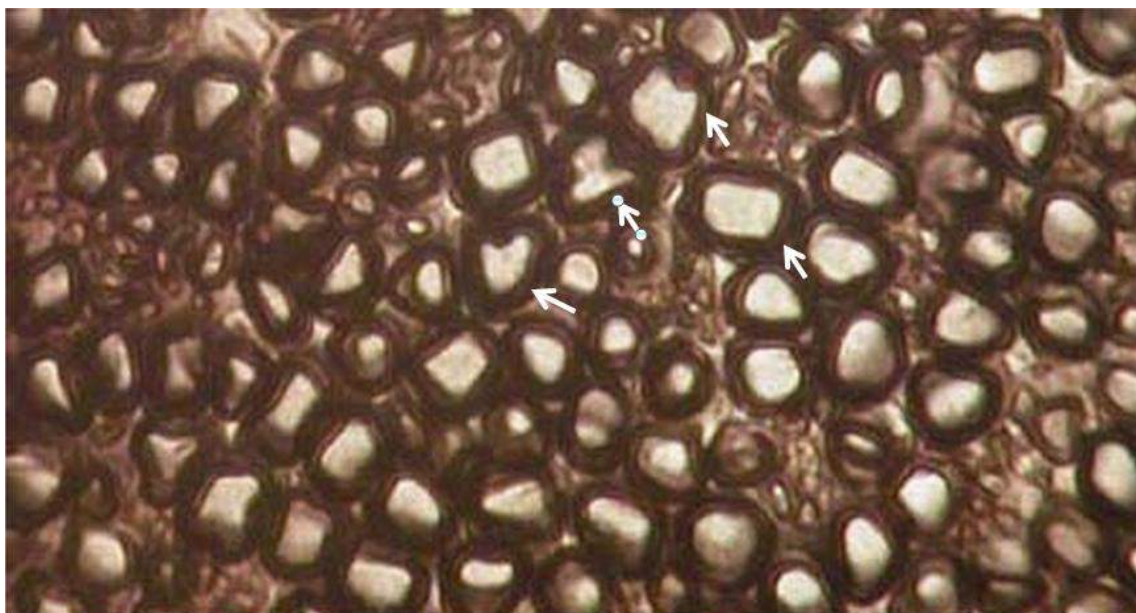


Рис. 1. поперечный срез периферического нерва (А.А. Гунин, Атлас микрофотографий).

На микрофотографии представлен поперечный срез периферического нерва (рис.1).

- А. Какая структура обозначена стрелками?
- В. Для чего она нужна?
- С. Знаете ли вы другое “решение проблемы” существующее в животном мире (например, у моллюсков)?

3.2

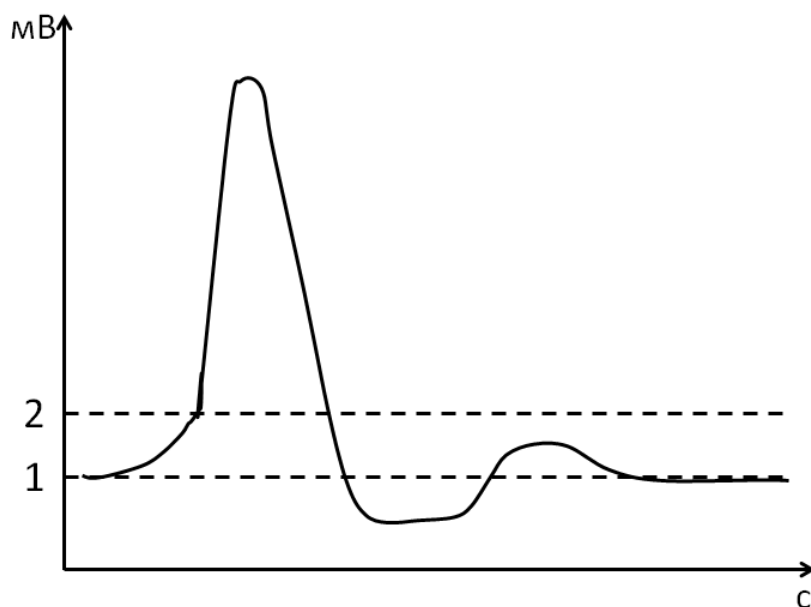


Рис. 2 Схема развития потенциала действия нервной клетки во времени.

На рисунке схематично изображен потенциал действия нейрона (спайк) (рис.2).

- А. Какие уровни потенциала клетки обозначены линиями 1 и 2 (укажите их название и физиологический смысл)?
- В. Перечислите последовательные стадии потенциала действия.
- С. Движением каких ионов и в каком направлении (наружу или внутрь клетки) обеспечивается каждая из них?
- Д. Почему существует минимальное время, в течении которого спайковавший нейрон не может генерировать еще один потенциал действия?

Решение:

3.1

- А. Миелин /миелиновая оболочка/швановские клетки (3,3 балла)
- В. Изоляция нервного волокна, что позволяет увеличить скорость проведения нервного импульса по волокну не утолщая его (3,3 балла)
- С. Чтобы увеличить скорость проведения нужно уменьшить сопротивление - можно сделать волокно толще. Пример - гигантский аксон кальмара(3,3 балла)

3.2

- А. 1 потенциал покоя, 2 - пороговый потенциал (1,25+1,25 балла)
- В. (2,5 балла) + С(2,5 балла) Подпороговая деполяризация (за счет изменения концентрации ионов калия или за счет электрического поля или за счет изменения проницаемости мембраны), массовое открытие потенциал-зависимых натриевых каналов, массовое открытие калиевых и немного кальциевых потенциал-зависимых каналов, закрытие натриевых каналов, овершут, реполяризация, следовые гипер- (за счет калиевого и кальциевого тока) и деполяризация (за счет электрогенного натриевого тока), возвращение к потенциалу покоя (калиевый ток).
- Д. Явление рефрактерности - в основном из-за инактивации натриевых каналов (2,5 балла)

Задание 4 (20 баллов)

Условие:

Представители расы протоссов обладает антропоморфными очертаниями тела, за исключением строения конечностей - у них выгнутые назад колени и четырехпалые руки. Цвет кожи зеленоватый, синеватый или серый. Протоссы двуполые, известно, что и мужчины, и женщины у них диплоидны. Эта раса способна питаться энергией света, однако известно, что иногда рождаются дети со сниженной способностью к восприятию света. Такие дети без специальных мер крайне редко доживают до возраста, когда сами создают семьи. За способность усваивать энергию света отвечает гетеродимерный белок Stl из двух субъединиц - S и L, для поддержания его работы достаточно хотя бы одной.

Вам доступны архивные записи одного из крупных городов-миллионников протоссов, посвященные их демографии и записи о межклановых браках.

В результате изучения архивов вам известно следующее:

- большинство протоссов в городе обладают серой кожей, синеватая и зеленоватая окраска встречаются реже, причем синеватая примерно втрое реже, чем зеленоватая
 - сниженной способностью к восприятию света мальчики страдают чаще, чем девочки
 - сниженная способность к световосприятию встречается редко - реже, чем в 1% случаев.
 - в тех случаях, когда протосс со сниженным световосприятием заводил семью, то, как правило, но не всегда, его дочери были здоровы
- Из клановых записей известно:

- Клан потомственно серокожих протоссов решил породниться с потомственно зеленокожим кланом. По результатам нескольких браков в первом поколении все дети оказались серокожими. В браках этих протоссов между собой примерно три четверти были серокожими, а среди остальных (не серых) примерно одна шестнадцатая оказалась с синеватой кожей
- Другой потомственно зеленокожий клан породнился с кланом с синеватой кожей. Все дети от таких браков оказались с зеленоватой кожей. В браках этих протоссов между собой три четверти детей оказались с зеленоватой кожей и четверть с синеватой кожей
- В браках представителей клана с серой кожей с представителями клана с синеватой кожей, у все детей была серая кожа. Во втором поколении было три четверти серокожих и поровну из оставшихся с синеватой и с зеленоватой кожей

- A. Определите, как наследуются у протоссов цвет кожи.
 B. Определите, как наследуются дефект световосприятия.
 C. Почему дефект световосприятия настолько редок у протоссов?
 Свой ответ поясните.

Решение:

A. Кожа протоссов может быть трех цветов. Исходя из того, что протоссы диплоидны, а распределение окраски не соответствует тому, которое можно было бы ожидать при каких бы то ни было аллельных взаимодействиях одного гена, можно сделать вывод, что **цвет кожи протоссов определяется, как минимум, двумя генами** (1 балл)

При определении признака двумя генами без взаимодействия их между собой, ожидалось бы проявление четырех фенотипов. В случае протоссов мы видим три фенотипа, следовательно, имеет место **взаимодействие между генами, определяющими цвет кожи.** (1 балл)

Гены, определяющие цвет кожи, наследуются аутосомно, так как никакой корреляции цветом кожи с полом не прослеживается (1 балл).

Из данных о клановых записях можно сделать вывод, что **серая кожа доминирует над зеленоватой и синеватой** (1 балл) и **зеленоватая кожа доминирует над синеватой** (1 балл)

Кланы с потомственно одинаковым цветом кожи можно считать чистыми линиями по генам, определяющим этот цвет кожи. Исходя из данных о межклановых браках, можно сделать следующие выводы:

- **Синеватый и зеленоватый цвет кожи определяются одним геном.** Доминантный признак - зеленоватая кожа, рецессивный признак - синеватая кожа (1 балл)
- Из двух генов, определяющих цвет кожи протоссов, один определяет синеватую или зеленоватую кожу, а **второй ген отвечает за проявление серого цвета кожи.** (1 балл)

- **Серый цвет кожи соответствует наличию доминантной аллели этого гена (1 балл).** В случае, если обе аллели рецессивные, проявляется зеленоватая или синеватая окраска. Доминантная аллель полностью подавляет проявление иной окраски, кроме серой. (1 балл)

Принцип наследования окраски кожи - доминантный эпистаз (1 балл). Подавляемый ген - ген зеленоватой/синеватой окраски, второй ген подавляющий.

В. Дефект световосприятия зависит от белка Stl. Субъединица - отдельная часть белка, кодируется каждая своим геном, т.о. **белок Stl кодируется двумя генами.** (1 балл)

Дефект световосприятия соответствует полному отсутствию доминантных аллелей в генах белка Stl, т.е. если хотя бы в одном из генов субъединиц белка (S или L), есть доминантная аллель, световосприятие нормальное. (1 балл)

Исходя из данных о том, что мужчины страдают от этого чаще, можно сделать вывод, что, вероятно, **признак сцеплен с полом (1 балл).** Так как признак проявляется не исключительно у мужчин, он не сцеплен с Y хромосомой, а **сцеплен с X хромосомой (1 балл).**

Гены субъединиц белка Stl наследуются сцепленно (2 балла)

С. Потому что **гены субъединиц S и L белка Stl крепко сцеплены,** т.е. физически рядом находятся на хромосоме. (4 балла)

Если мы рассмотрим вариант, что гены субъединиц белка Stl наследуются независимо друг от друга, то ожидаемое количество протоссов с дефектом будет следующим:

Каждая шестнадцатая из женщин (6, 25% от женщин) и каждый четвертый из мужчин (25% от числа мужчин). Принимая, так как в задаче не указано иного, что мужчин и женщин у протоссов поровну, мы получаем, что в таком случае ожидаемое количество рожденных с дефектом было бы 15,62%.

Известно, что часть протоссов с дефектом не доживают до момента создания семьи, а если доживают, то создают семью редко. Примем в этом случае, что в размножении вообще не участвуют, например, мужчины и женщины с дефектом. В таком случае, среди женщин могут с вероятностью 25% встречаться носители X хромосомы с рецессивными аллелями обоих генов. Тогда вероятность рождения мужчин с дефектом будет 6,5%. То есть всего в популяции 3,25% таких особей. Это тоже больше заявленного 1% в популяции.

Таким образом, кроме исключения из размножения всех больных особей есть дополнительный фактор, определяющий малый процент протоссов с дефектом в популяции. Если мы рассмотрим случай, когда гены субъединиц сцеплены, причем достаточно тесно, например, с вероятностью образования кроссоверных гамет 10%, то, учитывая систематическое исключение из размножения обладателей хромосом с рецессивными аллелями обоих генов, “носителями” считаются протоссы с одной рецессивной аллелью в X-хромосоме. Вероятность образования сочетания двух рецессивных аллелей генов субъединиц - 10%. Если из размножения всё еще исключаются все больные, то с такой вероятностью кроссинговера вероятность нового появления мужчины с дефектом снизится в пять раз и станет 1,3%. Для женщин такая цифра будет совсем мало. Т.о. всего в популяции у нас будет 0,65-0,90% протоссов с дефектом в зависимости от эффективности исключения больных из процесса размножения.

Задание 5. (20 баллов)

Условие:

У вас есть данные различных экспериментов про белок X. Напишите, исходя из этих данных, всё, что вы можете рассказать об этом белке.

- 1) У вас есть 3D структура этого белка, полученная рентгеноструктурным анализом (рис.3)
- 2) Данные флуоресцентной микроскопии о прижизненном расположении этого белка в клетке. Для этого этот белок был сшит с флуоресцентной меткой. Там, где светится метка, там и находится белок. В этих же клетках вы флуоресцентной меткой другого цвета поместили цитохром C. EA.hy926 - клеточная линия, на которой проводился данный опыт. (рис.4)
- 3) Данные полимеразной цепной реакции “в реальном времени”. Измеряли количество мРНК белка X. В опыте на клетки воздействовали динитрофенолом, известным как прооксидантный агент, и провоспалительным цитокином фактором некроза опухоли альфа

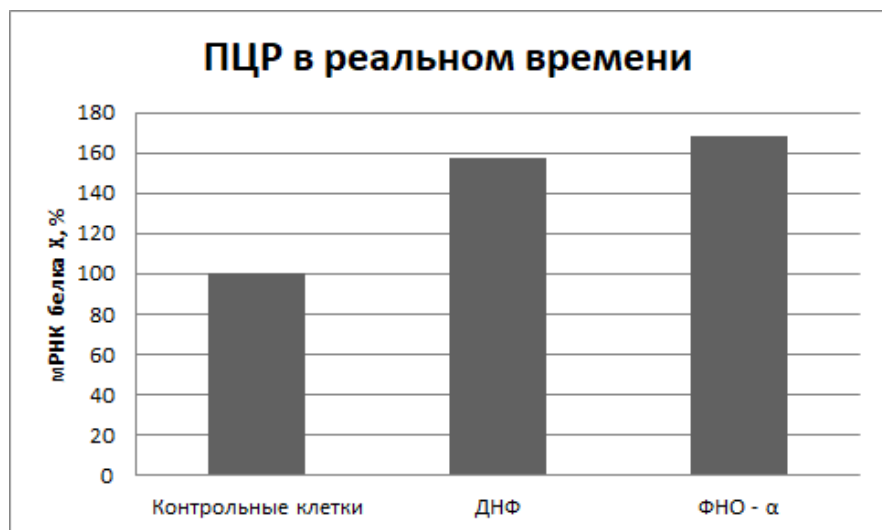


Рис. 5. Количество мРНК белка X при обработке ДНФ и ФНО-а

- 4) Данные по уровню активных форм кислорода в компартменте преимущественной локализации белка X в культуре клеток с гиперэкспрессией белка X. Для контроля использовали как клетки без воздействия трансфецирующего агента, так и клетки, трансфицированные другой плазмидой, для проверки воздействия процедуры трансфекции. Для индукции выработки активных форм кислорода, использовали перекись водорода.

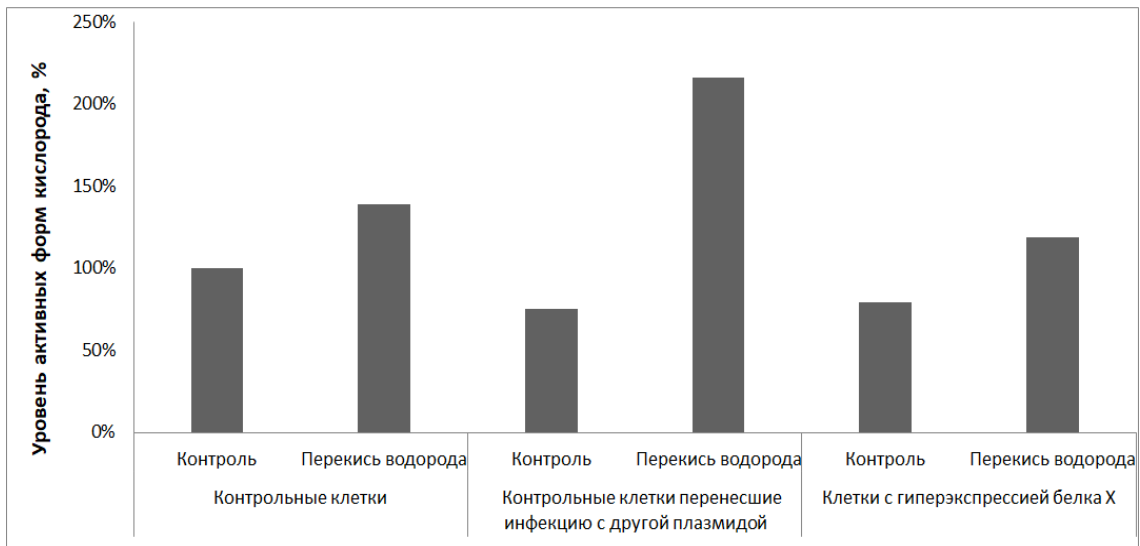


Рис. 6. Уровень активных форм кислорода в компартменте преимущественной локализации белка X.

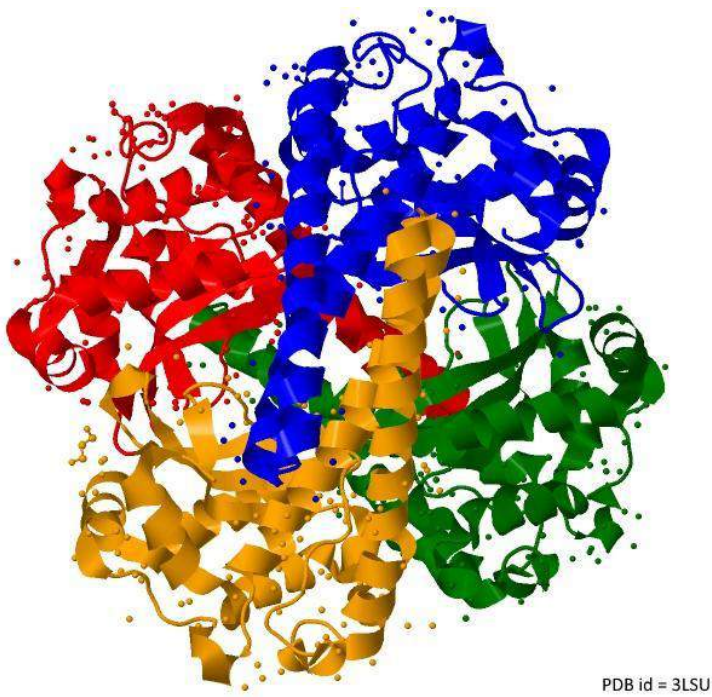


Рис. 3. 3D структура белка X.

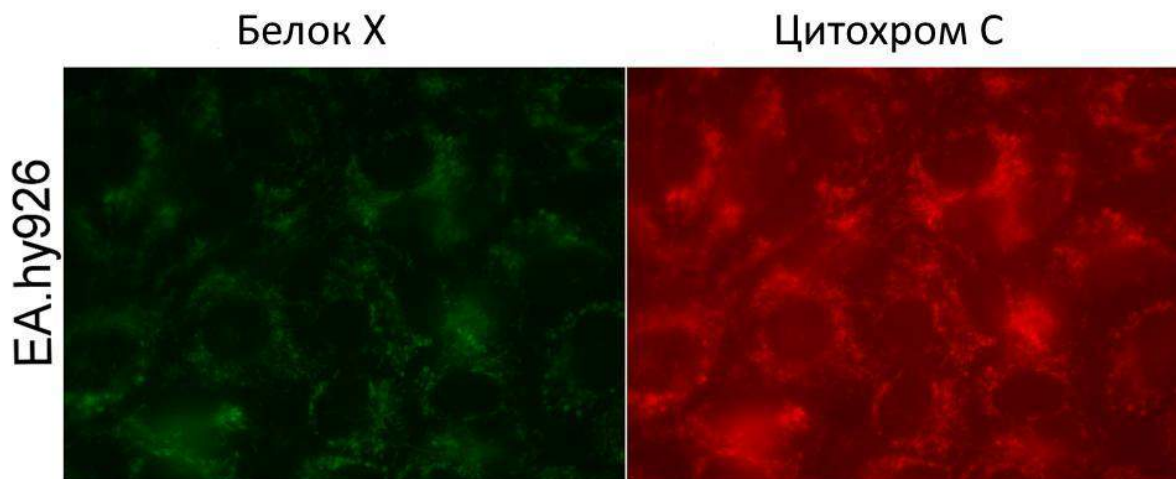


Рис.4. Распределение белка X и цитохрома С в клетке. Данные флуоресцентной микроскопии.

Решение:

По изображению 3D структуры белка X можно понять следующее:

- Это **тетрамерный белок, все его 4 субъединицы одинаковые** или очень похожи друг на друга (2 балла)
- **Преимущественная форма укладки этого белка - альфа спираль** (1 балл)
- Белок X не имеет специальных структур для закрепления в липидной мембране, не выглядит как трансмембранный канал, поэтому, не зная его аминокислотного состава в области поверхности, можно предположить, что либо белок X **локализуется в цитоплазме/в полости органелл, либо ассоциирован с мембраной, но не закреплен в ней.** (2 балла)

По фотографии с флуоресцентной микроскопией можно сделать вывод о том, что **белок X находится в том же месте в клетке, что и цитохром С** (1 балл). Цитохром С находится в митохондриях, следовательно **белок X локализуется в митохондриях** (2 балла)

Данные ПЦР позволяют понять про белок X следующее:

- Синтез белка X увеличивается в ответ на воспаление (1,5 балл)
- Синтез белка X увеличивается в ответ на повышение уровня активных форм кислорода (1,5 балл)
- Белок X либо регулируется каким-либо стресс-фактором клетки и участвует в клеточном ответе на воспаление и окислительный стресс, либо белок X сам играет такую роль в клетке, что в ответ на ДНФ и ФНО дает сигнал транскрипционным факторам, которые увеличивают его экспрессию. (2 балла)

По данным об уровне АФК, можно сделать вывод, что белок X уменьшает окислительный стресс вызванный перекисью водорода по сравнению с контрольными трансфицированными клетками (2 балла)

Сам факт гиперэкспрессии белка не вызывает в клетке повышения уровня АФК (2 балла)

Есть общий вывод о том, что белок X находится в митохондриях, как в месте наибольшей генерации АФК, где он снижает уровень АФК в ответ на воспаление и на прооксиданты (3 балла)

3.4 Задачи по физике

Возможные критерии оценивания

За решение каждой задачи билета выставляется одна из следующих оценок:

- 1,0 - задача решена правильно;
- 0,8 - задача решена правильно и получен ответ в общем виде; есть ошибка в размерности полученной физической величины или арифметическая ошибка;
- 0,6 - задача решена не полностью; имеются все необходимые для ее решения физические соотношения; есть ошибка в алгебраических преобразованиях;
- 0,4 - задача решена не полностью; отсутствуют некоторые физические соотношения, необходимые для решения задачи;
- 0,2 - задача не решена; в работе имеются лишь отдельные записи, относящиеся к решению данной задачи или к описанию явления, рассматриваемого в задаче;
- 0,0 - решение задачи или относящиеся к нему какие-либо записи в работе отсутствуют.

За каждую задачу ставится балл, равный оценке, полученной за ее решение, умноженной на максимальный балл за данную задачу.

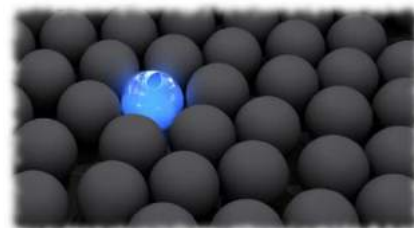
Задание 1 «Углеродный футбол»

Фуллерены – общее название для класса химических соединений, молекулы которых представляют собой выпуклые замкнутые многогранники, составленные из чётного числа атомов углерода с координационным числом 3. Наиболее распространённым и широко изучаемым является фуллерен C_{60} , имеющий форму усеченного икосаэдра с радиусом $r = 0,36$ нм.

1) (4 балла)

УСЛОВИЕ:

Какая минимальная масса углерода необходима для создания такого количества фуллеренов C_{60} , которые могли бы покрыть всю поверхность Земли (включая океаны) мономолекулярным слоем? Сколько ближайших «соседей», с которыми он находится в непосредственном контакте, будет иметь в этой пленке каждый фуллерен?



Молярная масса углерода $\mu = 12$ г/моль. Радиус Земли считать равным $R = 6370$ км.

РЕШЕНИЕ

Один фуллерен радиуса $r = 0,36 \text{ нм} = 3,6 \cdot 10^{-10} \text{ м}$ в плотнейшей гексагональной упаковке на плоскости «занимает» место $S_1 = 2\sqrt{3} \cdot r^2$. Площадь поверхности Земли $S_E = 4\pi R_E^2$, где $R_E = 6370 \text{ км}$.

Общее количество фуллеренов, необходимое для покрытия всей поверхности Земли:

$$N = \frac{S_E}{S_1} = \frac{4\pi R_E^2}{2\sqrt{3} \cdot r^2} \cong 1,14 \cdot 10^{33} \text{ шт}$$

Масса одного фуллерена: $m_1 = n_{C60} \cdot \frac{\mu_C}{N_A} = 60 \cdot \frac{12 \frac{\text{моль}}{\text{моль}}}{6 \cdot 10^{23} \frac{\text{шт}}{\text{моль}}} = 12 \cdot 10^{-25} \text{ кг}$

Общая масса наночастиц: $M = N \cdot m_1 = 1,14 \cdot 10^{33} \cdot 12 \cdot 10^{-25} \text{ кг} \approx 1,36 \cdot 10^9 \text{ кг}$.

Количество ближайших соседних атомов в плотнейшей упаковке на плоскости (координационное число) будет равно **6**.

ОТВЕТ: $M \approx 1,36 \cdot 10^9 \text{ кг}$

2) (4 балла)

УСЛОВИЕ:

Фуллерены C_{60} , характеризуются высокой ударной прочностью. Так, если разогнать положительный ион C_{60}^+ до скорости 20000 км/час , то при соударении с твердой инертной поверхностью, например, с подложкой кремния, он практически не подвергается фрагментации, т.е. не разрушается, упруго отскакивая от поверхности как резиновый мяч.

Какое давление на подложку оказывает пучок фуллеренов со средней энергией отдельных наночастиц $\langle W \rangle = 100 \text{ эВ}$ и плотностью потока $\frac{\Delta N}{\Delta S \cdot \Delta t} = 10^{-7} \frac{\text{моль}}{\text{см}^2 \cdot \text{с}}$?

РЕШЕНИЕ

При упругом столкновении с подложкой каждый фуллерен с кинетической энергией W передает ей импульс $\Delta p_1 = 2m_1 v = 2\sqrt{2m_1 W}$.

Общее количество импульса, передаваемое в единицу времени единице площади поверхности определяет величину давления:

$$P = \frac{F}{\Delta S} = \frac{\Delta N \cdot \Delta p_1}{\Delta t \cdot \Delta S} \times \frac{1}{\Delta S} = \frac{\Delta N}{\Delta S \cdot \Delta t} \times \Delta p_1 = \frac{\Delta N}{\Delta S \cdot \Delta t} \times 2\sqrt{2m_1 W},$$

где плотность потока $\frac{\Delta N}{\Delta S \cdot \Delta t} = 10^{-7} \frac{\text{моль}}{\text{см}^2 \cdot \text{с}} = 10^{-7} \frac{6 \cdot 10^{23} \text{ шт}}{10^{-4} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}} = 6 \cdot 10^{20} \frac{\text{шт}}{\text{м}^2 \cdot \text{с}}$,

масса фуллерена $m_1 = n_{C60} \cdot \frac{\mu_C}{N_A} = 60 \cdot \frac{12 \frac{\text{моль}}{\text{моль}}}{6 \cdot 10^{23} \frac{\text{шт}}{\text{моль}}} = 12 \cdot 10^{-25} \text{ кг}$,

а передаваемый в единичном столкновении импульс

$$\Delta p_1 = 2\sqrt{2m_1W} = 2\sqrt{2 \cdot 12 \cdot 10^{-25} \text{ кг} \times 100 \text{ эВ} \times 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}} \approx 1,24 \cdot 10^{-20} \text{ Н} \cdot \text{с}.$$

$$\text{Значение давления: } P = \frac{\Delta N}{\Delta S \cdot \Delta t} \cdot \Delta p_1 = 6 \cdot 10^{20} \frac{\text{шт}}{\text{м}^2 \cdot \text{с}} \times 1,24 \cdot 10^{-20} \text{ Н} \cdot \text{с} \approx 7,44 \text{ Па}.$$

ОТВЕТ: $P \approx 7,44 \text{ Па}$

3) (2 балла)

УСЛОВИЕ:

Два фуллерена, C_{60} и C_{70} , имеющие равные электрические заряды, в однородном магнитном поле вращаются по окружностям одного и того же радиуса. Во сколько раз отличаются кинетические энергии этих частиц?

РЕШЕНИЕ

Ларморовский радиус определяется соотношением $R_L = \frac{p}{qB} = \frac{\sqrt{2mW}}{qB}$. При равенстве зарядов и радиусов вращения отношение кинетических энергий двух частиц оказывается обратно пропорциональным отношению масс этих частиц:

$$\frac{W_{C_{60}}}{W_{C_{70}}} = \frac{m_{C_{70}}}{m_{C_{60}}} = \frac{7}{6} \approx 1,17.$$

ОТВЕТ: $\frac{W_{C_{60}}}{W_{C_{70}}} = \frac{7}{6} \approx 1,17$

4) (4 балла)

УСЛОВИЕ:

Однократно ионизованный фуллерен C_{60} попадает в однородное электрическое поле, где движется вдоль силовых линий. После прохождения разности потенциалов $\Delta\varphi = 6000 \text{ В}$ скорость фуллерена возрастает. Затем частица влетает в область однородного магнитного поля с индукцией $B = 0,5 \text{ Тл}$, где движется перпендикулярно линиям индукции по дуге окружности радиуса $R = 1 \text{ м}$. Определите начальную скорость фуллерена.

РЕШЕНИЕ

Радиус вращения заряженной частицы в магнитном поле зависит от ее скорости:

$$R_L = \frac{mv}{qB} \quad R_L = \frac{mv}{qB} = \frac{mv_0}{qB} \Rightarrow n = \frac{qBR_L}{mv_0} \quad (1)$$

Получает эту скорость частица, разгоняясь в электрическом поле:

$$W = W_0 + q\Delta\varphi \Rightarrow \frac{mv^2}{2} = \frac{mn^2v_0^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2} + q \cdot \Delta\varphi \Rightarrow v_0^2 = \frac{2q \cdot \Delta\varphi}{n^2 - 1} \quad (2)$$

Исключаем из (1) и (2) коэффициент увеличения скорости n :

$$v_0 = \sqrt{\frac{q}{m} \left(\frac{qB^2 R_L^2}{m} - 2\Delta\varphi \right)}. \quad (3)$$

Производя в (3) числовые подстановки, получаем значение начальной скорости фуллерена:

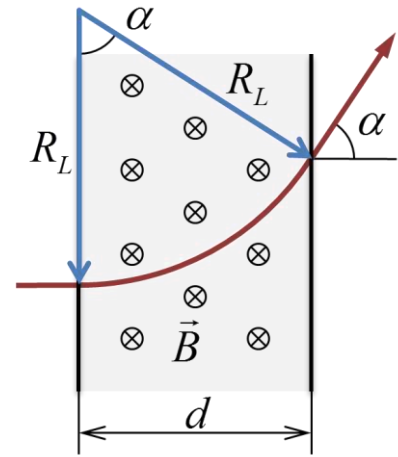
$$v_0 = \sqrt{\frac{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}}{12 \cdot 10^{-25} \text{ кг}} \times \left(\frac{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл} \times 0,5^2 \text{ Тл}^2 \times 1^2 \text{ м}^2}{12 \cdot 10^{-25} \text{ кг}} - 2 \cdot 6000 \text{ В} \right)} \approx 53333 \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

ОТВЕТ: $v_0 = \sqrt{\frac{q}{m} \left(\frac{qB^2 R_L^2}{m} - 2\Delta\varphi \right)} \approx 53333 \frac{\text{м}}{\text{с}}$

5) (6 баллов)

УСЛОВИЕ:

Коллимированный пучок заряженных углеродных наночастиц с одинаковыми скоростями и зарядами влетает в область однородного магнитного поля конечной ширины. Начальные скорости частиц перпендикулярны как направлению вектора индукции поля, так и плоскопараллельным границам области. После прохождения области с магнитным полем пучок отклонился от направления первоначального движения на угол $\alpha = 60^\circ$. Из-за присутствия в составе частиц различных изотопов углерода массы наночастиц немного различаются, вследствие чего у пучка появилась расходимость с углом $\Delta\alpha = 1^\circ$. Найдите относительный разброс $\frac{\Delta m}{m}$ масс частиц в пучке.



РЕШЕНИЕ

Как достаточно очевидно следует из рисунка

$$\sin(\alpha) = \frac{d}{R_L},$$

где d - ширина области с магнитным полем, а $R_L = \frac{mv}{qB}$ - ларморовский радиус. Перепишав данное соотношение в виде

$$m \cdot \sin(\alpha) = \text{Const},$$

и используя малость угла $\Delta\alpha$, произведем дифференцирование

$$\Delta m \cdot \sin(\alpha) + \cos(\alpha) \Delta \alpha \cdot m = 0$$

$$\frac{\Delta m}{m} = \left| -\frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} \cdot \Delta \alpha \right| = \operatorname{tg}(\alpha) \cdot \Delta \alpha$$

(Разумеется, аналогичное выражение может быть получено и путем «длинных» тригонометрических преобразований с использованием формул синуса суммы и разности двух аргументов $\sin(\alpha \pm \Delta \alpha) = \sin(\alpha)\cos(\Delta \alpha) \pm \sin(\Delta \alpha)\cos(\alpha)$, в которых $\cos(\Delta \alpha)$ будет приближённо заменен единицей).

Окончательный расчет дает

$$\frac{\Delta m}{m} = \operatorname{tg}(\alpha) \cdot \Delta \alpha = \operatorname{tg}(60^\circ) \cdot \frac{\pi}{180^\circ} \cdot 1^\circ = \frac{\sqrt{3} \cdot \pi}{180} \approx 0,0302 \approx 3\%$$

ОТВЕТ: $\frac{\Delta m}{m} = \operatorname{tg}(\alpha) \cdot \Delta \alpha \approx 0,0302 \approx 3\%$

Задание 2 «Black Square»

Vantablack (от англ. **V**ertically **A**ligned **N**ano**T**ube **A**rrays) — вертикально-ориентированные массивы углеродных нанотрубок, длиной около 5 мкм, выращенных на алюминиевой фольге. Фотоны, попадая на Vantablack, «теряются» между нанотрубками и не отражаются обратно. В настоящее время данный материал считается наиболее чёрным из всех известных, так как поглощает примерно 99,965 % энергии падающего на него излучения в очень широком спектральном диапазоне: от видимого света до радиоволн. Vantablack является весьма точным воплощением модели абсолютно черного тела.



Из представленного графика (см. Приложение 1) зависимости энергетической светимости участники должны самостоятельно сделать вывод о соотношении между температурой и мощностью излучения АЧТ

$$R \propto T^4$$

1) (4 балла)

УСЛОВИЕ:

Луч лазерного излучения с длиной волны $\lambda = 555 \text{ нм}$ падает нормально на плоский фрагмент алюминиевой фольги, покрытый материалом Vantablack и оказывает на него давление $P = 10^{-6} \text{ Па}$. Найти число фотонов, поглощаемых на одном квадратном сантиметре поверхности за одну секунду.

РЕШЕНИЕ

Импульс одного фотона с длиной волны λ равен $p_\phi = \frac{h}{\lambda}$, а давление определяется суммарным импульсом, передаваемым в единицу времени единице площади поверхности:

$$P = \frac{F}{\Delta S} = p_\phi \cdot \frac{\Delta N}{\Delta t} \cdot \frac{1}{\Delta S} = \frac{h}{\lambda} \cdot \frac{\Delta N}{\Delta t} \cdot \frac{1}{\Delta S};$$
$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{P\lambda}{h} \cdot \Delta S;$$
$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{10^{-6} \text{ Па} \times 555 \cdot 10^{-9} \text{ м}}{6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}} \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 \approx 8,38 \cdot 10^{16} \frac{\text{шт}}{\text{с}}$$

2) (4 балла)

УСЛОВИЕ:

Какую максимальную толщину может иметь алюминиевая подложка из предыдущего пункта задания, чтобы под действием силы светового давления лазерного пучка образец материала Vantablack смог приобрести первую космическую скорость за время не более $\tau = 100$ часов?

Плотность алюминия равна $\rho = 2700 \text{ кг/м}^3$. Силами сопротивления движению можно пренебречь.

РЕШЕНИЕ

В первом приближении пренебрежем массой углерода в материале Vantablack, считая что основной вклад в поверхностную плотность образца дает алюминиевая подложка.

Из второго закона Ньютона непосредственно следует

$$\begin{cases} F = ma \\ P = \frac{F}{S} \\ m = \rho_{Al} S d \end{cases} \Rightarrow a = \frac{v_I}{\tau} = \frac{P}{\rho_{Al} d}$$

где d - толщина алюминиевой подложки, τ - время разгона, а

$$v_I = \sqrt{gR_3} = \sqrt{9,81 \frac{\text{М}}{\text{с}^2} \cdot 6370 \text{ км}} \approx 7,9 \frac{\text{км}}{\text{с}}$$

- первая космическая скорость.

Производя числовую оценку толщины подложки получаем

$$d_{Al} = \frac{P\tau}{\rho_{Al}\sqrt{gR_3}} = \frac{10^{-6} \text{ Па} \cdot 100 \cdot 3600 \text{ с}}{2700 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \cdot 7900 \frac{\text{М}}{\text{с}}} \approx 1,7 \cdot 10^{-8} \text{ м},$$

что почти на два порядка отличается в большую сторону от ковалентного радиуса атома алюминия ($r_{Al} \approx 120 \text{ нм}$). Таким образом, можно рассчитывать, что толщина подложки будет составлять около сотни монослоев и она окажется достаточно прочной.

Но высота слоя углеродных нанотрубок в материале Vantablack (как явно указано в аннотации задания) равняется $d_{CNT} \approx 5 \text{ мкм} = 5 \cdot 10^{-6} \text{ м}$, а минимальная допустимая поверхностная плотность материала в условиях данной задачи оказывается равна

$$\sigma_{\min} = \rho_{Al} \cdot d_{Al} = 2700 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \cdot 1,7 \cdot 10^{-8} \text{ м} \approx 4,6 \cdot 10^{-5} \frac{\text{кг}}{\text{м}^2}.$$

Даже если предположить, что плотность массива углеродных нанотрубок на порядок меньше плотности алюминия, что приближенно выполняется для однослойных CNT с диаметром порядка 10 нанометров, необходимая толщина алюминиевой подложки в условиях данной задачи **принципиально недостижима**.

ОТВЕТ: при заданных в условии задачи значениях параметров даже нулевая толщина подложки не обеспечит необходимой величины ускорения.

3) (4 балла)

УСЛОВИЕ:

Для поддержания температуры металлического шарика, поверхность которого покрыта материалом Vantablack, на $\Delta T_1 = 100 \text{ K}$ выше температуры окружающей среды затрачивалась определенная энергетическая мощность W_1 . После того, как эту мощность увеличили в $n = 5$ раз, температура поверхности шарика возросла. Найдите новое значение температуры шарика.

Температура окружающей среды равна $T_{env} = 300 \text{ K}$. Считать, что шарик обменивается энергией с окружающей средой только за счет излучения.

РЕШЕНИЕ

В условиях термодинамического равновесия количество теряемой за счет излучения в окружающее пространство энергии равно энергии, приобретаемой объектом за счет поглощения излучения окружающей среды и дополнительной энергии от внутреннего источника:

$$W^+ = W^-$$

$$W^+ = W_{1,2} + \sigma S \cdot T_{env}^4$$

$$W^- = \sigma S \cdot T_{1,2}^4$$

$$\begin{cases} W_1 + \sigma S \cdot T_{env}^4 = \sigma S \cdot T_1^4 \\ W_2 + \sigma S \cdot T_{env}^4 = \sigma S \cdot T_2^4 \end{cases} \Rightarrow \frac{W_2}{W_1} = n = \frac{T_2^4 - T_{env}^4}{T_1^4 - T_{env}^4}$$

$$T_2^4 = n \cdot (T_1^4 - T_{env}^4) + T_{env}^4$$

С учетом того, что $T_1 = T_{env} + \Delta T_1$, получаем выражение для новой температуры

$$T_2 = \left\{ n \cdot \left[(T_{env} + \Delta T_1)^4 - T_{env}^4 \right] + T_{env}^4 \right\}^{\frac{1}{4}}$$

$$T_2 = \left\{ 5 \cdot \left[(300 \text{ K} + 100 \text{ K})^4 - (300 \text{ K})^4 \right] + (300 \text{ K})^4 \right\}^{\frac{1}{4}} \approx 556 \text{ K}$$

ОТВЕТ: $T_2 \approx 556 \text{ K}$

4) (2 балла)

УСЛОВИЕ:

В вакууме параллельно друг другу расположены три плоских листа материала Vantablack, покрытых углеродными нанотрубками с **обеих** сторон. Расстояние между ними много меньше чем, собственные размеры листов. Если температуру левого листа поддерживать равной $T_L = 77\text{ K}$, а температуру правого $T_R = 320\text{ K}$, то какой будет температура среднего листа?

РЕШЕНИЕ

Количество энергии, теряемой средним листом, определяется его температурой и общей площадью его поверхностей (левой и правой): $W^- = \sigma \cdot 2S \cdot T_M^4$

Количество энергии, поглощаемой средним листом, зависит от площади излучающих поверхностей слева и справа от него и их температур: $W^+ = \sigma \cdot S \cdot T_L^4 + \sigma \cdot S \cdot T_R^4$

В условиях термодинамического равновесия (при установлении стационарной температуры) $W^+ = W^-$, а значит

$$\begin{aligned}\sigma \cdot 2S \cdot T_M^4 &= \sigma \cdot S \cdot T_L^4 + \sigma \cdot S \cdot T_R^4 \\ T_M &= \left(\frac{T_L^4 + T_R^4}{2} \right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{(77\text{ K})^4 + (320\text{ K})^4}{2} \right)^{\frac{1}{4}} \approx 269\text{ K}\end{aligned}$$

ОТВЕТ: $T_M \approx 269\text{ K}$

5) (6 баллов)

УСЛОВИЕ:

Увеличим количество листов в структуре из предыдущего пункта задачи от трех до произвольного большого числа $N \gg 1$. Температуру крайних листов будем считать известными постоянными величинами T_1 и T_N . Запишите общее выражение, позволяющее найти температуру листа с произвольным номером $2 \leq i \leq N - 1$.

РЕШЕНИЕ

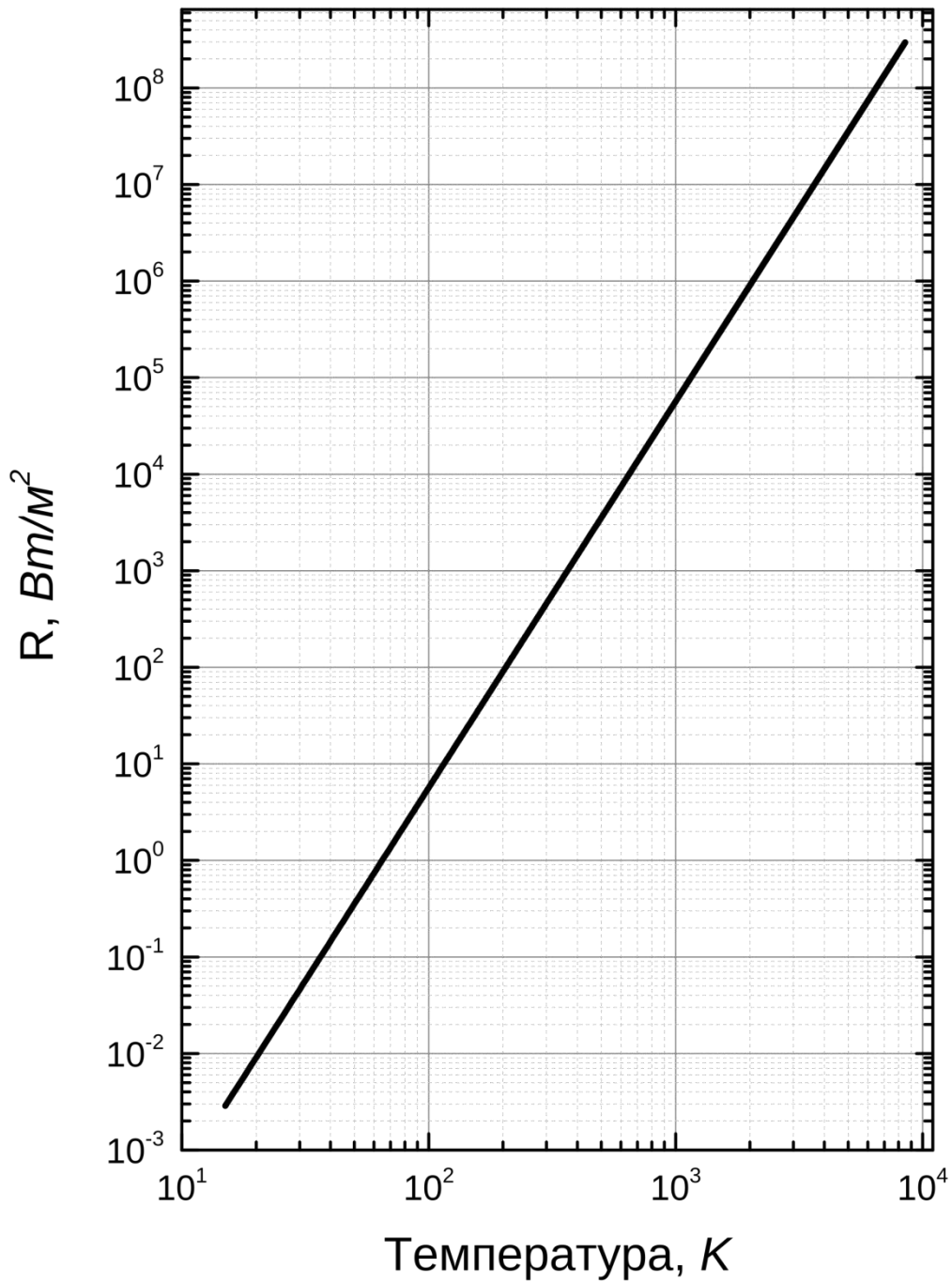
Как следует из решения предыдущего пункта задания, ряд значений $\{\dots, T_{i-1}^4, T_i^4, T_{i+1}^4, \dots\}$ будет представлять собой арифметическую прогрессию с шагом $d = \frac{T_N^4 - T_1^4}{N - 1}$.

Таким образом $T_i^4 = T_1^4 + (i - 1) \cdot d = T_1^4 + (i - 1) \cdot \frac{T_N^4 - T_1^4}{N - 1}$

ОТВЕТ: $T_i = \left[\frac{(N - i) \cdot T_1^4 + (i - 1) \cdot T_N^4}{N - 1} \right]^{\frac{1}{4}}$

Приложение 1

Зависимость энергетической светимости R абсолютно черного тела от температуры



Задание 3 «Cold hands, warm heart»

Аэрогели — класс наноматериалов, представляющих собой гель, в котором жидкая фаза полностью замещена газообразной. Такие материалы обладают рекордно низкой плотностью и демонстрируют ряд уникальных свойств: твёрдость, прозрачность, жаропрочность, чрезвычайно низкую теплопроводность и т.д. Исключительные физико-химические свойства аэрогелей объясняются их структурой — они представляют собой древовидную сеть из объединённых в кластеры наночастиц размером 2-5 нм и пор размерами до 100 нм.



1) (2 балла)

УСЛОВИЕ:

Наиболее распространены кварцевые (SiO_2) аэрогели. Их минимальная плотность равна 1 кг/м^3 (при измерении в вакууме). Оцените какую плотность будет иметь аэрогель, если его поры будут заполнены воздухом при нормальных условиях. Плотность монокристаллического диоксида кремния считать равной 2600 кг/м^3 .

РЕШЕНИЕ

Плотность аэрогеля будет определяться отношением суммарной массы воздуха в порах и массы твердого «остова» к объему, занимаемому данной массой:

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{m_{\text{SiO}_2} + m_{\text{Air}}}{\Delta V} = \rho_{AG} + \frac{\rho_{\text{Air}} (\Delta V - V_{\text{SiO}_2})}{\Delta V} = \dots \\ &= \rho_{AG} + \frac{\rho_{\text{Air}} \left(\Delta V - \frac{m_{\text{SiO}_2}}{\rho_{\text{SiO}_2}} \right)}{\Delta V} = \rho_{AG} + \rho_{\text{Air}} \left(1 - \frac{\rho_{AG}}{\rho_{\text{SiO}_2}} \right). \end{aligned}$$

где

ρ_{AG} - плотность аэрогеля при измерении в вакууме,

ρ_{Air} - плотность воздуха при нормальных условиях,

ρ_{SiO_2} - плотность монокристаллического диоксида кремния.

Ввиду того, что $\rho_{\text{SiO}_2} \gg \rho_{AG}$, можно считать $\rho = \rho_{AG} + \rho_{\text{Air}}$.

Плотность воздуха при нормальных условиях ($P = 10^5 \text{ Па}$, $T = 273 \text{ К}$) может быть найдена из уравнения Менделеева-Клапейрона:

$$P = \frac{\rho_{\text{Air}}}{\mu_{\text{Air}}} \cdot RT \Rightarrow \rho_{\text{Air}} = \frac{P \cdot \mu_{\text{Air}}}{RT} = \frac{10^5 \text{ Па} \times 28 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{моль}}}{8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}} \times 273 \text{ К}} \approx 1,23 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$$

$$\rho = \rho_{AG} + \rho_{Air} = 1,00 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} + 1,23 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} = 2,23 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$$

ОТВЕТ: $\rho = 2,23 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$

2) (4 балла)

УСЛОВИЕ:

Во сколько раз изменится плотность кварцевого аэрогеля, если воздух в его порах заместить водородом при нормальном атмосферном давлении и температуре $t = 750 \text{ K}$?

РЕШЕНИЕ

Плотность водорода при условиях, приведенных в задаче, ($P = 10^5 \text{ Па}$, $T = 750 \text{ K}$) может быть найдена из уравнения состояния идеального газа:

$$P = \frac{\rho_{H_2}}{\mu_{H_2}} \cdot RT \Rightarrow \rho_{H_2} = \frac{P \cdot \mu_{H_2}}{RT} = \frac{10^5 \text{ Па} \times 2 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{моль}}}{8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}} \times 750 \text{ K}} \approx 0,032 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$$

Общая плотность композитного материала

$$\rho = \rho_{AG} + \rho_{H_2} = 1,00 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} + 0,032 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} = 1,032 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$$

$$\frac{\rho_{AG(Air)}}{\rho_{AG(H_2)}} = \frac{2,23 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}}{1,032 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}} \cong 2,16$$

ОТВЕТ: $\frac{\rho_{AG(Air)}}{\rho_{AG(H_2)}} \cong 2,16$

3) (6 баллов)

УСЛОВИЕ:

Коэффициент теплопроводности кварцевого аэрогеля имеет экстремально низкое значение $\kappa = 0,017 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$. Вследствие этого данное вещество находит широкое применение в качестве теплоизоляционного материала.

Труба магистрали горячего водоснабжения радиуса $R = 10 \text{ см}$ покрыта слоем тепловой изоляции толщиной $h = 5 \text{ см}$ из кварцевого аэрогеля. Теплоэлектроцентраль (ТЭЦ), нагревая воду, исходно имеющую температуру окружающей среды $t_{env} = 10^\circ\text{C}$, поддерживает

температуру теплоносителя на входе в магистраль на уровне $t_{in} = 80^\circ\text{C}$. Оцените мощность тепловых потерь на единицу длины трубы в окрестности выхода магистрали из ТЭЦ.

РЕШЕНИЕ

Плотность теплового потока определяется произведением коэффициента теплопроводности среды на локальное значение градиента температуры:

$$q = \frac{\Delta P}{\Delta S} = \frac{\Delta P}{\Delta \ell \cdot 2\pi r} = -\kappa \frac{dT}{dr}$$

где

κ - коэффициент теплопроводности среды,

r - радиальная координата, отсчитанная от оси трубы

$\Delta \ell$ - единица длины трубы в продольном направлении.

Произведем интегрирование в последнем соотношении от внутренней до внешней границы тепловой изоляции

$$\begin{aligned} \frac{\Delta P}{\Delta \ell \cdot 2\pi r} &= \frac{\Delta P}{\Delta \ell} \int_R^{R+h} \frac{dr}{2\pi r} = -\kappa \int_{T_{in}}^{T_{env}} dT \\ \frac{\Delta P}{\Delta \ell} &= \frac{\kappa \int_{T_{env}}^{T_{in}} dT}{\int_R^{R+h} \frac{dr}{2\pi r}} = \frac{2\pi\kappa \cdot (T_{in} - T_{env})}{\ln\left(\frac{R+h}{R}\right)} \\ \frac{\Delta P}{\Delta \ell} &= \frac{2\pi \times 0,017 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}} \times (80 - 10) \text{ К}}{\ln\left(\frac{10+5}{10}\right)} \cong 18,44 \frac{\text{Вт}}{\text{м}} \end{aligned}$$

ОТВЕТ: $\frac{\Delta P}{\Delta \ell} \cong 18,44 \frac{\text{Вт}}{\text{м}}$

ПРИМЕЧАНИЕ: Допускается также решение, в котором ответ в общем виде записан как

$$\frac{\Delta P}{\Delta \ell} = 2\pi R \cdot \kappa \cdot \frac{T_{in} - T_{env}}{h} \cong 14,95 \frac{\text{Вт}}{\text{м}}$$

Числовой ответ в этом случае, конечно, отличается от правильного, но методы интегрального исчисления могут быть достаточно сложны для школьников, даже 11 класса.

4) (4 балла)

УСЛОВИЕ:

С какой минимальной скоростью можно прокачивать горячую воду по данной трубе, чтобы тепловые потери на магистрали длиной $L = 10$ км не превышали 3% от транспортируемой тепловой мощности?

РЕШЕНИЕ

Ввиду того, что регламентируемая доля тепловых потерь достаточно мала $\eta = 3\% \ll 1$, можно считать, что при транспортировке теплоносителя по магистрали его температура сохраняется практически неизменной и рассчитывать величину тепловых потерь исходя из следующего соотношения (см. предыдущую часть решения задания):

$$\frac{\Delta Q^-}{\Delta t} = \int_0^L \frac{\Delta P}{\Delta \ell} dx = \frac{2\pi\kappa \cdot (T_{in} - T_{env})}{\ln\left(\frac{R+h}{R}\right)} \cdot L,$$

где L - длина магистрали.

Количество доставляемой потребителю в единицу времени тепловой энергии можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta Q^+}{\Delta t} &= c_{H_2O} \cdot \frac{\Delta m}{\Delta t} \cdot (T_{in} - T_{env}) = c_{H_2O} \cdot \frac{\rho_{H_2O} \cdot \Delta \ell \cdot S}{\Delta t} \cdot (T_{in} - T_{env}) = \dots \\ &= c_{H_2O} \cdot \rho_{H_2O} \cdot v \cdot S \cdot (T_{in} - T_{env}) \end{aligned}$$

где S - площадь поперечного сечения трубы.

В соответствии с условием $\eta = \frac{\Delta Q^-}{\Delta Q^+} = \frac{\frac{2\pi\kappa \cdot (T_{in} - T_{env})}{\ln\left(\frac{R+h}{R}\right)} \cdot L}{c_{H_2O} \cdot \rho_{H_2O} \cdot v \cdot S \cdot (T_{in} - T_{env})}$, и тогда для скорости

течения теплоносителя получаем

$$\begin{aligned} v &= \frac{2\pi \cdot \kappa \cdot L}{c_{H_2O} \cdot \rho_{H_2O} \cdot \eta \cdot S \cdot \ln\left(\frac{R+h}{R}\right)} = \frac{2 \cdot \kappa \cdot L}{c_{H_2O} \cdot \rho_{H_2O} \cdot \eta \cdot R^2 \cdot \ln\left(\frac{R+h}{R}\right)} \\ v &= \frac{2 \cdot 0,017 \frac{Вт}{м \cdot К} \cdot 10^4 м}{4200 \frac{Дж}{кг \cdot К} \cdot 10^3 \frac{кг}{м^3} \cdot 0,03 \cdot (0,1 м)^2 \cdot \ln\left(\frac{10+5}{10}\right)} \cong 0,67 \frac{м}{с} \end{aligned}$$

ОТВЕТ: $v \cong 0,67 \frac{м}{с}$

5) (4 балла)

УСЛОВИЕ:

В некоторой лаборатории был создан инновационный композитный материал, состоящий из чередующихся параллельных слоев аэрогеля (толщина $b_1 = 1 \text{ мм}$) и кварцевого стекла (толщина $b_2 = 0,5 \text{ мм}$). Из данного материала вырезали кубик (см. рис.). Найдите коэффициенты теплопроводности данного кубика:

- в направлении вдоль слоев
- в направлении перпендикулярном к слоям.

Коэффициент теплопроводности кварцевого стекла $1,38 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$.

РЕШЕНИЕ

Определим коэффициент теплопроводности объекта, как отношение теплового потока к разности температур на его гранях, перпендикулярных к направлению переноса тепла.

При расчете теплопроводности в направлении вдоль слоев разность температур на противоположных узких гранях слоев одинакова, а суммарный тепловой поток складывается из потоков через каждый слой:

$$q = \sum_i q_i$$

Примем, что ребро кубика равно $\ell = n(b_1 + b_2)$, где n - число слоев каждого материала, тогда

$$|q_i| = \kappa_i \cdot S_i \cdot \frac{\Delta T}{\ell} = \kappa_i \cdot b_i \cdot \ell \cdot \frac{\Delta T}{\ell} = \kappa_i \cdot b_i \cdot \Delta T$$

$$q = n \cdot (\kappa_1 \cdot b_1 + \kappa_2 \cdot b_2) \cdot \Delta T = \frac{\ell^2}{b_1 + b_2} \cdot (\kappa_1 \cdot b_1 + \kappa_2 \cdot b_2) \cdot \frac{\Delta T}{\ell}$$

Тогда

$$\kappa_{\square} = \frac{q}{S_{\text{общ}} \cdot \frac{\Delta T}{\ell}} = \frac{\kappa_1 \cdot b_1 + \kappa_2 \cdot b_2}{b_1 + b_2}$$

Производя числовые подстановки параметров из условия задачи

$$\kappa_{\square} = \frac{\kappa_1 \cdot b_1 + \kappa_2 \cdot b_2}{b_1 + b_2} = \frac{0,017 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}} \cdot 1 \text{ мм} + 1,38 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}} \cdot 0,5 \text{ мм}}{1 \text{ мм} + 0,5 \text{ мм}} \cong 0,471 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$$

При расчете теплопроводности в направлении перпендикулярном к слоям тепловой поток, проходящий через каждый слой будет иметь одинаковые значения, общая разность температур будет складываться из изменений температур в пределах толщины каждого слоя:

$$\Delta T = \sum_i \Delta T_i,$$

где ΔT_i может быть найдено из соотношения

$$|q| = \kappa_i \cdot S \cdot \frac{\Delta T_i}{b_i} = \kappa_i \cdot \ell^2 \cdot \frac{\Delta T_i}{b_i}$$

$$\Delta T_i = \frac{|q| \cdot b_i}{\kappa_i \cdot \ell^2} = \frac{|q| \cdot b_i}{\kappa_i \cdot S}$$

Следовательно

$$\Delta T = \sum_i \Delta T_i = \frac{|q|}{S} \sum_i \frac{b_i}{\kappa_i} = \frac{|q|}{S} \cdot n \cdot \left(\frac{b_1}{\kappa_1} + \frac{b_2}{\kappa_2} \right) = \frac{|q|}{S} \cdot \frac{\ell}{b_1 + b_2} \cdot \left(\frac{b_1}{\kappa_1} + \frac{b_2}{\kappa_2} \right)$$

$$\kappa_{\perp} = \frac{q}{S \cdot \frac{\Delta T}{\ell}} = \frac{b_1 + b_2}{\frac{b_1}{\kappa_1} + \frac{b_2}{\kappa_2}}$$

Производя числовые подстановки параметров из условия задачи

$$\kappa_{\perp} = \frac{b_1 + b_2}{\frac{b_1}{\kappa_1} + \frac{b_2}{\kappa_2}} = \frac{1\text{мм} + 0,5\text{мм}}{\frac{1\text{мм}}{0,017 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}} + \frac{0,5\text{мм}}{1,38 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}}} \cong 0,0253 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$$

ОТВЕТ:

$$\kappa_{\square} = \frac{\kappa_1 \cdot b_1 + \kappa_2 \cdot b_2}{b_1 + b_2} \cong 0,471 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$$

$$\kappa_{\perp} = \frac{b_1 + b_2}{\frac{b_1}{\kappa_1} + \frac{b_2}{\kappa_2}} = 0,0253 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$$

Задание 4 «Темная башня»

Аэрографит это наноматериал, который представляет собой синтетическую пену, состоящую из трубчатых волокон углерода. Его структура представляет собой взаимосвязанную сеть углеродных трубок диаметром в несколько микронов, и толщиной стенки около 15 нм. Свойства данного материала (плотность, удельная поверхность, модуль Юнга и т.п.) в сильной степени зависят от технологии его изготовления. Минимальная плотность аэрографита (при измерении в вакууме) составляет $\rho_{min} = 0,18 \text{ кг/м}^3$, что позволяет считать данный материал одним из самых легких твердых веществ. Благодаря своей структуре из взаимосвязанных углеродных трубок, аэрографит значительно более устойчив к деформации, чем другие пористые материалы.



1) (4 балла)

УСЛОВИЕ:

Предел прочности аэрографита составляет 160 кПа при его максимально возможной плотности $\rho = 8,5 \text{ мг/см}^3$. Считая, что предел прочности и плотность материала связаны линейно, определите, какой наибольшей высоты башню с вертикальными стенками можно построить на Земле из аэрографитовых кирпичей с *минимально* возможной плотностью? Ускорение свободного падения на поверхности Земли считать равным $g = 9,81 \text{ м/с}^2$.

РЕШЕНИЕ

Башня не будет рушиться, если механическое напряжение вблизи ее основания $\sigma = \frac{N}{S}$ (где N - сила нормальной реакции, S - площадь основания) не превышает предел прочности:

$$\begin{aligned} N &= mg \\ \sigma_{min} S &\geq mg = \rho_{min} h S g \\ h_{max} &= \frac{\sigma_{min}}{\rho_{min} g} \end{aligned}$$

(Примечание: учет силы Архимеда для башни из материала с **минимальной** плотностью не является необходимым. Можно показать, что при сжатии углеродного каркаса до плотного состояния объем вытесняемого им воздуха будет пренебрежимо мал).

Ввиду того что, в условии задачи заявлено о линейной связи между пределом прочности и плотностью, данное соотношение можно переписать в виде:

$$h_{max} = \frac{\sigma_{max}}{\rho_{max} g} = \frac{160 \text{ кПа}}{8,5 \frac{\text{мг}}{\text{см}^3} \cdot 9,81 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}} \cong 1,92 \cdot 10^3 \text{ м}$$

ОТВЕТ: $h_{max} = \frac{\sigma_{max}}{\rho_{max} g} \cong 1920 \text{ м}$

2) (2 балла)

УСЛОВИЕ:

Каким электрическим сопротивлением между основанием и вершиной будет обладать башня максимально возможной высоты с площадью основания $S = 100 \text{ м}^2$? Удельное электрическое сопротивление аэрографита считать равным $\rho = 5 \text{ Ом} \cdot \text{м}$.

РЕШЕНИЕ

$$R = \rho \cdot \frac{h_{\max}}{S} = 5 \text{ Ом} \cdot \text{м} \cdot \frac{1920 \text{ м}}{100 \text{ м}^2} = 96 \text{ Ом}$$

Расчет в этой задаче достаточно прост, но требует знания высоты башни из предыдущего пункта задания.

ОТВЕТ: $R = 96 \text{ Ом}$

3) (4 балла)

УСЛОВИЕ:

В вершину аэрографитовой башни, параметры которой определены в предыдущих частях задания, ударила молния, продолжительность разряда которой составила $\tau = 0,1 \text{ с}$, а средняя сила тока была равна $\langle I \rangle = 10^5 \text{ А}$. Оцените на сколько градусов нагрелась при ударе молнии темная башня?

Теплоемкость аэрографита из-за его рыхлой структуры можно считать равной теплоемкости воздуха, заполняющего его поры.

РЕШЕНИЕ

Общее количество выделившейся теплоты можно найти с помощью закона Джоуля-Ленца:

$$Q = I^2 R \tau = I^2 \cdot \rho \cdot \frac{h_{\max}}{S} \cdot \tau .$$

Величина изменения температуры находится как

$$Q = c_v \cdot \nu \cdot \Delta t = c_v \cdot \frac{m}{\mu} \cdot \Delta t = c_v \cdot \frac{\rho_{\text{возд}} V}{\mu} \cdot \Delta t = c_v \cdot \frac{\rho_{\text{возд}} S h_{\max}}{\mu} \cdot \Delta t$$

где $\rho_{\text{возд}} = 1,23 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ - плотность воздуха при нормальных условиях (см. Задание 3, п.1),

$c_v = \frac{i+2}{2} R = \frac{7}{2} R = \frac{7}{2} \cdot 8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}} \cong 29 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$ - **изобарная** молярная теплоемкость воздуха

(разряд молнии имеет достаточную продолжительность $\tau = 0,1 \text{ с}$ для расширения воздуха

через поры углеродного каркаса в окружающую атмосферу), $\mu = 29 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$ - молярная масса воздуха.

$$I^2 \cdot \rho \cdot \frac{h_{\max}}{S} \cdot \tau = c_v \cdot \frac{\rho_{\text{возд}} S h_{\max}}{\mu} \cdot \Delta t$$

$$\Delta t = \frac{I^2 \cdot \rho \cdot \mu \cdot \tau}{c_v \cdot \rho_{\text{возд}} \cdot S^2} = \frac{10^{10} \text{ А}^2 \cdot 5 \text{ Ом} \cdot \text{ м} \cdot 29 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{моль}} \cdot 0,1 \text{ с}}{29 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}} \cdot 1,23 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \cdot 10^4 \text{ м}^4} \cong 407 \text{ К}$$

Отметим, что для расчета в данной задаче **не требуется** явного знания высоты темной башни.

ОТВЕТ: $\Delta t = \frac{I^2 \cdot \rho \cdot \mu \cdot \tau}{c_v \cdot \rho_{\text{возд}} \cdot S^2} \cong 407 \text{ К}.$

4) (4 балла)

УСЛОВИЕ:

С вершины башни было сброшено тело массой $m = 5 \text{ кг}$. График зависимости скорости тела от времени падения приведен в приложении 2. Найти силу сопротивления воздуха, действующую на тело через $\tau = 1 \text{ с}$ после начала падения, считая ее пропорциональной квадрату скорости.

РЕШЕНИЕ

Спустя достаточно большое время после начала падения тело летит с установившейся скоростью, которую легко найти из представленного графика: $v_{\text{уст}} = 10 \frac{\text{м}}{\text{с}}$. В таком режиме полета сила тяжести уравновешивается силой сопротивления воздуха

$$mg = \alpha v_{\text{уст}}^2 \Rightarrow \alpha = \frac{mg}{v_{\text{уст}}^2} \cong \frac{5 \text{ кг} \cdot 9,81 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}}{10^2 \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2}} \cong 0,49 \frac{\text{кг}}{\text{м}}$$

В начале падения скорость еще мала и ускорение тела (которое можно снова найти из

графика $a_0 = \frac{2 \frac{\text{м}}{\text{с}}}{0,4 \text{ отн.ед.}} = 5 \frac{\text{м}}{\text{с} \cdot \text{отн.ед.}}$) постоянно и равно ускорению свободного падения

$$a_0 = 5 \frac{\text{м}}{\text{с} \cdot \text{отн.ед.}} = g \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

$$\text{секунда} = \frac{g}{5}, \text{отн.ед.}$$

Время, для которого требуется найти значение силы сопротивления

$$\tau = 1c = 1 \cdot \frac{g}{5}, \text{отн.ед.} \cong 1,96 \text{отн.ед.}$$

Определяя из графика величину скорости в этот момент $v(\tau = 1c) \cong 7,6 \frac{M}{c}$, находим величину

$$\text{силы сопротивления } F_{\text{сопр}} = \alpha \cdot v^2(1c) = 0,49 \frac{K^2}{M} \cdot \left(7,6 \frac{M}{c}\right)^2 \cong 28,3 H.$$

При решении данной задачи допускается использование значения ускорения свободного падения $g = 10 \frac{M}{c^2}$, ответ при этом будет несколько больше ($F_{\text{сопр}} \cong 28,8 H$).

ОТВЕТ: $F_{\text{сопр}} \cong 28,3 H$

5) (6 баллов)

УСЛОВИЕ:

В некоторой лаборатории был создан инновационный композитный материал, состоящий из чередующихся параллельных слоев аэрографита толщиной b_1 и слоев аморфного углерода толщиной b_2 . Из данного материала вырезали кубик. При каком соотношении толщин слоев b_2/b_1 отношение электрического сопротивления кубика в направлении перпендикулярном к слоям к электрическому сопротивлению в направлении вдоль слоев R_{\perp}/R_{\parallel} будет иметь максимальное значение?

Удельное сопротивление аморфного углерода $3,5 \cdot 10^{-5} \text{ Ом} \cdot \text{ м}$.

РЕШЕНИЕ

Примем, что ребро кубика равно $\ell = n(b_1 + b_2)$, где n - число слоев каждого материала, тогда электрическое сопротивление в направлении перпендикулярном к слоям (суть соединенным последовательно):

$$R_{\perp} = \sum_i R_i = \sum_i \rho_i \frac{b_i}{\ell^2} = \frac{n}{\ell^2} (\rho_1 b_1 + \rho_2 b_2) = \frac{1}{\ell} \cdot \frac{\rho_1 b_1 + \rho_2 b_2}{b_1 + b_2},$$

а электрическое сопротивление в направлении перпендикулярном к слоям (соединенным параллельно):

$$\frac{1}{R_{\parallel}} = \sum_i \frac{1}{R_i} = n \cdot \left(\frac{1}{\rho_1} \cdot \frac{S_1}{\ell} + \frac{1}{\rho_2} \cdot \frac{S_2}{\ell} \right) = \frac{\ell}{b_1 + b_2} \cdot \left(\frac{b_1}{\rho_1} + \frac{b_2}{\rho_2} \right)$$
$$R_{\parallel} = \frac{1}{\ell} \cdot \frac{b_1 + b_2}{\frac{b_1}{\rho_1} + \frac{b_2}{\rho_2}}$$

Запишем отношение $\frac{R_{\perp}}{R_{\square}}$:

$$\frac{R_{\perp}}{R_{\square}} = \frac{(\rho_1 b_1 + \rho_2 b_2) \cdot \left(\frac{b_1}{\rho_1} + \frac{b_2}{\rho_2} \right)}{(b_1 + b_2)^2} = \frac{b_1^2 + b_1 b_2 \left(\frac{\rho_1 + \rho_2}{\rho_2 \rho_1} \right) + b_2^2}{b_1^2 + 2b_1 b_2 + b_2^2}$$

Используя обозначения $\frac{b_2}{b_1} = x$ и $\alpha = \frac{\rho_1}{\rho_2} + \frac{\rho_2}{\rho_1}$, перепишем данное выражение в виде

$$\begin{aligned} \frac{R_{\perp}}{R_{\square}}(x) &= \frac{1 + \alpha x + x^2}{1 + 2x + x^2} \\ \frac{d}{dx} \left(\frac{R_{\perp}}{R_{\square}}(x) \right) &= \frac{(\alpha + 2x)(1 + 2x + x^2) - (2 + 2x)(1 + \alpha x + x^2)}{(1 + 2x + x^2)^2} = \dots \\ &= \frac{(\alpha + 2x)(1 + 2x + x^2) - (2 + 2x)(1 + \alpha x + x^2)}{(1 + 2x + x^2)^2} = \dots \\ &= -\frac{(\alpha - 2)(x - 1)}{(x + 1)^3} = 0 \\ x^* &= 1. \end{aligned}$$

ОТВЕТ: наибольшее отношение сопротивлений $\frac{R_{\perp}}{R_{\square}}$ достигается при равенстве толщин

слоев, и не зависит от соотношения между удельными сопротивлениями материалов слоев (за исключением случая $\alpha = 2 \Leftrightarrow \rho_1 = \rho_2$)

Приложение 2

