ПРОФИЛЬ «БОЛЬШИЕ ДАННЫЕ И МАШИННОЕ ОБУЧЕНИЕ»

Профиль «Большие данные и машинное обучение» погружает участников в выполнение реальных задач, связанных с анализом больших объемов данных и разработкой реальных приложений для анализа данных. Профиль включает в себя задачи по двум школьным предметам: математика и информатика.

§1 Первый отборочный этап

Первый отборочный тур проводится индивидуально в сети интернет, работы оцениваются автоматически средствами системы онлайн-тестирования. Для каждой из параллелей (9 класс или 10-11 класс) предлагается свой набор задач по физик, информатика общая для всех классов. На решение задач учащимся отводилось 2 суток. Первый этап состоял из двух независимых попыток с разными задачами, участник мог решать только одну попытку (в случае, если он решал обе, в зачет шла лучшая). Решение каждой задачи дает определенное количество баллов. Баллы зачисляются в полном объеме за правильное решение задачи. Участники получают оценку за решение задач в совокупности по всем предметам данного профиля (математика и информатика).

1.1 Первая попытка
Задачи по математике (9 класс)

Примечание: в условиях всех задач вместо наборов параметров случайным образом генерировались некоторые наборы чисел. Полученный численный ответ необходимо было округлить до ближайшего целого числа.

Задача 1.1.1

Условие:

Вася начал подставлять под x в функцию $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ различные числа и получать различные значения функции. При этом одно значение он точно не смог бы получить при всём желании. Какое же?

Решение:

Преобразуем данное в условии выражение:

$$\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{\frac{a}{c}x+\frac{b}{c}}{x+\frac{d}{c}}=\frac{\frac{a}{c}\left(x+\frac{d}{c}\right)-\frac{a}{c}\cdot\frac{d}{c}+\frac{b}{c}}{x+\frac{d}{c}}=\frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c^2}\cdot\frac{1}{x+\frac{d}{c}}$$

Таким образом, график функции $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ получается сдвигом гиперболы $y=\frac{k}{x}$ (где $k=\frac{bc-ad}{c^2}$¿ на вектор $\left(\frac{-d}{c};\frac{a}{c}\right)$, и, следовательно, функция $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ принимает все значения, кроме $\frac{a}{c}$

Ответ:

$$\frac{a}{c}$$

Задача 1.1.2

Условие:

Длина первого вектора равна a, длина второго вектора равна b, а длина суммы этих векторов равна s. Чему равна длина разности этих векторов?

Решение:

Пусть $\overrightarrow{¿a} \vee ¿a$, $|\vec{b}|=b$, $|\vec{a}+\vec{b}|=s$

Тогда

$$s^2+|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}+\vec{b}|^2+|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\,\vec{b}+|\vec{b}|^2+|\vec{a}|^2-2\vec{a}\,\vec{b}+|\vec{b}|^2=2\left(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2\right)=2\left(a^2+b^2\right)$$

Откуда получаем, что $|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)-s^2}$

Ответ:

$\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)-s^2}$.

Задача 1.1.3

Условие:

Основания AD и BC трапеции ABCD равны соответственно a и b. Диагонали AC и BD этой трапеции пересекаются в точке O. Известно, что площадь треугольника AOB равна S. Найдите площадь трапеции ABCD.

Решение:

Треугольники ABD и ACD имеют общее основание AD и равные высоты (они равны расстоянию между прямыми AD и BC), следовательно, их площади равны, а значит, равны и площади треугольников AOB и COD (получаемые вычитанием из площадей треугольников ABD и ACD соответственно площади треугольника AOD).

Следовательно, $S_{\Delta AOB}=S_{\Delta COD}=S$

Из параллельности сторон AD и BC следует подобие треугольников AOD и BOC, откуда получаем, что $\frac{AO}{OC}=\frac{DO}{OB}=\frac{a}{b}$ Треугольники AOD и AOB имеют общую высоту, проведённую из вершины A, откуда получаем, что $\frac{S_{\Delta AOD}}{S_{\Delta AOB}}=\frac{DO}{OB}=\frac{a}{b}$ Аналогично, треугольники COB и COD имеют общую высоту, проведённую из вершины C, откуда получаем, что $\frac{S_{\Delta COD}}{S_{\Delta COB}}=\frac{DO}{OB}=\frac{a}{b}$ Значит, $S_{\Delta AOD}=S\cdot\frac{a}{b}$ и $S_{\Delta COB}=S\cdot\frac{b}{a}$

Тогда

$$S_{ABCD}=S_{\Delta AOD}+S_{\Delta AOB}+S_{\Delta BOC}+S_{\Delta COD}=S\cdot\frac{a}{b}+S+S\cdot\frac{b}{a}+S=S\cdot\frac{a^2+ab+b^2+ab}{ab}=\frac{S(a+b)^2}{ab}$$

Ответ:

$$\frac{S(a+b)^2}{ab}$$

Задача 1.1.4

Условие:

Астроном поднимается вверх на высокую цилиндрическую башню по винтовой лестнице, которая расположена снаружи башни вдоль её стены. Лестница всё время образует с горизонтом угол, градусная мера которого равна α . Известно, что высота башни, выраженная в метрах, равна h , а диаметр основания башни, выраженный в метрах, равен d . Найдите путь, который придётся преодолеть астроному, чтобы достичь вершины башни. Ответ выразите в метрах.

Решение:

Рассмотрим развёртку боковой поверхности башни-цилиндра (возможно, включающей более одного оборота вокруг башни). Развёртка будет представлять собой прямоугольник высоты h . Траектория движения астронома на развёртке будет представлять собой диагональ данного прямоугольника, а угол, образуемый лестницей с горизонтом, – угол между этой диагональю и основанием. Тогда длина диагонали прямоугольника будет равна $\frac{h}{\sin\alpha^\circ}=\frac{h}{\sin\frac{\pi\alpha}{180}}$

Ответ:

$$\frac{h}{\sin\frac{\pi\alpha}{180}}$$

Задача 1.1.5

Условие:

Вася сложил два числа и получил a . Затем он сложил квадраты этих двух чисел и получил b . Наконец Вася сложил кубы этих чисел. Какой ответ получил Вася в последний раз, если он не допустил ошибок в своих расчётах?

Решение:

Пусть x и y – два числа, рассматриваемые Васей, причём $x+y=a$, $x^2+y^2=b$, $xy=c$

Тогда $a^2=(x+y)^2=x^2+y^2+2xy=b+2c$ откуда $c=\frac{a^2-b}{2}$

Тогда $x^3+y^3=(x+y)(x^2+y^2-xy)=a(b-c)=a\left(b-\frac{a^2-b}{2}\right)=\frac{a(3b-a^2)}{2}$

Ответ:
$\frac{a(3b-a^2)}{2}$.

1.2 Первая попытка
Задачи по математике (10 – 11 класс)

Задача 1.2.1
Условие:

Вася изучал тригонометрические функции $f(x)=\sin x$ и $g(x)=\cos x$. Первым делом он умножил функцию $f(x)$ на себя и на число a. Затем умножил $f(x)$ на $g(x)$ и на число b. И наконец умножил функцию $g(x)$ на себя и на число c. В конце концов Вася сложил все три полученных произведения и подставил в образовавшуюся функцию вместо переменной x какое-то число. Чему равно наибольшее число, которое Вася мог при этом получить?

Решение:

Рассмотрим функцию $h(x)=a\sin^2 x+b\sin x\cos x+c\cos^2 x$. В задаче требуется найти наибольшее значение этой функции. Но $a\sin^2 x+b\sin x\cos x+c\cos^2 x=a\frac{1-\cos 2x}{2}$ + $\frac{b}{2}\cdot 2\sin x\cos x+c\frac{1+\cos 2x}{2}$ = $\frac{1}{2}(a+c+b\sin 2x+(c-a)\cos 2x)$

Тогда

$u(x)=b\sin 2x+(c-a)\cos 2x=\sqrt{b^2+(c-a)^2}\left(\frac{b}{\sqrt{b^2+(c-a)^2}}\sin 2x+\frac{c-a}{\sqrt{b^2+(c-a)^2}}\cos 2x\right)$ = $\sqrt{b^2+(c-a)^2}(\cos\varphi\sin 2x+\sin\varphi\cos 2x)$ = $\sqrt{b^2+(c-a)^2}\sin(2x+\varphi)$

где $\varphi - \textit{такой угол, что} \sin\varphi=\frac{c-a}{\sqrt{b^2+(c-a)^2}}$, $\cos\varphi=\frac{b}{\sqrt{b^2+(c-a)^2}}$

Следовательно, наибольшее значение функции $u(x)$ равно $\sqrt{b^2+(c-a)^2}$

Тогда наибольшее значение функции $h(x)\ \textit{равно}\ \frac{1}{2}\left(a+c+\sqrt{b^2+(c-a)^2}\right)$

Ответ:

$\frac{1}{2}\left(a+c+\sqrt{b^2+(c-a)^2}\right)$

Задача 1.2.2
Условие:

Длина первого вектора равна a, длина второго вектора равна b, длина третьего вектора равна c. При этом длина суммы первого и второго векторов равна z, длина суммы второго и третьего векторов равна x, а длина суммы третьего и первого векторов равна y. Чему равна длина суммы всех трёх векторов?

Решение:

Пусть $|\vec{a}|=a$, $|\vec{b}|=b$, $|\vec{c}|=c$, $|\vec{a}+\vec{b}|=z$, $|\overrightarrow{b+c}|=x$, $|\vec{c}+\vec{a}|=y$.

Тогда $z^2=|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2\vec{a}\vec{b}=a^2+b^2+2\vec{a}\vec{b}$

Откуда $2\vec{a}\vec{b}=z^2-a^2-b^2$

Аналогично получаем, что $2\vec{b}\vec{c}=x^2-b^2-c^2$ и $2\vec{c}\vec{a}=y^2-c^2-a^2$

Тогда:

$|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+2\vec{a}\vec{b}+2\vec{b}\vec{c}+2\vec{c}\vec{a}=a^2+b^2+c^2+(z^2-a^2-b^2)+(x^2-b^2-c^2)+(y^2-c^2-a^2)$ = $x^2+y^2+z^2-a^2-b^2-c^2$, откуда $|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2-a^2-b^2-c^2}$

Ответ:

$\sqrt{x^2+y^2+z^2-a^2-b^2-c^2}$

Задача 1.2.3
Условие:

На плоскости расположены две окружности, касающиеся внешним образом. Центр первой окружности находится в точке A, а центр второй окружности - в точке D. Радиусы первой и второй окружностей равны соответственно r_1 и r_2 Некоторая прямая касается первой окружности в точке B, а второй окружности - в точке C (точки B и C не совпадают). Найдите площадь четырёхугольника ABCD.

Решение:

Проведём радиусы AB и DC данных окружностей. Тогда углы ABC и DCB прямые. Так как касание окружностей внешнее, то $AD=r_1+r_2.$ Без ограничения общности можно считать, что $r_2\geq r_1$ Опустим из точки A перпендикуляр AH на прямую DC. Тогда точка H будет лежать между точками C и D, причём $CH=AB=r_1$ как противоположные стороны прямоугольника ABCH. Тогда $HD=r_2-r_1$, и по теореме Пифагора для треугольника AHD $AH=\sqrt{AD^2-HD^2}$ = $\sqrt{(r_1+r_2)^2-(r_2-r_1)^2}$ = 2 $\sqrt{r_1 r_2}$

Четырёхугольник ABCD складывается из прямоугольника ABCH и прямоугольного треугольника AHD (возможно, вырожденного). Следовательно, $S_{ABCD}=S_{ABCH}+S_{\Delta\, AHD}=r_1\cdot 2\sqrt{r_1 r_2}+\frac{1}{2}(r_2-r_1)\cdot 2\sqrt{r_1 r_2}=(r_1+r_2)\sqrt{r_1 r_2}$

Ответ:
$(r_1+r_2)\sqrt{r_1 r_2}$

Задача 1.2.4
Условие:
На стене башни, имеющей форму сужающегося кверху конуса, сидит паук. Высота башни, выраженная в метрах, равна h , а диаметр основания башни, выраженный в метрах, равен d . Паук ползёт из точки A в точку B по стене башни, причём расстояние от вершины башни до каждой из точек A и B, выраженное в сантиметрах, равно s , а точки A и B при этом симметричны относительно оси башни (прямой, проходящей через её вершину перпендикулярно основанию). Чему равно наименьшее расстояние, которое мог проползти паук?

Решение:
Так как вершина башни-конуса проектируется в центр основания, то по теореме Пифагора образующая конуса равна $L=\sqrt{h^2+\left(\frac{d}{2}\right)^2}$. Рассмотрим развёртку боковой поверхности конуса. Она представляет собой круговой сектор, радиус которого равен L а длина дуги равна πd . Тогда центральный угол этого сектора равен $\alpha=\frac{\pi d}{L}$
Пусть O – вершина конуса. Угол AOB в два раза меньше центрального угла сектора, то есть равен $\angle AOB=\frac{\alpha}{2}=\frac{\pi d}{2L}=\frac{\pi d}{2\sqrt{h^2+\left(\frac{d}{2}\right)^2}}=\frac{\pi d}{\sqrt{4h^2+d^2}}.$ Проведём в равнобедренном треугольнике AOB высоту OH (которая также будет являться медианой и биссектрисой). Тогда $\angle AOH=\frac{\angle AOB}{2}=\frac{\pi d}{2\sqrt{4h^2+d^2}}$

$AH=s\cdot\sin\angle AOH$; $AB=2s\cdot\sin\angle AOH=2s\cdot\sin\frac{\pi d}{2\sqrt{4h^2+d^2}}$
Длина AB и будет наименьшим путём из A в B по поверхности башни.

Ответ:

$$2s\cdot\sin\frac{\pi d}{2\sqrt{4h^2+d^2}}$$

Задача 1.2.5

Условие:

Вася сложил два числа и получил a. Затем он сложил кубы этих двух чисел и получил b. Наконец Вася сложил квадраты этих чисел. Какой ответ получил Вася в последний раз, если он не ошибся в вычислениях?

Решение:

Пусть x и y – два числа, рассматриваемые Васей, причём

$x+y=a$, $x^3+y^3=b$, $xy=c$

Тогда

$$b=x^3+y^3=(x+y)(x^2+y^2-xy)=(x+y)((x+y)^2-2xy-xy)=a(a^2-3c)$$

Откуда $c=\dfrac{a^3-b}{3a}$

Тогда $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=a^2-2c=a^2-2\cdot\dfrac{a^3-b}{3a}=\dfrac{a^3+2b}{3a}$

Ответ:

$\dfrac{a^3+2b}{3a}$.

1.3 Первая попытка
Задачи по информатике (9-11 класс)

Задача 1.3.1

Условие:

Даны два отрезка. Каждый отрезок задан четырьмя числами - координатами x и y первой и второй точек: x1, y1, x2, y2.

Вам даны 8 чисел, разделенных пробелами - координаты отрезков. Необходимо вывести 1, если отрезки пересекаются в одной точке и 0, если не пересекаются.

Все числа (координаты) на входе - целые числа от 0 до 1000 включительно.

Решение:

```
def solve(dataset):
    #( ((ax1,ay1),(ax2,ay2)),((bx1,by1),(bx2,by2))) = dataset.split()
    #dataset = "10 0 10 1000 0 10 1000 10"
    vec= dataset.split()
    ax1 = int(vec[0])
    ay1 = int(vec[1])
    ax2 = int(vec[2])
    ay2= int(vec[3])
    bx1= int(vec[4])
    by1= int(vec[5])
    bx2= int(vec[6])
    by2 = int(vec[7])
```

```
    vec1 = ((ax1-bx1),(ay1-by1))
    vec2 = ((ax2-bx1),(ay2-by1))
    vecb = ((bx2-bx1),(by2-by1))
    #print(vec1)
    #print(vec2)
    #print(vecb)

    poten1 = (vec1[0]*vecb[1]-vec1[1]*vecb[0])*(vec2[0]*vecb[1]-
vec2[1]*vecb[0])
    #print(poten1)

    vec1 = ((bx1-ax1),(by1-ay1))
    vec2 = ((bx2-ax1),(by2-ay1))
    veca = ((ax2-ax1),(ay2-ay1))
    #print(vec1)
    #print(vec2)
    #print(veca)
    poten2 = (vec1[0]*veca[1]-vec1[1]*veca[0])*(vec2[0]*veca[1]-
vec2[1]*veca[0])
   # print(poten2)

    if (poten1<=0 and poten2<=0):
        #print("1")
        return str("1")
    return str("0")
import sys
print (solve(sys.stdin.read())
```

Задача 1.3.2

Условие:

Введите в поле ответа число, равное 7 в степени 7777 (все цифры подряд).

Ответ:

```
2125480822734347190734559157188415686216846469609103499612472814403239
9486529173703470477646087956423136618120952999513148766594721786767135
4939319567954695651024313850659516731862931344432789205552901324857651
3025879171087307655216704777534953708227235706496090906709605291649190
8961106775663512196379763764234080243169421461673441950326640061980584
3273333069132681300354876569258641558373576002091177811380504539376366
5014436835423021269265627910872328896843840987607487941692575019367098
1429223104910819299819105917399257204327136799508207197710442243474156
8174656604395577010762734845574719962701476270782136560692143521985107
7908602876495833727013198521853164175282933813226447107931781636476815
2449020541618197339462741970524750849066908362068286040335269454087961
3154547114012007139356606442723490721444585172295953212464427717627623
1478161361226512308352602055221505582546947471298082722669319120756065
7572255777110712806285003100052624276314407020836486597795944291092098
5736044559407958834685999933863210257994635456798225902322203764904157
9843957257210255748951049507351574052481573639967573781452513663517170
0383561715671744085267694146327057492981981391917434569301441149621525
2730785437177931573483958424455307964893810060776164287718160673647033
2090474785423332436635217892381243705250054513594538972514830857916098
4694540561097603848917299592184268922982354048989152411431733702876789
9110079888776987166837137569697695024027087070599467085602581723410108
2311852506201168589196638170710329622414612994598826933450408953980658
2490497150688078102201897914704333989686650015714769432674830760893282
```

1934962289429259533231438187511040420111976512360666541868046903565862
8496587654967368336697543359806632461609616119041959768676975853856644
7594637968421515319248941724173818782841145771326257318666910092173990
0419445313800783464646333642819544261456630103641348557206130045846595
8910557495636321237744822622355398086412450177905278126009303218246409
2828472152820378813364950148781513023182906923565054947465273803463690
6624933904189827681075258845218825971354348814103411774988969688046936
5668524618187163871730640710654936562819019630469336975929644349308298
0259662253039437861355919176778553121975148468284090447071447604698248
6038149850753015407756608016260971794369471619217026333446735712584816
1283801499749679791514239545930881779344890282711961537365146398231285
8754528532288795579261437696560231603080525546946632480701865241612323
6731978090171025382547212169654306267690291203744650996663767143250479
1503234445490781451750231298609415235878445526319936492576058003314743
3713385286481462492681219471298566552107717036838466197855772655450678
0559608697621696582141169424564913305572336690063205944333075751937145
9167311642307064618558987820367821905227530555494583816904672937770777
5862905522337242234798350160915849721499200431657659767347853222013003
2894952427069637154584861099451199436738490050509485753951027121893828
3803290361469580963849952526741316152837081645332245574673925880835701
9792422968388417163251591809572954656666949738736203835999779786577392
7595029305384297039386902074114943009326619769911535719061787228593814
7299520807919961902596994185907468429304638652270257770206254063608866
8631474436992283801027107423945651627363223803147430392858904501414400
6410990595292610533290491724056539605630505242717444173463952980466670
8633463354233268816314346521462090874623194869477998366411333631177466
2385647171279689741377265519551083508759782354068121571421338332497738
1613980110149763830852172124220396047718657457856322787572082877175924
4620781612739462537148289136809144297374905290586317870148047515036436
5137814889348439105834679413297676837660667117064044403551989789540952
9558225391190907442650330870187223967348294314153755669674335662457088
6132551094412143289858802362992261058204815923412464406118113590792575
3671760090501229449407236633985090048346005178432555177343196889883924
4572495002723602264412689437601804518864013111697663218409671637053675
1807784255737265060948251396042572278333820211677647451725791753366624
1563023009879524140222720492753478136373841199898956567547938544773547
3854288840833450878425044770761662684350295995759882685666204109423335
5367278808167023735768185621290429999725863392378000729573844787434477
8276368234256033433052118855899304985309645151280247526522319686626774
2758491426586114820847639238679168867234766029284554881363445145574483
2131726222795134049894875341187791794155847037447860483210054953170938
8024876101402690189985616154045092253382536062120714503607677598665562
6953332870140533414649571188090012791513760763644571879227650410805166
8542700200197029582710168342592971570248818432043574810997267932741550
2261713950441499252502891722632005880064700348969362995823424956013712
5567382535396715040073743573151313658420937750950102284472799250483289
8275110702618469380525998582401799747326361346964096778155180563552494
1744891771603458577580885716567839538640821406597251990904352950280898
2325943186123022541341743942059395260455789780118976917301841397851841
4596743028176147222096065230484661059841749500829435663127593028267445
7470139209178628756716950807576928989396421333639897770462136146756355
2607095134479791158683830693023161212724246148779216297522273068524346
0473348012469128360437443026486920859249691862861800300051337430249046
4481107683601073293043198324852171776044173997156225040179762570768978
8904902806581172388399051047419102130173952571784741548336279037086862
7452516952808526390603081644098378489153527263055520356393467471156613
1241627880511094332214278500531658473990593043192284669490720382692190
1264139344751267852723977993746752175098291854845582573212879610765021

```
4924409858727398884680982726457341533668837135965708526511812890525187
2117634926418180966549777993342806830780788122805946035251109338618796
7271518450351818526626828073350274108672691909967722373356532426592302
4207031463145196761231708951747174476368067694507567644076205693855802
8612161828510746527756500469829281534301996276929496613440677224788335
3416395653507812785477728198043485732953654872780598150959679563509694
9160789120860382091864378595971206996842912126922500102411853301439073
0111774304791145084017696967600921736369105101562670323836373237197639
4255418927784519489424045588419793213896513260095549504371826732734473
4344479234155295305341115922030181017268184503917514292616846285832347
7582483280164265504989553780061211822378352950363680355548131479132201
6979489292388799946688770410149098866148378054790934364048478713436789
898860790403841653484413175555603613854659110204357340153792 07
```

Задача 1.3.3

Условие:

В кругу стоит N неокрашенных стульев. Маляр выбирает первый стул и красит, и затем красит каждый шестой стул. Маляр будет красить стулья до тех пор, пока не встретит уже окрашенный стул.

На вход подается одно число - количество стульев в кругу от 1 до 100. Необходимо определить, будут ли по завершении работы маляра неокрашенные стулья, и вывести в качестве ответа 0, если все стулья покрашены, или 1, если остались непокрашенные стулья.

Ответ:

```
def solve(dataset):
    vec= dataset.split()
    a = int(vec[0])
    #int(vec[0])
    b = 6
    done = [0]
    current = 0
    for i in range(a-1):
        newNum = (current+b)%a
        #print newNum
        #print done
        if (newNum in done):
            if (a>len(done)):
                return str("1")
            return str("0")
        current = newNum
        done.append(newNum)
    return str("0")
```

Задача 1.3.4

Условие:

В кругу N непокрашенных стульев. Маляр выбирает стул и красит его, потом по кругу отсчитывает k стульев и красит k-й, и так далее, пока он не встретит уже окрашенный стул.

Например, если в кругу 4 стула и маляр красит каждый второй, то будут покрашены только первый и третий.

На вход подается два числа, разделенные пробелом: первое число - это количество стульев в кругу - число от 1 до 1000, а второе - это шаг, с которым маляр красит стулья. Шаг может быть больше количества стульев в кругу.

На выход необходимо передать целое число - количество неокрашенных стульев, оставшихся в кругу после завершения работы маляра.

Ответ:

```
def solve(dataset):
    vec= dataset.split()
    a = int(vec[0])
    #int(vec[0])
    b = int(vec[1])
    done = [0]
    current = 0
    for i in range(a-1):
        newNum = (current+b)%a
        #print newNum
        #print done
        if (newNum in done):
            return str(a-len(done))
        current = newNum
        done.append(newNum)
    return str("0")
import sys
print (solve(sys.stdin.read())
```

Задача 1.3.1

Условие:

На вход дается ряд чисел, разделенных пробелами - количество монет и купюр различного номинала покупателя и стоимость покупки. Необходимо определить, может ли покупатель расплатиться без сдачи.

Первое число - количество монет номиналом 1, затем монет номиналом 5, затем купюр с номиналом 10, 50, 100, и последнее число - стоимость покупки. В качестве результата необходимо вывести 0, если нельзя совершить покупку без сдачи, и 1, если можно приобрести товар без сдачи.

Ответ:

```
ef solve(dataset):
    vec= dataset.split()
    a1  = int(vec[0])
    a5  = int(vec[1])
    a10  = int(vec[2])
    a50  = int(vec[3])
    a100  = int(vec[4])
    res  = int(vec[5])

    if (100*a100>=res):
        k = int(res//100)
        res = res - 100*k
    else:
        res=res-100*a100
    if (50*a50>=res):
        k = int(res//50)
        res = res - 50*k
    else:
        res=res-50*a50
```

```
    if (10*a10>=res):
        k = int(res//1)
        res = res - 100*k
    else:
        res=res-10*a10

    if (5*a5>=res):
        k = int(res//5)
        res = res - 5*k
    else:
        res=res-5*a5

    if (1*a1>=res):
        return("1")
    return("0")
import sys
print (solve(sys.stdin.read())
```

1.4 Вторая попытка
Задачи по математике (9 класс)

Задача 1.4.1

Условие:

Вася продолжил изучать функции. На этот раз он стал подставлять в качестве x в функцию $y=ax+\frac{b}{x}$ различные числа и получать соответствующие значения функции. Какое наименьшее положительное значение он мог при этом получить? (Числа a и b положительные.)

Решение:

Докажем, что для неотрицательных чисел p и q верно неравенство $p+q\geq 2\sqrt{pq}$, причём равенство в нём достигается при $p=q$

Действительно, $p+q-2\sqrt{pq}=\left(\sqrt{p}\right)^2-2\sqrt{p}\sqrt{q}+\left(\sqrt{q}\right)^2$ = $\left(\sqrt{p}-\sqrt{q}\right)^2\geq 0$
Откуда следует требуемое.

При $x<0$ $ax+\frac{b}{x}<0$. Если $x>0$, то применим доказанное неравенство для $p=ax$ и $q=\frac{b}{x}$. Получим, что $ax+\frac{b}{x}\geq 2\sqrt{\left(ax\cdot\frac{b}{x}\right)}$ = $2\sqrt{ab}$, причём равенство достигается при ax = $\frac{b}{x}$ $\Longleftrightarrow x=\sqrt{\frac{b}{a}}$

Ответ:
$2\sqrt{ab}$.

Задача 1.4.2

Условие:

Длина суммы двух векторов равна x, а длина разности этих двух векторов равна y. Чему равно скалярное произведение этих векторов?

Решение:

Пусть $|\vec{a}+\vec{b}|=x$, $|\vec{a}-\vec{b}|=y$

Тогда

$$x^2-y^2¿|\vec{a}+\vec{b}|^2-|\vec{a}-\vec{b}|^2=\left(|\vec{a}|^2+2\vec{a}\vec{b}+|\vec{b}|^2\right)-\left(|\vec{a}|^2-2\vec{a}\vec{b}+|\vec{b}|^2\right)=4\vec{a}\vec{b},$$

Откуда $\vec{a}\vec{b}=\dfrac{x^2-y^2}{4}$.

Ответ:

$$\frac{x^2-y^2}{4}$$

Задача 1.4.3

Условие:

На сторонах AB и BC треугольника ABC отмечены точки N и M соответственно. Точка делит M отрезок BC в отношении $c:d$, считая от точки C. Точка N делит отрезок AB в отношении $a:b$, считая от точки A. Отрезки AM и CN пересекаются в точке O. Чему равна площадь треугольника AOC, если известно, что площадь треугольника ABC равна S?

Решение:

Проведём через точку N прямую, параллельную AM и пересекающую отрезок BM в точке E. Тогда по теореме Фалеса $\dfrac{EM}{BE}=\dfrac{AN}{NB}=\dfrac{a}{b}$. По теореме Фалеса $\dfrac{NO}{OC}=\dfrac{EM}{MC}=\dfrac{EM}{BM}\cdot\dfrac{BM}{MC}=\dfrac{a}{a+b}\cdot\dfrac{d}{c}$. Пусть $S_{\Delta AOC}=x$. Тогда, поскольку треугольники ANO и AOC имеют общую высоту, проведённую из вершины A, получаем, что $\dfrac{S_{\Delta ANO}}{S_{\Delta AOC}}=\dfrac{NO}{OC}=\dfrac{ad}{(a+b)c}$ $\Rightarrow$ $S_{\Delta ANO}=\dfrac{ad}{(a+b)c}x$

$$\Rightarrow S_{\Delta ANC}=S_{\Delta ANO}+S_{\Delta AOC}=\frac{ad}{(a+b)c}x+x=\frac{ac+ad+bc}{(a+b)c}x$$

. Треугольники ANC и ABC имеют общую высоту, проведённую из вершины C, значит, $\dfrac{S_{\Delta ANC}}{S_{\Delta ABC}}=\dfrac{AN}{AB}=\dfrac{a}{a+b}$ $\Rightarrow$ $S_{\Delta ANC}=\dfrac{a}{a+b}S$

Из равенства $\frac{ac+ad+bc}{(a+b)c}x=S_{\Delta ANC}=\frac{a}{a+b}S$ находим, что $x=\frac{acS}{ac+ad+bc}$

Ответ:
$\frac{acS}{ac+ad+bc}$.

Задача 1.4.4
Условие:
Человек-паук перемещается по стенам и крыше небоскрёба, имеющего форму прямоугольного параллелепипеда. Известно, что длина небоскрёба, выраженная в метрах, равна a ; ширина небоскрёба, выраженная в метрах, равна b ; высота небоскрёба, выраженная в метрах, равна h . Известно, что маршрут человека-паука начинается у подножия небоскрёба в юго-западном углу, а заканчивается на крыше здания в северо-восточном углу. Чему равна наименьшая длина такого маршрута? Ответ выразите в метрах.

Решение:
Рассмотрим развёртку небоскрёба-параллелепипеда на плоскость. Траекторией кратчайшего пути из вершины параллелепипеда в прямо противоположную ей вершину на развёртке будет диагональ прямоугольника, составленного из двух соседних граней параллелепипеда. Соседние стороны этого прямоугольника будут равны $a+b$ и h , либо $a+h$ и b , либо $b+h$ и a . Соответственно, по теореме Пифагора возможные значения наименьшей длины маршрута человека-паука – это
$\sqrt{(a+b)^2+h^2}$, $\sqrt{(a+h)^2+b^2}$ и $\sqrt{(b+h)^2+a^2}$

Так как по условию $h>a$, то $\sqrt{(a+b)^2+h^2}<\sqrt{(b+h)^2+a^2}$

Действительно, $\sqrt{(a+b)^2+h^2}<\sqrt{(b+h)^2+a^2}\Longleftrightarrow(a+b)^2+h^2$ < $(b+h)^2+a^2\Longleftrightarrow a^2+2ab+b^2+h^2<b^2+2bh+h^2+a^2\Longleftrightarrow$ $2ab<2bh$ $\Longleftrightarrow$ $a<h.$ Аналогично, из условия $h>b$ следует, что $\sqrt{(a+b)^2+h^2}<\sqrt{(a+h)^2+b^2}$

Ответ:
$\sqrt{(a+b)^2+h^2}$

Задача 1.4.5
Условие:
Вася продолжил производить действия с числами. Сначала он сложил три числа и получил a . Потом сложил квадраты этих трёх чисел и получил b . Затем он перемножил эти три числа и получил c . Наконец Вася сложил числа, обратные к трём данным числам. Какое число получил в итоге Вася, если он по-прежнему считает безошибочно?

Решение:

Пусть $x+y+z=a$, $x^2+y^2+z^2=b$ и $xyz=c$

Тогда $a^2=(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx=b+2(xy+yz+zx)$

Откуда $xy+yz+zx=\dfrac{a^2-b}{2}$

Следовательно, $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{xy+yz+zx}{xyz}=\dfrac{a^2-b}{2c}$

Ответ:

$\dfrac{a^2-b}{2c}$

1.5 Вторая попытка
Задачи по математике (10-11 классы)

Задача 1.5.1

Условие:

Вася продолжил изучать тригонометрические функции. В этот раз он рассматривал функции $f(x)=tg\,x$ и $g(x)=ctg\,x$. Первым делом он умножил функцию $f(x)$ на себя и на число a Затем умножил $f(x)$ на $g(x)$ и на число b И наконец умножил функцию $g(x)$ на себя и на число c. В конце концов Вася сложил все три полученных произведения и подставил в образовавшуюся функцию вместо переменной x какое-то число. Чему равно наименьшее число, которое Вася мог при этом получить? (По условию $a>0, b>0, c>0$)

Решение:

Докажем, что для неотрицательных чисел p и q верно неравенство $p+q\geq 2\sqrt{pq}$, причём равенство в нём достигается при $p=q$

Действительно, $p+q-2\sqrt{pq}=(\sqrt{p})^2-2\sqrt{p}\sqrt{q}+(\sqrt{q})^2$ = $(\sqrt{p}-\sqrt{q})^2\geq 0$ откуда следует требуемое.

Рассмотрим функцию $h(x)=a\,tg^2x+b\,tg\,x\,ctg\,x+c\,ctg^2x$, наименьшее значение которой требуется найти.

Применим доказанное неравенство для $p=a\,tg^2x$ и $q=c\,ctg^2x$

Получим, что $a\,tg^2x+c\,ctg^2x\geq 2\sqrt{(a\,tg^2x\cdot c\,ctg^2x)}$ = $2\sqrt{ac(tg\,x\,ctg\,x)^2}=2\sqrt{ac}$, причём равенство достигается при $a\,tg^2x$ = $c\,ctg^2x \Longleftrightarrow tg^4x=\dfrac{c}{a}$ $\Longleftrightarrow$ $x=\pm arctg\sqrt[4]{\dfrac{c}{a}}+\pi n, n\in Z.$

Учитывая, что $b\,tg\,x\,ctg\,x=b$ при $x\neq\frac{\pi n}{2}, n\in Z$, получим, что наименьшее значение $h(x)$ равно $b+2\sqrt{ac}$

Ответ:
$b+2\sqrt{ac}$

Задача 1.5.2
Условие:

Длина первого вектора равна a, длина второго вектора равна b, длина третьего вектора равна c. При этом длина разности первого и второго векторов равна z, длина разности второго и третьего векторов равна x, а длина разности третьего и первого векторов равна y. Чему равна длина суммы всех трёх векторов?

Решение:

Пусть $|\vec{a}|=a$, $|\vec{b}|=b$, $|\vec{c}|=c$, $|\vec{a}-\vec{b}|=z$, $|\vec{b}-\vec{c}|=x$, $|\vec{c}-\vec{a}|=y$

Тогда $z^2=|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2\vec{a}\vec{b}=a^2+b^2-2\vec{a}\vec{b}$

Откуда $2\vec{a}\vec{b}=a^2+b^2-z^2$

Аналогично получаем, что $2\vec{b}\vec{c}=b^2+c^2-x^2$ и $2\vec{c}\vec{a}=c^2+a^2-y^2$

Тогда $|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+2\vec{a}\vec{b}+2\vec{b}\vec{c}+2\vec{c}\vec{a}=$

$=a^2+b^2+c^2+(a^2+b^2-z^2)+(b^2+c^2-x^2)+(c^2+a^2-y^2)=3(a^2+b^2+c^2)-x^2-y^2-z^2,$

откуда $|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|=\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)-x^2-y^2-z^2}$

Ответ:
$\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)-x^2-y^2-z^2}$

Задача 1.5.3
Условие:

На плоскости расположены две окружности, касающиеся внутренним образом в точке А. Радиусы окружностей равны соответственно r_1 и r_2. Некоторая прямая проходит через центр большей окружности, касается меньшей окружности и пересекает большую окружность в точках В и С.

Найдите площадь треугольника АВС. (По условию $r_1>2r_2>0$)

Решение:

Пусть O_1 – центр большей окружности, а O_2 – центр меньшей окружности. Тогда $O_1A=r_1$ и $O_1O_2=r_1-r_2$, поскольку касание окружностей внутреннее. Опустим из точек A и O_2 на прямую ВС перпендикуляры AD и O_2E

соответственно. Тогда $AD \parallel O_2E$ и $O_2E = r_2$, так как E – точка касания прямой BC с меньшей окружностью. Из подобия треугольников O_1AD и O_1O_2E получим, что $\frac{AD}{r_2} = \frac{AD}{O_2E} = \frac{O_1A}{O_1O_2} = \frac{r_1}{r_1 - r_2}$, откуда $AD = \frac{r_1 r_2}{r_1 - r_2}$

Тогда $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot 2r_1 \cdot \frac{r_1 r_2}{r_1 - r_2} = \frac{r_1^2 r_2}{r_1 - r_2}$

Ответ:

$$\frac{r_1^2 r_2}{r_1 - r_2}$$

Задача 1.5.2

Условие:

На ребре правильной четырёхугольной пирамиды в точке A сидит паук. Высота пирамиды, выраженная в метрах, равна h, а сторона основания пирамиды, выраженная в метрах, равна a. Паук ползёт из точки A в точку B по боковой поверхности пирамиды, причём расстояние от вершины пирамиды до каждой из точек A и B, выраженное в сантиметрах, равно s, а точки A и B при этом симметричны относительно высоты пирамиды. Чему равно наименьшее расстояние, которое мог проползти паук? Ответ выразите в сантиметрах.

Решение:

Вершина пирамиды S проектируется в центр основания. Расстояние от любой вершины основания пирамиды до его центра будет равно $\frac{a}{\sqrt{2}}$. Тогда по теореме Пифагора боковое ребро пирамиды будет равно $b = \sqrt{h^2 + \frac{a^2}{2}}$. По теореме косинусов для боковой грани пирамиды $a^2 = b^2 + b^2 - 2b \cdot b \cdot \cos\varphi$, где φ – угол между боковыми рёбрами пирамиды, принадлежащими одной грани, откуда

$$\cos\varphi = \frac{2b^2 - a^2}{2b^2} = \frac{2\left(h^2 + \frac{a^2}{2}\right) - a^2}{2b^2} = \frac{h^2}{b^2}$$

Рассмотрим развёртку боковой поверхности пирамиды на плоскость. Кратчайший путь из A в B по боковой поверхности пирамиды будет изображаться на этой развёртке отрезком AB. Тогда на этой развёртке $\angle ASB = 2\varphi$, и по теореме косинусов для треугольника ASB

$$AB^2=AS^2+SB^2-2\,AS\cdot SB\cos\varphi=2\,s^2-2\,s^2\cos 2\varphi=2\,s^2-2\,s^2\left(2\cos^2\varphi-1\right)=¿$$ 4

$$s^2\left(1-\cos^2\varphi\right)=4\,s^2\left(1-\frac{h^4}{b^4}\right)=4\,s^2\,\frac{\left(b^2-h^2\right)\left(b^2+h^2\right)}{b^4}$$

=

$$4\,s^2\frac{\left(h^2+\frac{a^2}{2}-h^2\right)\left(h^2+\frac{a^2}{2}+h^2\right)}{\left(h^2+\frac{a^2}{2}\right)^2}=\frac{4\,s^2a^2\left(a^2+4\,h^2\right)}{\left(a^2+2\,h^2\right)^2}$$

Откуда $AB=\dfrac{2\,as\sqrt{a^2+4\,h^2}}{a^2+2\,h^2}$

Ответ: $\dfrac{2\,as\sqrt{a^2+4\,h^2}}{a^2+2\,h^2}$.

Задача 1.5.5

Условие:

Вася продолжил производить действия с числами. Сначала он сложил три числа и получил a. Потом сложил квадраты этих трёх чисел и получил b. Затем он перемножил эти три числа и получил c. Наконец Вася сложил кубы трёх данных чисел. Какое число получил в итоге Вася, если он по-прежнему считает безошибочно?

Решение:

Пусть $x+y+z=a$, $x^2+y^2+z^2=b$ и $xyz=c$

Тогда $a^2=\left(x+y+z\right)^2=x^2+y^2+z^2+2\,xy+2\,yz+2\,zx=b+2\left(xy+yz+zx\right)$,

Откуда $xy+yz+zx=\dfrac{a^2-b}{2}$

Поскольку $a\left(b-\dfrac{a^2-b}{2}\right)=\left(x+y+z\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)-\left(x+y+z\right)\left(xy+yz+zx\right)=$

$$=\left(x^3+y^3+z^3+x^2y+x^2z+y^2x+y^2z+z^2x+z^2y\right)-\left(x^2y+xyz+x^2z+y^2x+y^2z+yzx+zxy+z^2y+z^2x\right)=$$

$=x^3+y^3+z^3-3\,xyz$, то $x^3+y^3+z^3=a\left(b-\dfrac{a^2-b}{2}\right)+3\,c=\dfrac{a\left(3\,b-a^2\right)}{2}+3\,c$

Ответ:

$$\frac{a\left(3\,b-a^2\right)}{2}+3\,c$$

1.6 Вторая попытка
Задачи по информатике (9-11 класс)

Задача 1.6.1

Условие:

Таймер отсчитывает секунды и выводит на экран: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11..... Маша не знает чисел, но она подсчитала количество цифр(символов) которое вывел таймер это число M<1000000.

Маша могла обсчитаться! Необходимо вывести 1 если число M - могло соответствовать некоторому количеству выведенных на экран секунд и 0, если Маша обсчиталась.

Например M=15 - могло соответствовать (последовательности 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12) , а для M=14 - не существует такой последовательности

На вход число M, на выход 0 или 1

Ответ:

```
def solve(dataset):
    a = dataset.split()
    a = int(a[0])
    resC = 0
    for i in range(1,10000):
        curCheck = 9*(10**(i-1))
        if (a<curCheck*i):
            resC = i
            break
        a = a - curCheck*i
    #print (a)
    #print (resC)
    if a%resC == 0:
        return str("1")
    return str("0")
import sys
print (solve(sys.stdin.read())
```

Задача 1.6.2

Условие:

Таймер отсчитывает секунды и выводит на экран: 1, 2,3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11..... Маша не знает чисел, но она подсчитала количество цифр(символов) которое вывел таймер это число M<1000000.

Необходимо определить сколько секунд отсчитал таймер. (например, если M= 15 прошло, 12 секунд.)

Маша могла обсчитаться! Если была ошибка, то вывести необходимо 0. (например, если M= 16)

Например, M=15 - могло соответствовать (последовательности 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12 и надо вывести 12), а для M=16 - не существует такой последовательности и надо вывести 0

На вход число M, на выход количество секунд

Ответ:

```
def solve(dataset):
    a = dataset.split()
```

```
    a = int(a[0])
    resC = 0
    totalC = 0
    for i in range(1,10000):
        curCheck = 9*(10**(i-1))
        if (a<(curCheck*i)):
            resC = i
            break
        totalC = totalC + curCheck
        a = a - (curCheck*i)
    #print (a)
    #print (resC)
    if a%resC != 0:
        return str("0")
    lastN = a/resC
    totalC = int(totalC + lastN)
    return str(totalC)
import sys
print (solve(sys.stdin.read())
```

Задача 1.6.1

Условие:

Оценить инфраструктуру страны. На вход подаются пары чисел, они означают наличие односторонней дороги между городами.

Необходимо определить количество вариантов проезда без циклов между городом 0 и городом 9 (если мы, добираясь из города 0 в город 9 проезжаем один и тот-же город два раза, то это вариант проезда с циклом, который не надо учитывать, даже если мы проезжали разными дорогами)

Необходимо вывести возможное число вариантов проезда.

Ответ:

```
def resPathCount (path, graph, endVer):

    lastVer = path[len(path)-1]
    if lastVer[1] == endVer:
        return 1
    res = 0
    verList = set()
    for ver in path:
        verList.add(ver[0])
        verList.add(ver[1])
    for ver in graph:
        if ( (ver[0] == lastVer[1]) and (ver[1] not in verList)):
            pathN = copy.deepcopy(path)
            pathN.append(ver)
            res+=resPathCount(pathN,graph,endVer)
    return res
def solve(dataset):
    a = dataset.split()
    graph = list()
    isFirst = True
    for b in a:
        if isFirst:
            vert = list()
            vert.append(int(b))
```

```
            graph.append(vert)
        else:
            graph[len(graph)-1].append(int(b))

        isFirst = not isFirst
    paths = list()
    startVer = 0
    endVer = 9
    newChanges = True
    resPaths = list()
    result = 0
    for ver in graph:
        if ver[0] == startVer:
            path = list()
            path.append(ver)
            result += resPathCount(path,graph,endVer)
    return str(result)
import sys
print (solve(sys.stdin.read())
```

Задача 1.6.1

Условие:

Оценить инфраструктуру страны. На вход подаются пары чисел, они означают наличие двусторонней дороги между городами.

Необходимо определить количество вариантов проезда без циклов между городом 0 и городом 10 (если мы, добираясь из города 0 в город 10 проезжаем один и тот-же город два раза, то это вариант проезда с циклом)

Необходимо вывести возможное число вариантов проезда.

Ответ:

```
def resPathCount (path, graph, endVer, lastVerI):

    lastVer = path[len(path)-1]
    if lastVer[1] == endVer or lastVer[0] == endVer:
        return 1
    res = 0
    verList = set()
    for ver in path:
        verList.add(ver[0])
        verList.add(ver[1])
    for ver in graph:
        if  ver[0] == lastVerI and (ver[1] not in verList):
            pathN = copy.deepcopy(path)
            pathN.append(ver)
            res+=resPathCount(pathN,graph,endVer, ver[1])
        if  ver[1] == lastVerI and (ver[0] not in verList):
            pathN = copy.deepcopy(path)
            pathN.append(ver)
            res+=resPathCount(pathN,graph,endVer, ver[0])
    return res




def solve(dataset):
```

```
    a = dataset.split()
    graph = list()
    isFirst = True
    for b in a:
        if isFirst:
            vert = list()
            vert.append(int(b))
            graph.append(vert)
        else:
            graph[len(graph)-1].append(int(b))

        isFirst = not isFirst
    paths = list()
    startVer = 0
    endVer = 10
    newChanges = True
    resPaths = list()
    result = 0
    for ver in graph:
        if ver[0] == startVer:
            path = list()
            path.append(ver)
            result += resPathCount(path,graph,endVer, ver[1])
        if ver[1] == startVer:
            path = list()
            path.append(ver)
            result += resPathCount(path,graph,endVer, ver[0])
    return str(result)
import sys
print (solve(sys.stdin.read())
```

Задача 1.6.1

Условие:

Дробное деление. На вход подается четыре числа x x1 y y1. Необходимо на выход выдать два числа a и b, так чтобы a/b - несократимая дробь (может быть больше 1) и a/b = x/x1 +y/y1

Ответ:

```
def divList(num):
    res = list()
    cur = 2
    print(num)

    while (int(num)>=cur*2):
        ost = num%cur
        if (ost == 0):
            res.append(cur)
            num = int(num / cur)
        else:
            cur+=1
    if num==3 or num==5 or num ==2  or len(res)==0:
        res.append(num)

    return res

def solve(dataset):
```

```
    a = dataset.split()
    graph = list()
    isFirst = True
    for b in a:
        if isFirst:
            vert = list()
            vert.append(int(b))
            graph.append(vert)
        else:
            graph[len(graph)-1].append(int(b))

        isFirst = not isFirst
    print(graph)

    resVUp = graph[0][1]*graph[1][0]+graph[0][0]*graph[1][1]
    resDown = graph[0][1]*graph[1][1]
    print(resDown)

    ulis= divList(resVUp)

    dlis = divList(graph[0][1])
    dlis.extend(divList(graph[1][1]))
    print ("check")
    print(ulis)

    print(dlis)
    con = True
    d=0
    while(con):
        print(d)
        print(ulis[d])
        print(dlis)
        add = True
        for j in dlis:
            print(j)
            if j==ulis[d]:
                dlis.remove(j)
                ulis.remove(ulis[d])
                add=False
                print(d)
                break;
        if add:
            d=d+1
        print("next")
        if d >= len(ulis):
            con=False

    uRes = 1
    dRes=1
    for d in ulis:
         uRes = uRes*d
    for d in dlis:
         dRes = dRes*d
    res=  "{} {}".format(uRes,dRes)
    return res
import sys
print (solve(sys.stdin.read())
```