

Профиль «Интеллектуальные энергетические системы» посвящен решению задач построения умных электрических сетей, которые объединят потребителей с различными объектами генерации, в том числе возобновляемыми источниками энергии и накопителями электричества, в единую систему, оптимизируя графики производства электроэнергии и минимизируя расход ресурсов.

Профиль включает в себя задачи по двум школьным предметам: **математика** и **физика**.

## §1 Первый отборочный этап

Первый отборочный тур проводится индивидуально в сети интернет, работы оцениваются автоматически средствами системы онлайн-тестирования. Для каждого из параллелей (9 класс или 10-11 класс) предлагается свой набор задач по физике, задачи по математике общие для всех участников. На решение задач первого отборочного этапа участникам давалось 3 недели. Решение каждой задачи дает определенное количество баллов. Баллы зачисляются в полном объеме за правильное решение задачи. Участники получают оценку за решение задач в совокупности по всем предметам данного профиля (математика и физика) — суммарно от 0 до 20 баллов.

### 1.1. Задачи по математике

#### Задача 1.1.1 (1 балл)

В поисках внеземной жизни ученые обнаружили интересный живой организм - Камкохоб. Эксперименты в земных условиях показали, что Камкохоб размножается делением. То есть родительский организм исчезает, и образуются новые особи. При этом каждая особь либо делится ровно на 5 потомков, либо не размножается, а остается одной особью. Экспериментальный образец, привезенный на Землю размножались, некоторые его потомки тоже размножались. **Выберите в таблице**, какое количество потомков могло получиться в итоге, а какое не могло.

Количество потомков	Могло получиться	Не могло получиться
9		
15		
1001		
2016		

#### РЕШЕНИЕ:

Правильный ответ на поставленную задачу представлен в таблице. Подробнее ход

решения рассматривается в следующей задаче.

Количество потомков	Могло получиться	Не могло получиться
9	да	
15		да
1001	да	
2016		да

### Задача 1.1.2 (1 балл)

В поисках внеземной жизни ученые обнаружили интересный живой организм - Камкохоб. Эксперименты в земных условиях показали, что Камкохоб размножается делением. То есть родительский организм исчезает, и образуются новые особи. При этом каждая особь либо делится ровно на 5 потомков, либо не размножается, а остается одной особью. Экспериментальный образец, привезенный на Землю, размножался, некоторые его потомки тоже размножались. Какое количество потомков могло получиться? **Опишите всю серию возможных ответов общей формулой**, используя переменную  $x$  (где  $x$  - натуральное число).

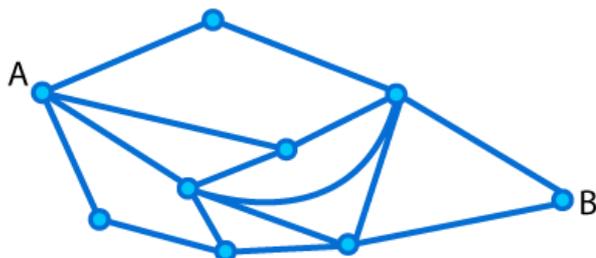
### РЕШЕНИЕ:

Посмотрим, как меняется общее количество особей при одном размножении. Родительская особь исчезает, появляется 5 новых. То есть общее количество увеличивается на 4. Поскольку исходно у нас одна особь, то могло получиться только число, дающее остаток 1 от деления на 4.

Формула  $4x+1$ , где  $x$  - натуральное число, описывает все возможные варианты. Действительно, чтобы получить  $4x+1$  особей, достаточно размножить любые  $x$  особей.

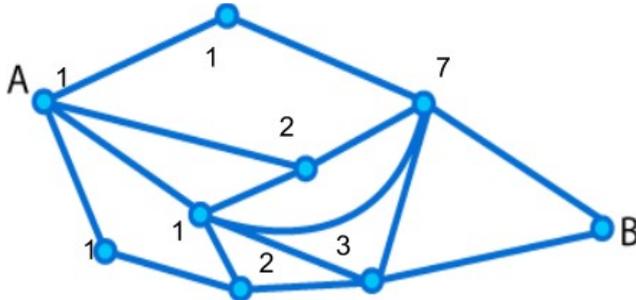
### Задача 1.1.3 (1 балл)

Автобус едет из пункта А в пункт В. При этом в любой момент времени он движется вправо, чтобы приближаться к пункту В иногда вправо вверх, иногда вправо вниз. Найдите количество способов доехать. На картинке приведена схема дорог между городами.



**РЕШЕНИЕ:**

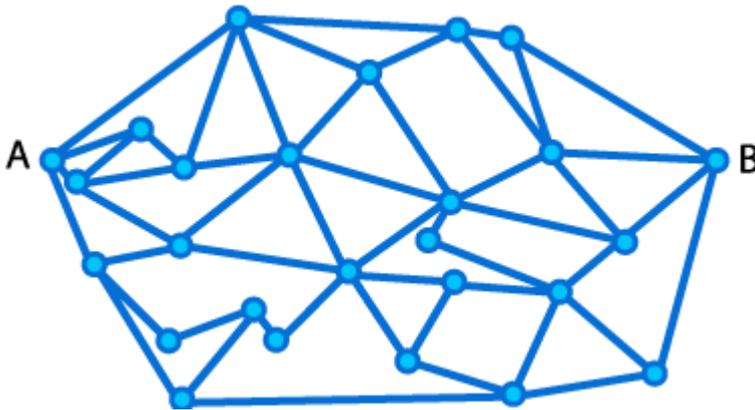
Расставим количество способов доехать до каждой вершины, двигаясь слева направо.



До вершины В  $7+3=10$  способов. Ответ: 10.

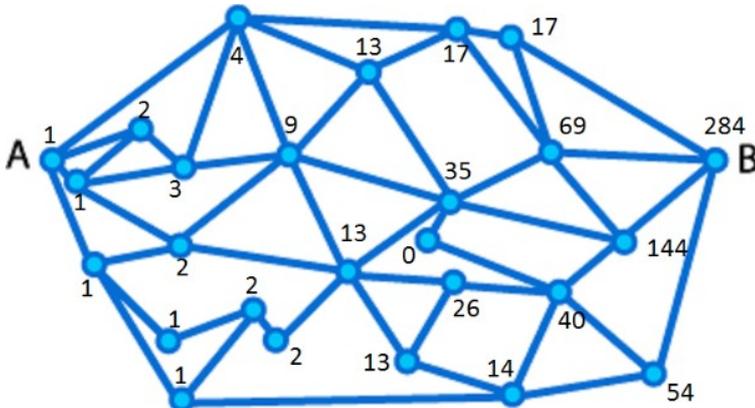
**Задача 1.1.4 (1 балл)**

Автобус едет из пункта А в пункт В. При этом в любой момент времени он движется вправо, чтобы приближаться к пункту В, иногда вправо вверх, иногда вправо вниз. Найдите количество способов доехать. На картинке приведена схема дорог между городами.



**РЕШЕНИЕ:**

Расставим количество способов доехать до каждой вершины, двигаясь слева направо.



Ответ: 284

### Задача 1.1.5 (1 балл)

Незадачливый космонавт Иннокентий почувствовал себя плохо после центрифуги и не может определить направление, он находится в 5 метрах от комиссии и движется по прямой. Каждую секунду он с равной вероятностью либо приближается на метр к ней, либо отдаляется. Если он дошел до комиссии, то больше уже никуда не идет. Найдите вероятность попадания в руки комиссии не позже, чем **на 6 секунде**.

#### РЕШЕНИЕ:

Пусть комиссия находится в пяти метрах справа от космонавта.

Любой путь космонавта за 6 секунд кодируется последовательностью из 6 символов П или Л (П, если он идет направо и Л - если налево). Всего таких последовательностей 64, из них нам годятся две: ПППППП и ПППППЛ.

Значит вероятность попасть к комиссии равна  $2/64=1/32$

Ответ:  $1/32$

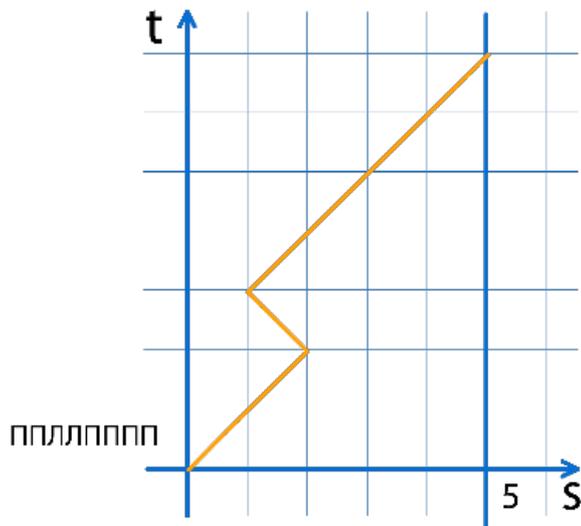
### Задача 1.1.6 (1 балл)

Незадачливый космонавт Иннокентий почувствовал себя плохо после центрифуги и не может определить направление, он находится в 5 метрах от комиссии и движется по прямой. Каждую секунду он с равной вероятностью либо приближается на метр к ней, либо отдаляется. Если он дошел до комиссии, то больше уже никуда не идет. Найдите вероятность попадания в руки комиссии не позже, чем **на 10-й секунде**.

#### РЕШЕНИЕ:

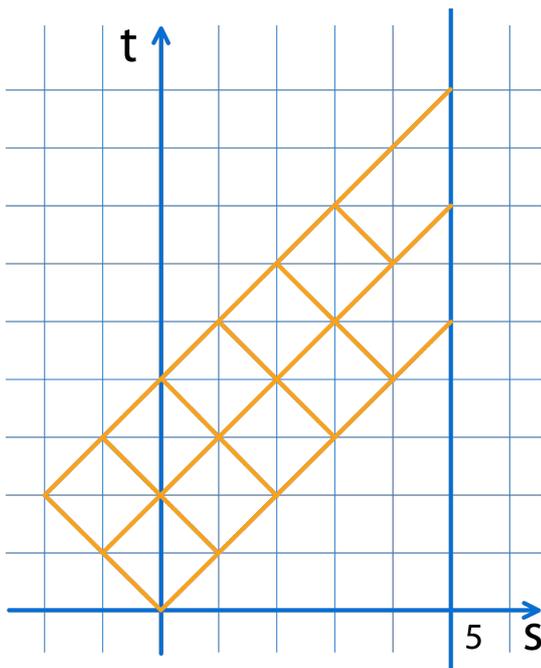
Изобразим путь космонавта на графике. По вертикальной оси отложим время, а по горизонтальной расстояние. Изначально космонавт находится в точке  $s=0$ , а комиссия в точке  $s=5$ .

На рисунке обозначен путь для последовательности ППЛППППП:

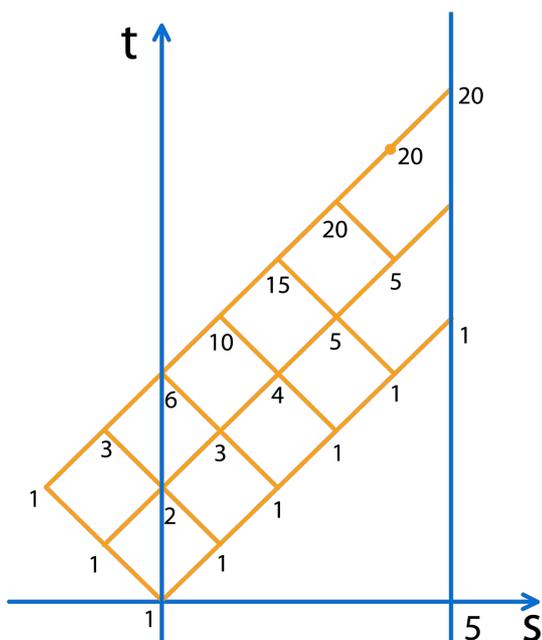


Заметим также, что космонавт может прийти к комиссии только на нечетных шагах. Таким образом, нас интересует, сколько существует путей, ведущих к комиссии за 5, 7 и 9 секунд.

Переформулируем задачу: сколько существует путей, по сетке на рисунке ниже, ведущих к прямой  $s=5$ . Ходить можно только двигаясь вверх.



Посчитаем количество таких путей для каждой точки, начиная от начальной.



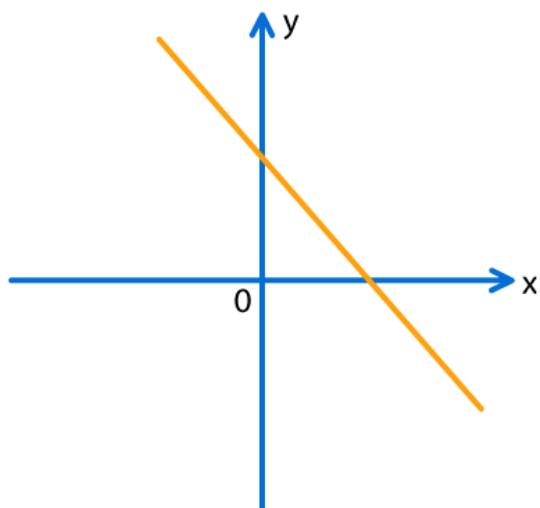
За 5 шагов приводит 1 путь, за 7 - 5 путей, за 9 - 20 путей.

Значит искомая вероятность равна  $1/32+5/128+20/512 = 7/64$

Ответ:  $7/64$

### Задача 1.1.7 (1 балл)

На координатной плоскости задан график функции  $y=kx+b$ .



Найдите максимальное значение функции  $y=kx^2+bx$ .

### РЕШЕНИЕ:

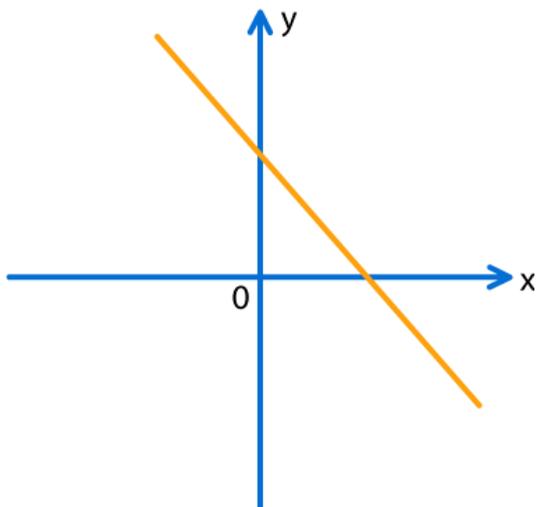
Поскольку  $y = kx+b$  убывает,  $k < 0$

$y = kx^2+bx = x(kx+b)$  парабола «рожками вниз», с нулями  $x = 0$  и  $x = -b/k$

Абсцисса оси параболы  $x = -b/2k$  подставим и найдем максимум  $y = -b^2/4k$

### Задача 1.1.8 (1 балл)

На координатной плоскости задан график функции  $y=kx+b$ .



Рассмотрите точки пересечения графика этой функции с графиком функции  $y=kx^2+bx$ . Выберите из этих точек точку с наименьшей абсциссой и выведите в ответе, чему равна эта абсцисса.

#### РЕШЕНИЕ:

Графиком квадратичной функции  $y = x(kx + b)$  является парабола «рогами вниз», т.к.  $k < 0$

Один из нулей этой функции совпадает с нулем функции  $y = kx + b$ , а другой:  $x = 0$ . Между нулями расположена вторая точка пересечения графиков. Одним из корней уравнения  $x(kx + b) = kx + b$  является  $x = 1$ , что даёт абсциссу второй точки пересечения данного и искомого графиков.

Ответ: 1.

## 1.2. Задачи по физике (9 класс)

### Задача 1.2.1 (2 балла)

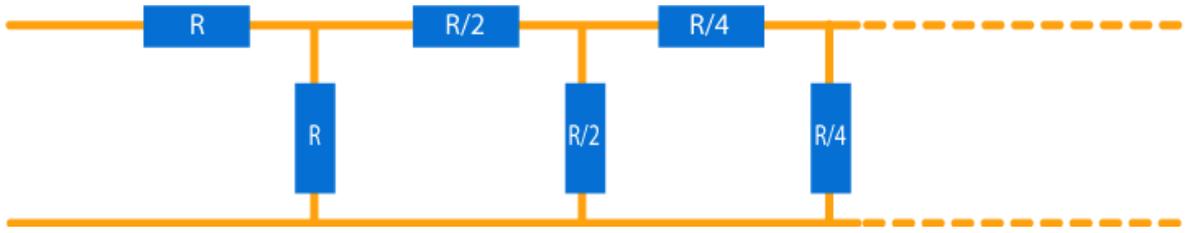
Найдите сопротивление между двумя вершинами октаэдра расположенными на одном ребре. Сопротивление одного ребра равно 1 Ом.

#### РЕШЕНИЕ:

Заметим, что ребра, не присоединенные ни к одной вершине, можно убрать из рассмотрения в силу симметрии системы. Тогда просто останутся 4 параллельные ветки по  $2R$ . Ответ: 0,5 Ом.

### Задача 1.2.2 (4 балла)

Найдите сопротивление бесконечной цепочки приведенной на рисунке.  $R = 1$  Ом.



Ответ дайте в Омах, с точностью до десятых.

#### РЕШЕНИЕ:

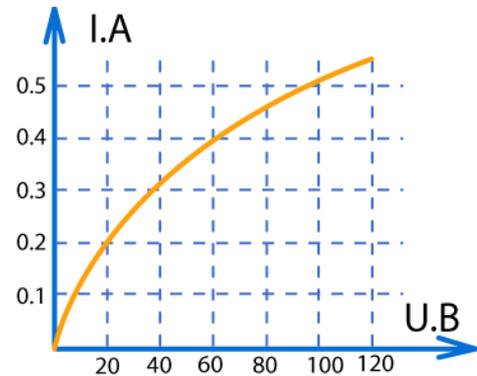
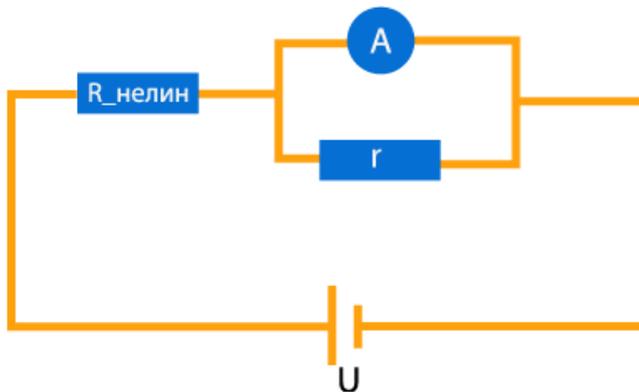
В данном случае, имеем дело с бесконечной цепочкой. Запишем рекуррентную формулу.

$$R = 2R + \frac{2RR_0}{2R + R_0}$$

Решая уравнение относительно  $R_0$  получаем ответ 1,4 Ом.

### Задача 1.2.3 (3 балла)

Ниже приведена схема шунтированного подключения амперметра и ВАХ нелинейного элемента. Зная показания амперметра  $I_a = 2$  мА, сопротивление амперметра  $R_a = 200$  Ом и шунтирующего резистора  $R_{ш} = 1$  Ом, найдите напряжение, которое даёт элемент питания.



Запишите напряжение, которое дает элемент питания. Ответ дайте в вольтах, с точностью до целых.

#### РЕШЕНИЕ:

Находим ток, текущий через нелинейный элемент (напряжение 0,4 В на амперметре ток через шунт 400 мА) тогда легко находится общее напряжение из графика 60 В.

### Задача 1.2.4 (3 балла)

Найдите сопротивление между двумя противостоящими ребрами квадратной пластинки толщиной  $d = 5\text{ мм}$  и удельным сопротивлением  $\rho = 1200\text{ Ом} \cdot \text{м}$ .

Ответ дайте в Омах, с точностью до сотых.

#### РЕШЕНИЕ:

Введем размер ребра квадрата  $L$

$$R = \frac{\rho L}{Ld} = 240\text{кОм}$$

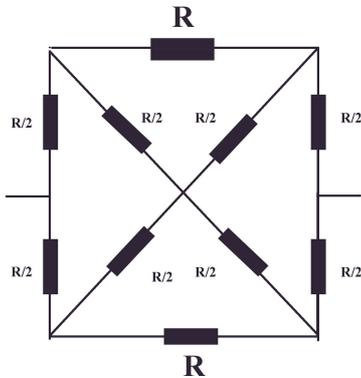
## 1.3. Задачи по физике (10-11 класс)

### Задача 1.2.1 (2 балла)

Найдите сопротивление между центрами ребер октаэдра, расположенных друг напротив друга. Сопротивление одного ребра равно  $1\text{ Ом}$ .

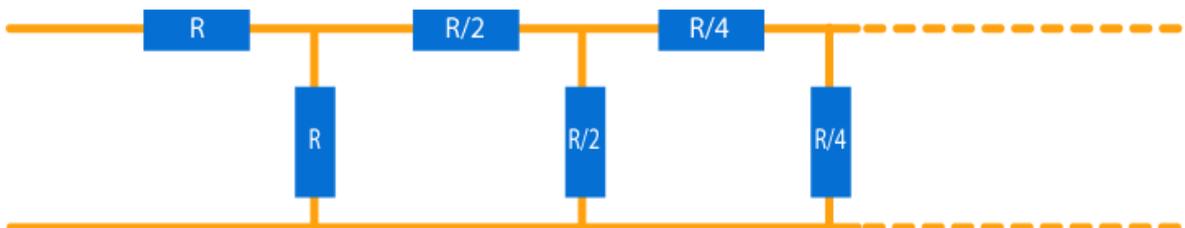
#### РЕШЕНИЕ:

В начале «свернём» вершины находящиеся друг напротив друга. Получим «конверт». Центральную точку можно разъединить в силу симметрии. Сопротивление в итоге равно  $1\text{ Ом}$ .



### Задача 1.3.2 (3 балла)

Найдите сопротивление бесконечной цепочки приведенной на рисунке.  $R = 1\text{ Ом}$ .



Ответ дайте в Омах, с точностью до десятых.

#### РЕШЕНИЕ:

В данном случае, имеем дело с бесконечной цепочкой. Запишем рекуррентную формулу.

$$R = 2R + \frac{2RR_0}{2R + R_0}$$

Решая уравнение относительно  $R_0$  получаем ответ 1,4 Ом.

### Задача 1.3.3 (2 балла)

Разрядка аккумуляторов описывается Пекертовской экспонентой.  $C_p = t \cdot I^n$ , где  $C_p$  - емкость аккумулятора,  $t$  - время работы,  $I$  - ток разрядки, а  $n$  - Пекертовская экспонента. В вашем распоряжении есть 2 аккумулятора емкостью  $C_p = 5000$  мА·ч с выходным напряжением  $U=20$ В; показатель экспоненты Пекерта  $n=1.2$ ; нагреватель сопротивлением  $R=100$ Ом. Найдите максимальную теплоту, которую можно получить при помощи этих приборов. Ответ дайте в Джоулях, с точностью до целых.

#### РЕШЕНИЕ:

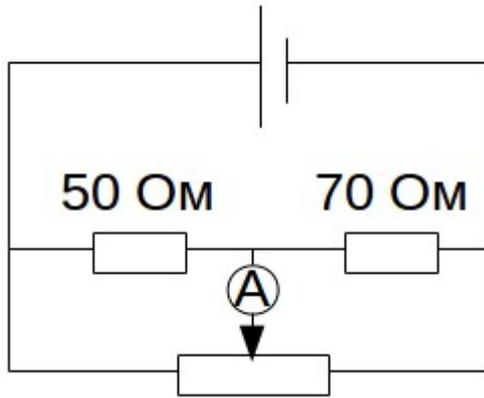
Можно предложить три способа подключения аккумуляторов: последовательный, параллельный и сначала один, потом другой.

Количество теплоты рассчитывается как  $Q = I^2 R t$ . Время может быть через емкость аккумулятора и ток разряда:  $t = \frac{C_p}{I^n}$ , тогда  $Q = I^{2-n} R C_p$ . При последовательном соединении мы увеличим напряжение на клеммах и, таким образом, ток протекающий в цепи, при этом снизив время работы, а при параллельном с меньшим током получим большее время.

Оценив для всех трех возможностей выделившееся тепло получим максимальное значение: 993кДж.

### Задача 1.3.4 (5 баллов)

Сопротивление реостата определяется углом поворота ручки в пределах от  $0^\circ$  до  $180^\circ$  градусов. При нуле (крайнее правое положение) реостат имеет сопротивление 100 Ом, при максимальном угле поворота (крайнее левое положение) - 500 Ом. Найдите положение ручки реостата, при котором показания амперметра в приведенной схеме будут нулевыми.



Запишите сопротивление реостата в этом положении, с точностью до сотых.

**РЕШЕНИЕ:**

Фактически приведена схема — мост. Для того, чтобы ток через амперметр был

нулевым, необходимо, чтобы мост оказался сбалансирован, т.е.  $\frac{x}{500 - x} = \frac{70}{50}$ . Таким образом сопротивление реостата должно делиться на 208 слева и 291 справа. Тогда положение

ручки будет на  $180^\circ \frac{291 - 100}{500 - 100} = 86^\circ$ .

**1.4. Критерии определения призеров и победителей**

Количество баллов, набранных при решении всех задач суммируется. Призерам первого отборочного этапа было необходимо набрать 14 баллов (для 9 класса) и 15 баллов (для 10-11 класса) из 20 возможных. Победители первого отборочного этапа должны были набрать 20 баллов из 20 возможных.