Innopolis Open
Олимпиада по математике
Университета Иннополис

Второй отборочный (заочный) этап, 22 декабря 2018г.

11 класс, вариант 1.

1. **(5 баллов)** Найдите градусную меру угла

$$\delta = \arccos\left((\sin\ 2537^\circ + \sin\ 2538^\circ + \cdots + \sin\ 6137^\circ)^{\cos\ 2520^\circ + \cos\ 2521^\circ + \cdots + \cos\ 6120^\circ}\right)$$

Ответ: 73°

Решение: Из утверждения $\cos\ \alpha + \cos(\alpha + 180^\circ) = 0$ следует, что $\cos\ \alpha + \cos(\alpha + 1^\circ) + \cdots + \cos(\alpha + 179^\circ) = 0$. Тогда $\cos\ 2520^\circ + \cos\ 2521^\circ + \cdots + \cos\ 6119^\circ = 0$ и в показателе остается только $\cos\ 6120^\circ = 1$. Аналогично, $\sin\ \alpha + \sin(\alpha + 1^\circ) + \cdots + \sin(\alpha + 179^\circ) = 0$ и $\sin\ 2537^\circ + \sin\ 2538^\circ + \cdots + \sin\ 6136^\circ = 0$. $\sin\ 6137^\circ = \sin\ 17^\circ$. Тогда $\delta = \arccos(\sin\ 17^\circ) = 73^\circ$.

2. **(5 баллов)** Два различных натуральных числа заканчиваются 5 нулями и имеют ровно по 42 делителя. Найдите их сумму.

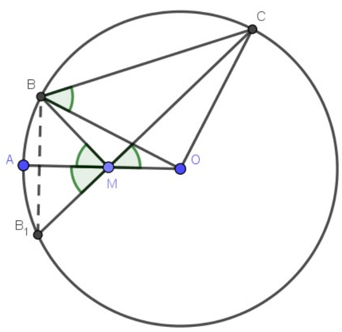
Ответ: 700000

Решение: Раз число заканчивается 5 нулями, то оно имеет вид $N = 10^5 k$. Наименьшее из чисел такого вида 10^5 имеет 36 делителей: все делители имеют вид $2^a 5^b$, где a и b меняются от 0 до 5. Покажем, что k не имеет иных простых делителей кроме 2 и 5. В случае, когда k имеет другие простые делители, количество делителей у числа N увеличивается не менее чем вдвое: кроме первоначальных $1, 2, 5, 10, 20\ldots$ добавятся ещё $k, 2k, 5k, 10k, 20k$ и т.д. Следовательно, $10^5 k = 2^a 5^b$, и количество его делителей равно $(a+1)(b+1)$. Представить 42 в виде произведения двух сомножителей больших 5 можно единственным образом: $42 = 6 \cdot 7$. Тогда, $N = 2^5 5^6$ или $N = 2^6 5^5$. Их сумма равна 700000.

3. **(7 баллов)** На радиусе AO окружности с центром O выбрали точку M, по одну сторону от AO на окружности выбрали точки B и C так, чтобы $\angle AMB = \angle OMC = \alpha$. Найдите длину BC, если радиус окружности равен 15, $\sin\alpha = \frac{\sqrt{21}}{5}$?

Ответ: 12.

Решение:



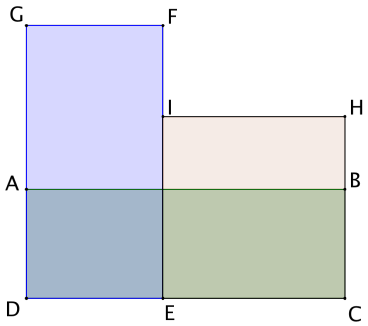
Рассмотрим точку B_1 симметричную точке B относительно прямой OA. Она так же лежит на окружности и $\angle AMB = \alpha$. Заметим, что точки B_1, M, C лежат на одной прямой, а ΔBB_1M – равнобедренный. Следовательно, вписанный угол $\angle BB_1M = 90^\circ - \alpha$, а центральный угол $\angle BOC = 180^\circ - 2\alpha$. ΔBOC – равнобедренный и $\angle OBC = \alpha$. $\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \frac{2}{5}$. Находим основание равнобедренного треугольника по формуле $BC = 2 * \cos\alpha * BO = 2 * \frac{2}{5} * 15 = 12$

4. **(7 баллов)** На доске записано 40 единиц. Каждую минуту Карлсон стирает два произвольных числа и записывает их сумму на доске, а затем съедает количество конфет равное произведению двух стертых чисел. Какое наибольшее количество конфет он мог съесть за 40 минут?

Ответ: 780.

Решение: Изобразим 40 единиц как точки на плоскости. При каждом объединении чисел будем соединять отрезками соответствующие точки одной группы со всеми точками второй группы. Заметим, что если мы заменяем числа x и y на $x+y$, то группы "x" и "y" соединяются xy отрезками. Столько же конфет съедает Карлсон. Через 40 минут все точки будут соединены. Всего будет проведено $\dfrac{40 \cdot (40-1)}{2} = 780$ отрезков. Следовательно, Карлсон съест 780 конфет.

5. **(8 баллов)** Прямоугольники $ABCD, DEFG, CEIH$ имеют равные площади и целочисленные стороны. Найдите DG, если $BC = 53$.



Ответ: 2862

Решение: Пусть $DE = a$ и $EC = b$. Тогда площадь прямоугольников $S = 53(a+b)$. По условию, S делится на a и b, то есть $S = ak$ и $S = bl$, где $k = DG$ и $l = CH$ – натуральные числа. Тогда $a = \dfrac{S}{k}$ и $b = \dfrac{S}{l}$. Получаем, что $S = \dfrac{53S}{k} + \dfrac{53S}{l}$. Следовательно, $kl = 53(k+l) =>$ $kl - 53k - 53l + 2809 = 2809 => (k-53)(l-53) = 2809$. Так как $l < k$, то есть, $l - 53 < k - 53$. Следовательно, $l - 53 = 1$ и $k - 53 = 2809$. Таким образом, $k = DG = 2862$.

6. **(8 баллов)** Пусть для положительных чисел x, y, z выполняется система уравнений:

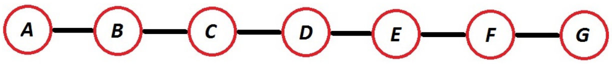
$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 75, \\ y^2 + yz + z^2 = 16, \\ z^2 + xz + x^2 = 91. \end{cases}$$

Найдите значение выражения $xy + yz + xz$.

Ответ: 40

Решение: Пусть имеются три луча с вершиной O, образующих углы по $120°$ друг с другом. На них отложим отрезки $OA = x$, $OB = y$, $OC = z$. Тогда по теореме косинусов $AB^2 = 75$, $BC^2 = 16$, $AC^2 = 91$. Заметим, что треугольник ABC прямоугольный с гипотенузой AC. Сумма площадей треугольников AOB, BOC, AOC равна площади треугольника ABC. Что нам дает соотношение $\dfrac{1}{2}(xy + yz + xz)\sin 120° = \dfrac{1}{2} \cdot 5\sqrt{3} \cdot 4$. Откуда получаем ответ.

7. **(10 баллов)** Семь кротовых нор A, B, C, D, E, F, G последовательно соединены шестью тоннелями. Каждую минуту крот по тоннелю перебегает в одну из соседних нор. Сколькими способами крот может добраться из норы D в B за 10 минут?



Ответ: 164

Решение: Начиная в вершине D после четного числа минут крот может находиться только в вершинах B, D и F. Обозначим через b_k, d_k и f_k число путей длины $2k$, ведущих из D в B, в D и в F соответственно. $b_k = f_k$ из соображений симетрии. Заметим, что выполняются равенства $b_{k+1} = 2b_k + d_k$, $d_{k+1} = 2d_k + 2b_k$. Отсюда $b_{k+2} = 2b_{k+1} + d_{k+1} = 2b_{k+1} + 2d_k + 2b_k = 2b_{k+1} + 2(b_{k+1} - 2b_k) + 2b_k = 4b_{k+1} - 2b_k$.

B_0	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7
0	1	4	14	48	164	560	1912
B_8	B_9	B_{10}	B_{11}	B_{12}	B_{13}	B_{14}	B_{15}
6528	22288	76096	259808	887040	3028544	10340096	35303296

8. **(10 баллов)** В выражении $(x+y+z)^{2018}+(x-y-z)^{2018}$ раскрыли скобки и привели подобные члены. Сколько получилось одночленов $x^a y^b z^c$ с коэффициентом отличным от нуля?

Ответ: 1020100

Решение: Пусть $t = y + z$, тогда многочлен можно переписать $(x + t)^{2018} + (x - t)^{2018}$. Раскрываем обе скобки по бинома Ньютона и получаем

$$(x + t)^{2018} = x^{2018} + a_1 x^{2017} t + \ldots + a_{2017} x t^{2017} + t^{2018}$$
$$(x - t)^{2018} = x^{2018} - a_1 x^{2017} t + \ldots - a_{2017} x t^{2017} + t^{2018}$$

Складываем и получаем

$$(x + t)^{2018} + (x - t)^{2018} = 2(x^{2018} + a_2 x^{2016} t^2 + \ldots + a_{2016} x^2 t^{2016} + t^{2018})$$

Заметим, что при раскрытии разных t_1^n и t_2^n у нас будут получаться разные одночлены (так как степени при x будут различны). Так же при раскрытии t^n у нас будет получаться $n + 1$ разных одночленов, следовательно, итоговый ответ будет

$$1 + 3 + \ldots + 2017 + 2019 = 1010^2 = 1020100$$

Следующие задачи решите с обоснованием ответа

9. **(20 баллов)** Найдите все значения x и y, для которых выполняется равенство:

$$(x - 5)^2 + (y - 6)^2 + (x - y)^2 = \frac{1}{3}.$$

Ответ: $x = 5\frac{1}{3}$, $y = 5\frac{2}{3}$

Решение: Используем неравенство между средним квадратичным и средним арифметическим:

$$\sqrt{\frac{(x-5)^2 + (6-y)^2 + (x-y)^2}{3}} \geqslant \frac{|x-5| + |6-y| + |x-y|}{3} \geqslant \frac{x - 5 + 6 - y + y - x}{3} = \frac{1}{3}.$$

То есть $(x - 5)^2 + (6 - y)^2 + (x - y)^2 \geqslant \frac{1}{3}$. Равенство достигается только при $x - 5 = 6 - y = y - x = \frac{1}{3}$. Тогда $x = 5\frac{1}{3}$, $y = 5\frac{2}{3}$.

10. **(20 баллов)** Пусть x, y, z натуральные числа удовлетворяющие условию $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$. Докажите, что НОД$(x, y, z) \cdot xyz$ – квадрат натурального числа.

Решение: Пусть НОД$(x, y, z) = d$ и $x = dx_1, y = dy_1, z = dz_1$, причем НОД$(x_1, y_1, z_1) = 1$. Подставим и получим $\frac{1}{x_1} = \frac{1}{y_1} + \frac{1}{z_1}$ и нужно доказать, что $d^4 x_1 y_1 z_1$ – квадрат натурального числа, следовательно достаточно доказать, что $x_1 y_1 z_1$ – квадрат натурального числа.
Приведем к общему знаменателю, прибавим к обеим частям x_1^2 и получим $x_1^2 = (x_1 - y_1)(x_1 - z_1)$. Далее если у чисел $x_1 - y_1$ и $x_1 - z_1$ есть общий простой множитель p, то $x_1^2 \,\vdots\, p$, следовательно $x_1 \,\vdots\, p$. Из этого получаем, что $y_1 \,\vdots\, p$ и $z_1 \,\vdots\, p$, значит они не взаимнопросты в совокупности. Противоречие.
Получаем, что множители $x_1 - y_1$ и $x_1 - z_1$ взаимнопросты, а так как их произведение квадрат, то и каждый множитель – квадрат. Далее мы знаем, что $y_1 z_1 = x_1 y_1 + x_1 z_1$, следовательно $x_1 y_1 z_1 = z_1^2 (y_1 - x_1)$ – квадрат натурального числа. Что и требовалось доказать.

Innopolis Open
Олимпиада по математике
Университета Иннополис

Второй отборочный (заочный) этап, 22 декабря 2018г.

11 класс, вариант 2.

1. **(5 баллов)** Найдите градусную меру угла

$$\delta = \arccos\left((\sin\ 2539^\circ + \sin\ 2540^\circ + \cdots + \sin\ 6139^\circ)^{\cos\ 2520^\circ + \cos\ 2521^\circ + \cdots + \cos\ 6120^\circ}\right)$$

Ответ: 71°

Решение: Из утверждения $\cos\ \alpha + \cos(\alpha + 180^\circ) = 0$ следует, что $\cos\ \alpha + \cos(\alpha + 1^\circ) + \cdots + \cos(\alpha + 179^\circ) = 0$. Тогда $\cos\ 2520^\circ + \cos\ 2521^\circ + \cdots + \cos\ 6119^\circ = 0$ и в показателе остается только $\cos\ 6120^\circ = 1$. Аналогично, $\sin\ \alpha + \sin(\alpha + 1^\circ) + \cdots + \sin(\alpha + 179^\circ) = 0$ и $\sin\ 2539^\circ + \sin\ 2540^\circ + \cdots + \sin\ 6138^\circ = 0$. $\sin\ 6139^\circ = \sin\ 19^\circ$. Тогда $\delta = \arccos(\sin\ 19^\circ) = 71^\circ$.

2. **(5 баллов)** Два различных натуральных числа заканчиваются 7 нулями и имеют ровно по 72 делителя. Найдите их сумму.

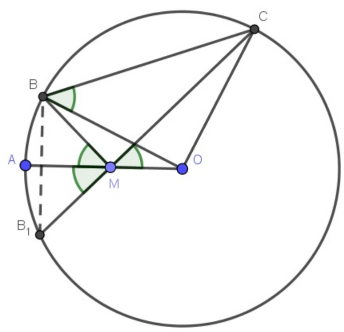
Ответ: 70000000

Решение: Раз число заканчивается 7 нулями, то оно имеет вид $N = 10^7 k$. Наименьшее из чисел такого вида 10^7 имеет 64 делителей: все делители имеют вид $2^a 5^b$, где a и b меняются от 0 до 7. Покажем, что k не имеет иных простых делителей кроме 2 и 5. В случае, когда k имеет другие простые делители, количество делителей у числа N увеличивается не менее чем вдвое: кроме первоначальных $1, 2, 5, 10, 20\ldots$ добавятся ещё $k, 2k, 5k, 10k, 20k$ и т.д. Следовательно, $10^7 k = 2^a 5^b$, и количество его делителей равно $(a+1)(b+1)$. Представить 72 в виде произведения двух сомножителей больших 7 можно единственным образом: $72 = 8 \cdot 9$. Тогда, $N = 2^7 5^8$ или $N = 2^8 5^7$. Их сумма равна 70000000.

3. **(7 баллов)** На радиусе AO окружности с центром O выбрали точку M, по одну сторону от AO на окружности выбрали точки B и C так, чтобы $\angle AMB = \angle OMC = \alpha$. Найдите длину BC, если радиус окружности равен 10, $\sin\alpha = \frac{\sqrt{24}}{5}$?

Ответ: 4.

Решение:



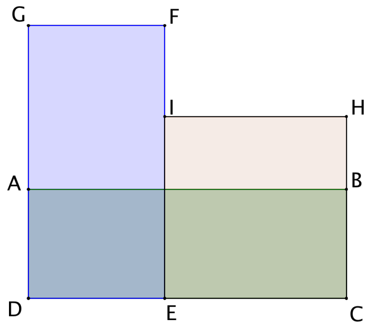
Рассмотрим точку B_1 симметричную точке B относительно прямой OA. Она так же лежит на окружности и $\angle AMB = \alpha$. Заметим, что точки B_1, M, C лежат на одной прямой, а ΔBB_1M – равнобедренный. Следовательно, вписанный угол $\angle BB_1M = 90^\circ - \alpha$, а центральный угол $\angle BOC = 180^\circ - 2\alpha$. ΔBOC – равнобедренный и $\angle OBC = \alpha$. $\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \frac{1}{5}$. Находим основание равнобедренного треугольника по формуле $BC = 2 * \cos\alpha * BO = 2 * \frac{1}{5} * 10 = 4$

4. **(7 баллов)** На доске записано 38 единиц. Каждую минуту Карлсон стирает два произвольных числа и записывает их сумму на доске, а затем съедает количество конфет равное произведению двух стертых чисел. Какое наибольшее количество конфет он мог съесть за 38 минут?

Ответ: 703.

Решение: Изобразим 38 единиц как точки на плоскости. При каждом объединении чисел будем соединять отрезками соответствующие точки одной группы со всеми точками второй группы. Заметим, что если мы заменяем числа x и y на $x+y$, то группы "x" и "y" соединяются xy отрезками. Столько же конфет съедает Карлсон. Через 38 минут все точки будут соединены. Всего будет проведено $\dfrac{38\cdot(38-1)}{2} = 703$ отрезков. Следовательно, Карлсон съест 703 конфет.

5. **(8 баллов)** Прямоугольники $ABCD, DEFG, CEIH$ имеют равные площади и целочисленные стороны. Найдите DG, если $BC = 47$.



Ответ: 2256

Решение: Пусть $DE = a$ и $EC = b$. Тогда площадь прямоугольников $S = 47(a+b)$. По условию, S делится на a и b, то есть $S = ak$ и $S = bl$, где $k = DG$ и $l = CH$ – натуральные числа. Тогда $a = \dfrac{S}{k}$ и $b = \dfrac{S}{l}$. Получаем, что $S = \dfrac{47S}{k} + \dfrac{47S}{l}$. Следовательно, $kl = 47(k+l) =>$ $kl - 47k - 47l + 2209 = 2209 => (k-47)(l-47) = 2209$. Так как $l < k$, то есть, $l - 47 < k - 47$. Следовательно, $l - 47 = 1$ и $k - 47 = 2209$. Таким образом, $k = DG = 2256$.

6. **(8 баллов)** Пусть для положительных чисел x, y, z выполняется система уравнений:

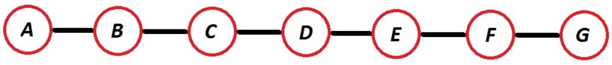
$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 108, \\ y^2 + yz + z^2 = 16, \\ z^2 + xz + x^2 = 124. \end{cases}$$

Найдите значение выражения $xy + yz + xz$.

Ответ: 48

Решение: Пусть имеются три луча с вершиной O, образующих углы по 120° друг с другом. На них отложим отрезки $OA = x$, $OB = y$, $OC = z$. Тогда по теореме косинусов $AB^2 = 108$, $BC^2 = 16$, $AC^2 = 124$. Заметим, что треугольник ABC прямоугольный с гипотенузой AC. Сумма площадей треугольников AOB, BOC, AOC равна площади треугольника ABC. Что нам дает соотношение $\dfrac{1}{2}(xy + yz + xz)\sin 120^\circ = \dfrac{1}{2}\cdot 6\sqrt{3}\cdot 4$. Откуда получаем ответ.

7. **(10 баллов)** Семь кротовых нор A, B, C, D, E, F, G последовательно соединены шестью тоннелями. Каждую минуту крот по тоннелю перебегает в одну из соседних нор. Сколькими способами крот может добраться из норы D в B за 12 минут?



Ответ: 560

Решение: Начиная в вершине D после четного числа минут крот может находиться только в вершинах B, D и F. Обозначим через b_k, d_k и f_k число путей длины $2k$, ведущих из D в B, в D и в F соответственно. $b_k = f_k$ из соображений симетрии. Заметим, что выполняются равенства $b_{k+1} = 2b_k + d_k$, $d_{k+1} = 2d_k + 2b_k$. Отсюда $b_{k+2} = 2b_{k+1} + d_{k+1} = 2b_{k+1} + 2d_k + 2b_k = 2b_{k+1} + 2(b_{k+1} - 2b_k) + 2b_k = 4b_{k+1} - 2b_k$.

B_0	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7
0	1	4	14	48	164	560	1912
B_8	B_9	B_{10}	B_{11}	B_{12}	B_{13}	B_{14}	B_{15}
6528	22288	76096	259808	887040	3028544	10340096	35303296

8. **(10 баллов)** В выражении $(x+y+z)^{2020}+(x-y-z)^{2020}$ раскрыли скобки и привели подобные члены. Сколько получилось одночленов $x^a y^b z^c$ с коэффициентом отличным от нуля?

Ответ: 1022121

Решение: Пусть $t = y + z$, тогда многочлен можно переписать $(x + t)^{2020} + (x - t)^{2020}$. Раскрываем обе скобки по бинома Ньютона и получаем

$$(x+t)^{2020} = x^{2020} + a_1 x^{2019} t + \ldots + a_{2019} x t^{2019} + t^{2020}$$
$$(x-t)^{2020} = x^{2020} - a_1 x^{2019} t + \ldots - a_{2019} x t^{2019} + t^{2020}$$

Складываем и получаем

$$(x+t)^{2020} + (x-t)^{2020} = 2(x^{2020} + a_2 x^{2018} t^2 + \ldots + a_{2018} x^2 t^{2018} + t^{2020})$$

Заметим, что при раскрытии разных t_1^n и t_2^n у нас будут получаться разные одночлены (так как степени при x будут различны). Так же при раскрытии t^n у нас будет получаться $n + 1$ разных одночленов, следовательно, итоговый ответ будет

$$1 + 3 + \ldots + 2019 + 2021 = 1011^2 = 1022121$$

Следующие задачи решите с обоснованием ответа

9. **(20 баллов)** Найдите все значения x и y, для которых выполняется равенство:

$$(x-6)^2 + (y-7)^2 + (x-y)^2 = \frac{1}{3}.$$

Ответ: $x = 6\frac{1}{3},\ y = 6\frac{2}{3}$

Решение: Используем неравенство между средним квадратичным и средним арифметическим:

$$\sqrt{\frac{(x-6)^2 + (7-y)^2 + (x-y)^2}{3}} \geqslant \frac{|x-6| + |7-y| + |x-y|}{3} \geqslant \frac{x-6+7-y+y-x}{3} = \frac{1}{3}.$$

То есть $(x-6)^2 + (7-y)^2 + (x-y)^2 \geqslant \frac{1}{3}$. Равенство достигается только при $x - 6 = 7 - y = y - x = \frac{1}{3}$. Тогда $x = 6\frac{1}{3},\ y = 6\frac{2}{3}$.

10. (20 баллов) Пусть x, y, z натуральные числа удовлетворяющие условию $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$. Докажите, что НОД$(x, y, z) \cdot xyz$ – квадрат натурального числа.

Решение: Пусть НОД$(x, y, z) = d$ и $x = dx_1, y = dy_1, z = dz_1$, причем НОД$(x_1, y_1, z_1) = 1$. Подставим и получим $\frac{1}{x_1} = \frac{1}{y_1} + \frac{1}{z_1}$ и нужно доказать, что $d^4 x_1 y_1 z_1$ – квадрат натурального числа, следовательно достаточно доказать, что $x_1 y_1 z_1$ – квадрат натурального числа.
Приведем к общему знаменателю, прибавим к обеим частям x_1^2 и получим $x_1^2 = (x_1 - y_1)(x_1 - z_1)$. Далее если у чисел $x_1 - y_1$ и $x_1 - z_1$ есть общий простой множитель p, то $x_1^2 \vdots p$, следовательно $x_1 \vdots p$. Из этого получаем, что $y_1 \vdots p$ и $z_1 \vdots p$, значит они не взаимнопросты в совокупности. Противоречие.
Получаем, что множители $x_1 - y_1$ и $x_1 - z_1$ взаимнопросты, а так как их произведение квадрат, то и каждый множитель – квадрат. Далее мы знаем, что $y_1 z_1 = x_1 y_1 + x_1 z_1$, следовательно $x_1 y_1 z_1 = z_1^2 (y_1 - x_1)$ – квадрат натурального числа. Что и требовалось доказать.

Innopolis Open
Олимпиада по математике
Университета Иннополис

Второй отборочный (заочный) этап, 22 декабря 2018г.

11 класс, вариант 3.

1. **(5 баллов)** Найдите градусную меру угла

$$\delta = \arccos\left((\sin\ 2541^\circ + \sin\ 2542^\circ + \cdots + \sin\ 6141^\circ)^{\cos\ 2520^\circ + \cos\ 2521^\circ + \cdots + \cos\ 6120^\circ}\right)$$

Ответ: 69°

Решение: Из утверждения $\cos\ \alpha + \cos(\alpha + 180^\circ) = 0$ следует, что $\cos\ \alpha + \cos(\alpha + 1^\circ) + \cdots + \cos(\alpha + 179^\circ) = 0$. Тогда $\cos\ 2520^\circ + \cos\ 2521^\circ + \cdots + \cos\ 6119^\circ = 0$ и в показателе остается только $\cos\ 6120^\circ = 1$. Аналогично, $\sin\ \alpha + \sin(\alpha + 1^\circ) + \cdots + \sin(\alpha + 179^\circ) = 0$ и $\sin\ 2541^\circ + \sin\ 2542^\circ + \cdots + \sin\ 6140^\circ = 0$. $\sin\ 6141^\circ = \sin\ 21^\circ$. Тогда $\delta = \arccos(\sin\ 21^\circ) = 69^\circ$.

2. **(5 баллов)** Два различных натуральных числа заканчиваются 9 нулями и имеют ровно по 110 делителей. Найдите их сумму.

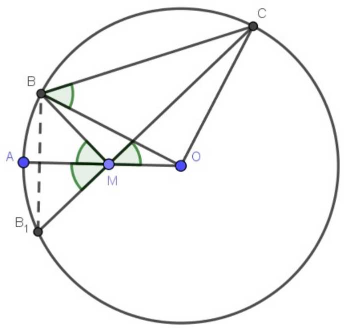
Ответ: 7000000000

Решение: Раз число заканчивается 9 нулями, то оно имеет вид $N = 10^9 k$. Наименьшее из чисел такого вида 10^9 имеет 100 делителей: все делители имеют вид $2^a 5^b$, где a и b меняются от 0 до 9. Покажем, что k не имеет иных простых делителей кроме 2 и 5. В случае, когда k имеет другие простые делители, количество делителей у числа N увеличивается не менее чем вдвое: кроме первоначальных $1, 2, 5, 10, 20 \ldots$ добавятся ещё $k, 2k, 5k, 10k, 20k$ и т.д. Следовательно, $10^9 k = 2^a 5^b$, и количество его делителей равно $(a+1)(b+1)$. Представить 110 в виде произведения двух сомножителей больших 9 можно единственным образом: $110 = 10 \cdot 11$. Тогда, $N = 2^9 5^1 0$ или $N = 2^1 0 5^9$. Их сумма равна 7000000000.

3. **(7 баллов)** На радиусе AO окружности с центром O выбрали точку M, по одну сторону от AO на окружности выбрали точки B и C так, чтобы $\angle AMB = \angle OMC = \alpha$. Найдите длину BC, если радиус окружности равен 10, $\sin\alpha = \frac{\sqrt{21}}{5}$?

Ответ: 8.

Решение:



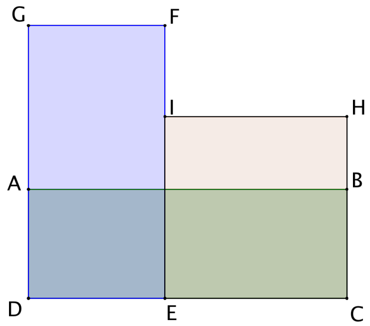
Рассмотрим точку B_1 симметричную точке B относительно прямой OA. Она так же лежит на окружности и $\angle AMB = \alpha$. Заметим, что точки B_1, M, C лежат на одной прямой, а ΔBB_1M – равнобедренный. Следовательно, вписанный угол $\angle BB_1M = 90^\circ - \alpha$, а центральный угол $\angle BOC = 180^\circ - 2\alpha$. ΔBOC – равнобедренный и $\angle OBC = \alpha$. $\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \frac{2}{5}$. Находим основание равнобедренного треугольника по формуле $BC = 2 * \cos\alpha * BO = 2 * \frac{2}{5} * 10 = 8$

4. **(7 баллов)** На доске записано 37 единиц. Каждую минуту Карлсон стирает два произвольных числа и записывает их сумму на доске, а затем съедает количество конфет равное произведению двух стертых чисел. Какое наибольшее количество конфет он мог съесть за 37 минут?

Ответ: 666.

Решение: Изобразим 37 единиц как точки на плоскости. При каждом объединении чисел будем соединять отрезками соответствующие точки одной группы со всеми точками второй группы. Заметим, что если мы заменяем числа x и y на $x+y$, то группы "x" и "y" соединяются xy отрезками. Столько же конфет съедает Карлсон. Через 37 минут все точки будут соединены. Всего будет проведено $\dfrac{37\cdot(37-1)}{2}=666$ отрезков. Следовательно, Карлсон съест 666 конфет.

5. **(8 баллов)** Прямоугольники $ABCD, DEFG, CEIH$ имеют равные площади и целочисленные стороны. Найдите DG, если $BC=43$.



Ответ: 1892

Решение: Пусть $DE=a$ и $EC=b$. Тогда площадь прямоугольников $S=43(a+b)$. По условию, S делится на a и b, то есть $S=ak$ и $S=bl$, где $k=DG$ и $l=CH$ – натуральные числа. Тогда $a=\dfrac{S}{k}$ и $b=\dfrac{S}{l}$. Получаем, что $S=\dfrac{43S}{k}+\dfrac{43S}{l}$. Следовательно, $kl=43(k+l)$ => $kl-43k-43l+1849=1849$ => $(k-43)(l-43)=1849$. Так как $l<k$, то есть, $l-43<k-43$. Следовательно, $l-43=1$ и $k-43=1849$. Таким образом, $k=DG=1892$.

6. **(8 баллов)** Пусть для положительных чисел x, y, z выполняется система уравнений:

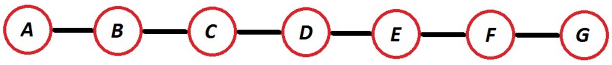
$$\begin{cases} x^2+xy+y^2=147, \\ y^2+yz+z^2=16, \\ z^2+xz+x^2=163. \end{cases}$$

Найдите значение выражения $xy+yz+xz$.

Ответ: 56

Решение: Пусть имеются три луча с вершиной O, образующих углы по 120° друг с другом. На них отложим отрезки $OA=x$, $OB=y$, $OC=z$. Тогда по теореме косинусов $AB^2=147$, $BC^2=16$, $AC^2=163$. Заметим, что треугольник ABC прямоугольный с гипотенузой AC. Сумма площадей треугольников AOB, BOC, AOC равна площади треугольника ABC. Что нам дает соотношение $\dfrac{1}{2}(xy+yz+xz)\sin 120^\circ=\dfrac{1}{2}\cdot 7\sqrt{3}\cdot 4$. Откуда получаем ответ.

7. **(10 баллов)** Семь кротовых нор A, B, C, D, E, F, G последовательно соединены шестью тоннелями. Каждую минуту крот по тоннелю перебегает в одну из соседних нор. Сколькими способами крот может добраться из норы D в B за 14 минут?



Ответ: B_7

Решение: Начиная в вершине D после четного числа минут крот может находиться только в вершинах B, D и F. Обозначим через b_k, d_k и f_k число путей длины $2k$, ведущих из D в B, в D и в F соответственно. $b_k = f_k$ из соображений симетрии. Заметим, что выполняются равенства $b_{k+1} = 2b_k + d_k$, $d_{k+1} = 2d_k + 2b_k$. Отсюда $b_{k+2} = 2b_{k+1} + d_{k+1} = 2b_{k+1} + 2d_k + 2b_k = 2b_{k+1} + 2(b_{k+1} - 2b_k) + 2b_k = 4b_{k+1} - 2b_k$.

B_0	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7
0	1	4	14	48	164	560	1912
B_8	B_9	B_{10}	B_{11}	B_{12}	B_{13}	B_{14}	B_{15}
6528	22288	76096	259808	887040	3028544	10340096	35303296

8. **(10 баллов)** В выражении $(x+y+z)^{2022}+(x-y-z)^{2022}$ раскрыли скобки и привели подобные члены. Сколько получилось одночленов $x^a y^b z^c$ с коэффициентом отличным от нуля?

Ответ: 1024144

Решение: Пусть $t = y + z$, тогда многочлен можно переписать $(x + t)^{2022} + (x - t)^{2022}$. Раскрываем обе скобки по бинома Ньютона и получаем

$$(x+t)^{2022} = x^{2022} + a_1 x^{2021} t + \ldots + a_{2021} x t^{2021} + t^{2022}$$
$$(x-t)^{2022} = x^{2022} - a_1 x^{2021} t + \ldots - a_{2021} x t^{2021} + t^{2022}$$

Складываем и получаем

$$(x+t)^{2022} + (x-t)^{2022} = 2(x^{2022} + a_2 x^{2020} t^2 + \ldots + a_{2020} x^2 t^{2020} + t^{2022})$$

Заметим, что при раскрытии разных t_1^n и t_2^n у нас будут получаться разные одночлены (так как степени при x будут различны). Так же при раскрытии t^n у нас будет получаться $n+1$ разных одночленов, следовательно, итоговый ответ будет

$$1 + 3 + \ldots + 2021 + 2023 = 1012^2 = 1024144$$

Следующие задачи решите с обоснованием ответа

9. **(20 баллов)** Найдите все значения x и y, для которых выполняется равенство:

$$(x-7)^2 + (y-8)^2 + (x-y)^2 = \frac{1}{3}.$$

Ответ: $x = 7\frac{1}{3}$, $y = 7\frac{2}{3}$

Решение: Используем неравенство между средним квадратичным и средним арифметическим:

$$\sqrt{\frac{(x-7)^2 + (8-y)^2 + (x-y)^2}{3}} \geqslant \frac{|x-7| + |8-y| + |x-y|}{3} \geqslant \frac{x-7+8-y+y-x}{3} = \frac{1}{3}.$$

То есть $(x-7)^2 + (8-y)^2 + (x-y)^2 \geqslant \frac{1}{3}$. Равенство достигается только при $x - 7 = 8 - y = y - x = \frac{1}{3}$. Тогда $x = 7\frac{1}{3}$, $y = 7\frac{2}{3}$.

10. (20 баллов) Пусть x, y, z натуральные числа удовлетворяющие условию $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$. Докажите, что НОД$(x, y, z) \cdot xyz$ – квадрат натурального числа.

Решение: Пусть НОД$(x, y, z) = d$ и $x = dx_1, y = dy_1, z = dz_1$, причем НОД$(x_1, y_1, z_1) = 1$. Подставим и получим $\frac{1}{x_1} = \frac{1}{y_1} + \frac{1}{z_1}$ и нужно доказать, что $d^4 x_1 y_1 z_1$ – квадрат натурального числа, следовательно достаточно доказать, что $x_1 y_1 z_1$ – квадрат натурального числа.
Приведем к общему знаменателю, прибавим к обеим частям x_1^2 и получим $x_1^2 = (x_1 - y_1)(x_1 - z_1)$. Далее если у чисел $x_1 - y_1$ и $x_1 - z_1$ есть общий простой множитель p, то $x_1^2 \vdots p$, следовательно $x_1 \vdots p$. Из этого получаем, что $y_1 \vdots p$ и $z_1 \vdots p$, значит они не взаимнопросты в совокупности. Противоречие.
Получаем, что множители $x_1 - y_1$ и $x_1 - z_1$ взаимнопросты, а так как их произведение квадрат, то и каждый множитель – квадрат. Далее мы знаем, что $y_1 z_1 = x_1 y_1 + x_1 z_1$, следовательно $x_1 y_1 z_1 = z_1^2 (y_1 - x_1)$ – квадрат натурального числа. Что и требовалось доказать.

Innopolis Open
Олимпиада по математике
Университета Иннополис

Второй отборочный (заочный) этап, 22 декабря 2018г.

11 класс, вариант 4.

1. **(5 баллов)** Найдите градусную меру угла

$$\delta=\arccos\left(\left(\sin\ 2903^\circ+\sin\ 2904^\circ+\cdots+\sin\ 6503^\circ\right)^{\cos\ 2880^\circ+\cos\ 2881^\circ+\cdots+\cos\ 6480^\circ}\right)$$

Ответ: 67°

Решение: Из утверждения $\cos\ \alpha+\cos(\alpha+180^\circ)=0$ следует, что $\cos\ \alpha+\cos(\alpha+1^\circ)+\cdots+\cos(\alpha+179^\circ)=0$. Тогда $\cos\ 2880^\circ+\cos\ 2881^\circ+\cdots+\cos\ 6479^\circ=0$ и в показателе остается только $\cos\ 6480^\circ=1$. Аналогично, $\sin\ \alpha+\sin(\alpha+1^\circ)+\cdots+\sin(\alpha+179^\circ)=0$ и $\sin\ 2903^\circ+\sin\ 2904^\circ+\cdots+\sin\ 6502^\circ=0$. $\sin\ 6503^\circ=\sin\ 23^\circ$. Тогда $\delta=\arccos(\sin\ 23^\circ)=67^\circ$.

2. **(5 баллов)** Два различных натуральных числа заканчиваются 8 нулями и имеют ровно по 90 делителей. Найдите их сумму.

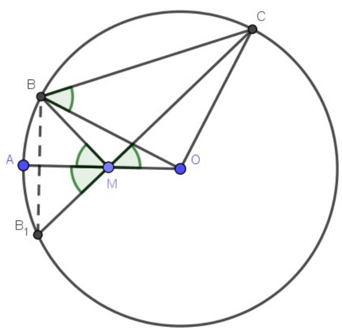
Ответ: 700000000

Решение: Раз число заканчивается 8 нулями, то оно имеет вид $N=10^8k$. Наименьшее из чисел такого вида 10^8 имеет 81 делителей: все делители имеют вид 2^a5^b, где a и b меняются от 0 до 8. Покажем, что k не имеет иных простых делителей кроме 2 и 5. В случае, когда k имеет другие простые делители, количество делителей у числа N увеличивается не менее чем вдвое: кроме первоначальных $1,2,5,10,20\ldots$ добавятся ещё $k,2k,5k,10k,20k$ и т.д.
Следовательно, $10^8k=2^a5^b$, и количество его делителей равно $(a+1)(b+1)$. Представить 90 в виде произведения двух сомножителей больших 8 можно единственным образом: $90=9\cdot10$. Тогда, $N=2^85^9$ или $N=2^95^8$. Их сумма равна 700000000.

3. **(7 баллов)** На радиусе AO окружности с центром O выбрали точку M, по одну сторону от AO на окружности выбрали точки B и C так, чтобы $\angle AMB=\angle OMC=\alpha$. Найдите длину BC, если радиус окружности равен 12, $\sin\alpha=\frac{\sqrt{35}}{6}$?

Ответ: 4.

Решение:



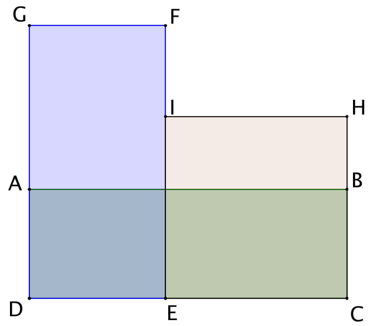
Рассмотрим точку B_1 симметричную точке B относительно прямой OA. Она так же лежит на окружности и $\angle AMB=\alpha$. Заметим, что точки B_1,M,C лежат на одной прямой, а ΔBB_1M – равнобедренный. Следовательно, вписанный угол $\angle BB_1M=90^\circ-\alpha$, а центральный угол $\angle BOC=180^\circ-2\alpha$. ΔBOC – равнобедренный и $\angle OBC=\alpha$. $\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\frac{1}{6}$. Находим основание равнобедренного треугольника по формуле $BC=2*\cos\alpha*BO=2*\frac{1}{6}*12=4$

4. **(7 баллов)** На доске записано 39 единиц. Каждую минуту Карлсон стирает два произвольных числа и записывает их сумму на доске, а затем съедает количество конфет равное произведению двух стертых чисел. Какое наибольшее количество конфет он мог съесть за 39 минут?

Ответ: 741.

Решение: Изобразим 39 единиц как точки на плоскости. При каждом объединении чисел будем соединять отрезками соответствующие точки одной группы со всеми точками второй группы. Заметим, что если мы заменяем числа x и y на $x+y$, то группы "x" и "y" соединяются xy отрезками. Столько же конфет съедает Карлсон. Через 39 минут все точки будут соединены. Всего будет проведено $\dfrac{39 \cdot (39-1)}{2} = 741$ отрезков. Следовательно, Карлсон съест 741 конфет.

5. **(8 баллов)** Прямоугольники $ABCD, DEFG, CEIH$ имеют равные площади и целочисленные стороны. Найдите DG, если $BC = 37$.



Ответ: 1406

Решение: Пусть $DE = a$ и $EC = b$. Тогда площадь прямоугольников $S = 37(a+b)$. По условию, S делится на a и b, то есть $S = ak$ и $S = bl$, где $k = DG$ и $l = CH$ – натуральные числа. Тогда $a = \dfrac{S}{k}$ и $b = \dfrac{S}{l}$. Получаем, что $S = \dfrac{37S}{k} + \dfrac{37S}{l}$. Следовательно, $kl = 37(k+l) =>$ $kl - 37k - 37l + 1369 = 1369 => (k-37)(l-37) = 1369$. Так как $l < k$, то есть, $l - 37 < k - 37$. Следовательно, $l - 37 = 1$ и $k - 37 = 1369$. Таким образом, $k = DG = 1406$.

6. **(8 баллов)** Пусть для положительных чисел x, y, z выполняется система уравнений:

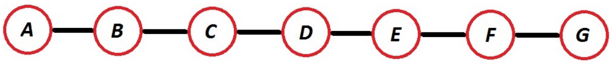
$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 75, \\ y^2 + yz + z^2 = 36, \\ z^2 + xz + x^2 = 111. \end{cases}$$

Найдите значение выражения $xy + yz + xz$.

Ответ: 60

Решение: Пусть имеются три луча с вершиной O, образующих углы по 120° друг с другом. На них отложим отрезки $OA = x$, $OB = y$, $OC = z$. Тогда по теореме косинусов $AB^2 = 75$, $BC^2 = 36$, $AC^2 = 111$. Заметим, что треугольник ABC прямоугольный с гипотенузой AC. Сумма площадей треугольников AOB, BOC, AOC равна площади треугольника ABC. Что нам дает соотношение $\dfrac{1}{2}(xy + yz + xz)\sin 120^\circ = \dfrac{1}{2} \cdot 5\sqrt{3} \cdot 6$. Откуда получаем ответ.

7. **(10 баллов)** Семь кротовых нор A, B, C, D, E, F, G последовательно соединены шестью тоннелями. Каждую минуту крот по тоннелю перебегает в одну из соседних нор. Сколькими способами крот может добраться из норы D в B за 16 минут?



Ответ: 6528

Решение: Начиная в вершине D после четного числа минут крот может находиться только в вершинах B, D и F. Обозначим через b_k, d_k и f_k число путей длины $2k$, ведущих из D в B, в D и в F соответственно. $b_k = f_k$ из соображений симметрии. Заметим, что выполняются равенства $b_{k+1} = 2b_k + d_k$, $d_{k+1} = 2d_k + 2b_k$. Отсюда $b_{k+2} = 2b_{k+1} + d_{k+1} = 2b_{k+1} + 2d_k + 2b_k = 2b_{k+1} + 2(b_{k+1} - 2b_k) + 2b_k = 4b_{k+1} - 2b_k$.

B_0	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7
0	1	4	14	48	164	560	1912
B_8	B_9	B_{10}	B_{11}	B_{12}	B_{13}	B_{14}	B_{15}
6528	22288	76096	259808	887040	3028544	10340096	35303296

8. **(10 баллов)** В выражении $(x+y+z)^{2024}+(x-y-z)^{2024}$ раскрыли скобки и привели подобные члены. Сколько получилось одночленов $x^a y^b z^c$ с коэффициентом отличным от нуля?

Ответ: 1026169

Решение: Пусть $t = y + z$, тогда многочлен можно переписать $(x + t)^{2024} + (x - t)^{2024}$. Раскрываем обе скобки по бинома Ньютона и получаем

$$(x + t)^{2024} = x^{2024} + a_1 x^{2023} t + \ldots + a_{2023} x t^{2023} + t^{2024}$$
$$(x - t)^{2024} = x^{2024} - a_1 x^{2023} t + \ldots - a_{2023} x t^{2023} + t^{2024}$$

Складываем и получаем

$$(x + t)^{2024} + (x - t)^{2024} = 2(x^{2024} + a_2 x^{2022} t^2 + \ldots + a_{2022} x^2 t^{2022} + t^{2024})$$

Заметим, что при раскрытии разных t_1^n и t_2^n у нас будут получаться разные одночлены (так как степени при x будут различны). Так же при раскрытии t^n у нас будет получаться $n + 1$ разных одночленов, следовательно, итоговый ответ будет

$$1 + 3 + \ldots + 2023 + 2025 = 1013^2 = 1026169$$

Следующие задачи решите с обоснованием ответа

9. **(20 баллов)** Найдите все значения x и y, для которых выполняется равенство:

$$(x - 8)^2 + (y - 9)^2 + (x - y)^2 = \frac{1}{3}.$$

Ответ: $x = 8\frac{1}{3},\ y = 8\frac{2}{3}$

Решение: Используем неравенство между средним квадратичным и средним арифметическим:

$$\sqrt{\frac{(x-8)^2 + (9-y)^2 + (x-y)^2}{3}} \geqslant \frac{|x-8| + |9-y| + |x-y|}{3} \geqslant \frac{x - 8 + 9 - y + y - x}{3} = \frac{1}{3}.$$

То есть $(x - 8)^2 + (9 - y)^2 + (x - y)^2 \geqslant \frac{1}{3}$. Равенство достигается только при $x - 8 = 9 - y = y - x = \frac{1}{3}$. Тогда $x = 8\frac{1}{3},\ y = 8\frac{2}{3}$.

10. (20 баллов) Пусть x, y, z натуральные числа удовлетворяющие условию $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$. Докажите, что НОД$(x, y, z) \cdot xyz$ – квадрат натурального числа.

Решение: Пусть НОД$(x, y, z) = d$ и $x = dx_1, y = dy_1, z = dz_1$, причем НОД$(x_1, y_1, z_1) = 1$. Подставим и получим $\frac{1}{x_1} = \frac{1}{y_1} + \frac{1}{z_1}$ и нужно доказать, что $d^4 x_1 y_1 z_1$ – квадрат натурального числа, следовательно достаточно доказать, что $x_1 y_1 z_1$ – квадрат натурального числа.
Приведем к общему знаменателю, прибавим к обеим частям x_1^2 и получим $x_1^2 = (x_1 - y_1)(x_1 - z_1)$. Далее если у чисел $x_1 - y_1$ и $x_1 - z_1$ есть общий простой множитель p, то $x_1^2 \vdots p$, следовательно $x_1 \vdots p$. Из этого получаем, что $y_1 \vdots p$ и $z_1 \vdots p$, значит они не взаимнопросты в совокупности. Противоречие.
Получаем, что множители $x_1 - y_1$ и $x_1 - z_1$ взаимнопросты, а так как их произведение квадрат, то и каждый множитель – квадрат. Далее мы знаем, что $y_1 z_1 = x_1 y_1 + x_1 z_1$, следовательно $x_1 y_1 z_1 = z_1^2 (y_1 - x_1)$ – квадрат натурального числа. Что и требовалось доказать.

Innopolis Open
Олимпиада по математике
Университета Иннополис

Второй отборочный (заочный) этап, 22 декабря 2018г.

11 класс, вариант 5.

1. **(5 баллов)** Найдите градусную меру угла

$$\delta = \arccos\left(\left(\sin\ 2905^\circ + \sin\ 2906^\circ + \cdots + \sin\ 6505^\circ\right)^{\cos\ 2880^\circ + \cos\ 2881^\circ + \cdots + \cos\ 6480^\circ}\right)$$

Ответ: 65°

Решение: Из утверждения $\cos\ \alpha + \cos(\alpha + 180^\circ) = 0$ следует, что $\cos\ \alpha + \cos(\alpha + 1^\circ) + \cdots + \cos(\alpha + 179^\circ) = 0$. Тогда $\cos\ 2880^\circ + \cos\ 2881^\circ + \cdots + \cos\ 6479^\circ = 0$ и в показателе остается только $\cos\ 6480^\circ = 1$. Аналогично, $\sin\ \alpha + \sin(\alpha + 1^\circ) + \cdots + \sin(\alpha + 179^\circ) = 0$ и $\sin\ 2905^\circ + \sin\ 2906^\circ + \cdots + \sin\ 6504^\circ = 0$. $\sin\ 6505^\circ = \sin\ 25^\circ$. Тогда $\delta = \arccos(\sin\ 25^\circ) = 65^\circ$.

2. **(5 баллов)** Два различных натуральных числа заканчиваются 6 нулями и имеют ровно по 56 делителей. Найдите их сумму.

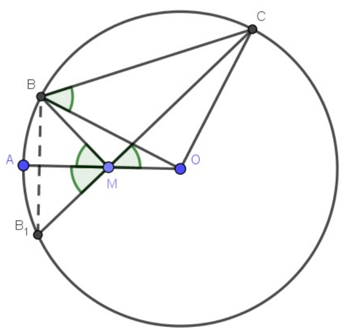
Ответ: 7000000

Решение: Раз число заканчивается 6 нулями, то оно имеет вид $N = 10^6k$. Наименьшее из чисел такого вида 10^6 имеет 49 делителей: все делители имеют вид 2^a5^b, где a и b меняются от 0 до 6. Покажем, что k не имеет иных простых делителей кроме 2 и 5. В случае, когда k имеет другие простые делители, количество делителей у числа N увеличивается не менее чем вдвое: кроме первоначальных $1, 2, 5, 10, 20\ldots$ добавятся ещё $k, 2k, 5k, 10k, 20k$ и т.д. Следовательно, $10^6k = 2^a5^b$, и количество его делителей равно $(a+1)(b+1)$. Представить 56 в виде произведения двух сомножителей больших 6 можно единственным образом: $56 = 7 \cdot 8$. Тогда, $N = 2^65^7$ или $N = 2^75^6$. Их сумма равна 7000000.

3. **(7 баллов)** На радиусе AO окружности с центром O выбрали точку M, по одну сторону от AO на окружности выбрали точки B и C так, чтобы $\angle AMB = \angle OMC = \alpha$. Найдите длину BC, если радиус окружности равен 12, $\sin\alpha = \frac{\sqrt{11}}{6}$?

Ответ: 20.

Решение:



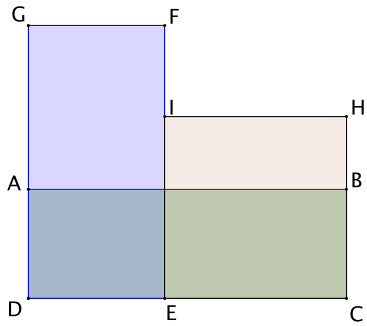
Рассмотрим точку B_1 симметричную точке B относительно прямой OA. Она так же лежит на окружности и $\angle AMB = \alpha$. Заметим, что точки B_1, M, C лежат на одной прямой, а ΔBB_1M – равнобедренный. Следовательно, вписанный угол $\angle BB_1M = 90^\circ - \alpha$, а центральный угол $\angle BOC = 180^\circ - 2\alpha$. ΔBOC – равнобедренный и $\angle OBC = \alpha$. $\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \frac{5}{6}$. Находим основание равнобедренного треугольника по формуле $BC = 2 * \cos\alpha * BO = 2 * \frac{5}{6} * 12 = 20$

4. **(7 баллов)** На доске записано 45 единиц. Каждую минуту Карлсон стирает два произвольных числа и записывает их сумму на доске, а затем съедает количество конфет равное произведению двух стертых чисел. Какое наибольшее количество конфет он мог съесть за 45 минут?

Ответ: 990.

Решение: Изобразим 45 единиц как точки на плоскости. При каждом объединении чисел будем соединять отрезками соответствующие точки одной группы со всеми точками второй группы. Заметим, что если мы заменяем числа x и y на $x+y$, то группы "x" и "y" соединяются xy отрезками. Столько же конфет съедает Карлсон. Через 45 минут все точки будут соединены. Всего будет проведено $\dfrac{45 \cdot (45-1)}{2} = 990$ отрезков. Следовательно, Карлсон съест 990 конфет.

5. **(8 баллов)** Прямоугольники $ABCD, DEFG, CEIH$ имеют равные площади и целочисленные стороны. Найдите DG, если $BC = 31$.



Ответ: 992

Решение: Пусть $DE = a$ и $EC = b$. Тогда площадь прямоугольников $S = 31(a+b)$. По условию, S делится на a и b, то есть $S = ak$ и $S = bl$, где $k = DG$ и $l = CH$ – натуральные числа. Тогда $a = \dfrac{S}{k}$ и $b = \dfrac{S}{l}$. Получаем, что $S = \dfrac{31S}{k} + \dfrac{31S}{l}$. Следовательно, $kl = 31(k+l) =>$ $kl - 31k - 31l + 961 = 961 => (k-31)(l-31) = 961$. Так как $l < k$, то есть, $l - 31 < k - 31$. Следовательно, $l - 31 = 1$ и $k - 31 = 961$. Таким образом, $k = DG = 992$.

6. **(8 баллов)** Пусть для положительных чисел x, y, z выполняется система уравнений:

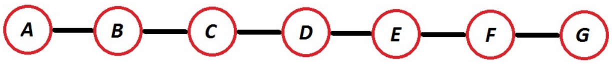
$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 75, \\ y^2 + yz + z^2 = 49, \\ z^2 + xz + x^2 = 124. \end{cases}$$

Найдите значение выражения $xy + yz + xz$.

Ответ: 70

Решение: Пусть имеются три луча с вершиной O, образующих углы по 120° друг с другом. На них отложим отрезки $OA = x$, $OB = y$, $OC = z$. Тогда по теореме косинусов $AB^2 = 75$, $BC^2 = 49$, $AC^2 = 124$. Заметим, что треугольник ABC прямоугольный с гипотенузой AC. Сумма площадей треугольников AOB, BOC, AOC равна площади треугольника ABC. Что нам дает соотношение $\dfrac{1}{2}(xy + yz + xz)\sin 120^\circ = \dfrac{1}{2} \cdot 5\sqrt{3} \cdot 7$. Откуда получаем ответ.

7. **(10 баллов)** Семь кротовых нор A, B, C, D, E, F, G последовательно соединены шестью тоннелями. Каждую минуту крот по тоннелю перебегает в одну из соседних нор. Сколькими способами крот может добраться из норы D в B за 18 минут?



Ответ: 22288

Решение: Начиная в вершине D после четного числа минут крот может находиться только в вершинах B, D и F. Обозначим через b_k, d_k и f_k число путей длины $2k$, ведущих из D в B, в D и в F соответственно. $b_k = f_k$ из соображений симетрии. Заметим, что выполняются равенства $b_{k+1} = 2b_k + d_k$, $d_{k+1} = 2d_k + 2b_k$. Отсюда $b_{k+2} = 2b_{k+1} + d_{k+1} = 2b_{k+1} + 2d_k + 2b_k = 2b_{k+1} + 2(b_{k+1} - 2b_k) + 2b_k = 4b_{k+1} - 2b_k$.

B_0	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7
0	1	4	14	48	164	560	1912
B_8	B_9	B_{10}	B_{11}	B_{12}	B_{13}	B_{14}	B_{15}
6528	22288	76096	259808	887040	3028544	10340096	35303296

8. **(10 баллов)** В выражении $(x+y+z)^{2026}+(x-y-z)^{2026}$ раскрыли скобки и привели подобные члены. Сколько получилось одночленов $x^a y^b z^c$ с коэффициентом отличным от нуля?

Ответ: 1028196

Решение: Пусть $t = y + z$, тогда многочлен можно переписать $(x + t)^{2026} + (x - t)^{2026}$. Раскрываем обе скобки по бинома Ньютона и получаем

$$(x+t)^{2026} = x^{2026} + a_1 x^{2025} t + \ldots + a_{2025} x t^{2025} + t^{2026}$$
$$(x-t)^{2026} = x^{2026} - a_1 x^{2025} t + \ldots - a_{2025} x t^{2025} + t^{2026}$$

Складываем и получаем

$$(x+t)^{2026} + (x-t)^{2026} = 2(x^{2026} + a_2 x^{2024} t^2 + \ldots + a_{2024} x^2 t^{2024} + t^{2026})$$

Заметим, что при раскрытии разных t_1^n и t_2^n у нас будут получаться разные одночлены (так как степени при x будут различны). Так же при раскрытии t^n у нас будет получаться $n+1$ разных одночленов, следовательно, итоговый ответ будет

$$1 + 3 + \ldots + 2025 + 2027 = 1014^2 = 1028196$$

Следующие задачи решите с обоснованием ответа

9. **(20 баллов)** Найдите все значения x и y, для которых выполняется равенство:

$$(x-9)^2 + (y-10)^2 + (x-y)^2 = \frac{1}{3}.$$

Ответ: $x = 9\frac{1}{3},\ y = 9\frac{2}{3}$

Решение: Используем неравенство между средним квадратичным и средним арифметическим:

$$\sqrt{\frac{(x-9)^2 + (10-y)^2 + (x-y)^2}{3}} \geqslant \frac{|x-9| + |10-y| + |x-y|}{3} \geqslant \frac{x-9+10-y+y-x}{3} = \frac{1}{3}.$$

То есть $(x-9)^2 + (10-y)^2 + (x-y)^2 \geqslant \frac{1}{3}$. Равенство достигается только при $x - 9 = 10 - y = y - x = \frac{1}{3}$. Тогда $x = 9\frac{1}{3},\ y = 9\frac{2}{3}$.

10. (20 баллов) Пусть x, y, z натуральные числа удовлетворяющие условию $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$. Докажите, что НОД$(x, y, z) \cdot xyz$ – квадрат натурального числа.

Решение: Пусть НОД$(x, y, z) = d$ и $x = dx_1, y = dy_1, z = dz_1$, причем НОД$(x_1, y_1, z_1) = 1$. Подставим и получим $\frac{1}{x_1} = \frac{1}{y_1} + \frac{1}{z_1}$ и нужно доказать, что $d^4 x_1 y_1 z_1$ – квадрат натурального числа, следовательно достаточно доказать, что $x_1 y_1 z_1$ – квадрат натурального числа.
Приведем к общему знаменателю, прибавим к обеим частям x_1^2 и получим $x_1^2 = (x_1 - y_1)(x_1 - z_1)$. Далее если у чисел $x_1 - y_1$ и $x_1 - z_1$ есть общий простой множитель p, то $x_1^2 \vdots p$, следовательно $x_1 \vdots p$. Из этого получаем, что $y_1 \vdots p$ и $z_1 \vdots p$, значит они не взаимнопросты в совокупности. Противоречие.
Получаем, что множители $x_1 - y_1$ и $x_1 - z_1$ взаимнопросты, а так как их произведение квадрат, то и каждый множитель – квадрат. Далее мы знаем, что $y_1 z_1 = x_1 y_1 + x_1 z_1$, следовательно $x_1 y_1 z_1 = z_1^2(y_1 - x_1)$ – квадрат натурального числа. Что и требовалось доказать.

Innopolis Open

Олимпиада по математике Университета Иннополис

Второй отборочный (заочный) этап, 22 декабря 2018г.

11 класс, вариант 6.

1. **(5 баллов)** Найдите градусную меру угла

$$\delta=\arccos\left((\sin\ 2907^\circ+\sin\ 2908^\circ+\cdots+\sin\ 6507^\circ)^{\cos\ 2880^\circ+\cos\ 2881^\circ+\cdots+\cos\ 6480^\circ}\right)$$

Ответ: 63°

Решение: Из утверждения $\cos\ \alpha+\cos(\alpha+180^\circ)=0$ следует, что $\cos\ \alpha+\cos(\alpha+1^\circ)+\cdots+\cos(\alpha+179^\circ)=0$. Тогда $\cos\ 2880^\circ+\cos\ 2881^\circ+\cdots+\cos\ 6479^\circ=0$ и в показателе остается только $\cos\ 6480^\circ=1$. Аналогично, $\sin\ \alpha+\sin(\alpha+1^\circ)+\cdots+\sin(\alpha+179^\circ)=0$ и $\sin\ 2907^\circ+\sin\ 2908^\circ+\cdots+\sin\ 6506^\circ=0$. $\sin\ 6507^\circ=\sin\ 27^\circ$. Тогда $\delta=\arccos(\sin\ 27^\circ)=63^\circ$.

2. **(5 баллов)** Два различных натуральных числа заканчиваются 5 нулями и имеют ровно по 42 делителя. Найдите их сумму.

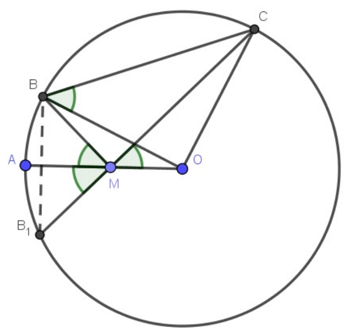
Ответ: 700000

Решение: Раз число заканчивается 5 нулями, то оно имеет вид $N=10^5k$. Наименьшее из чисел такого вида 10^5 имеет 36 делителей: все делители имеют вид 2^a5^b, где a и b меняются от 0 до 5. Покажем, что k не имеет иных простых делителей кроме 2 и 5. В случае, когда k имеет другие простые делители, количество делителей у числа N увеличивается не менее чем вдвое: кроме первоначальных $1,2,5,10,20\ldots$ добавятся ещё $k,2k,5k,10k,20k$ и т.д. Следовательно, $10^5k=2^a5^b$, и количество его делителей равно $(a+1)(b+1)$. Представить 42 в виде произведения двух сомножителей больших 5 можно единственным образом: $42=6\cdot7$. Тогда, $N=2^55^6$ или $N=2^65^5$. Их сумма равна 700000.

3. **(7 баллов)** На радиусе AO окружности с центром O выбрали точку M, по одну сторону от AO на окружности выбрали точки B и C так, чтобы $\angle AMB=\angle OMC=\alpha$. Найдите длину BC, если радиус окружности равен 28, $\sin\alpha=\frac{\sqrt{45}}{7}$?

Ответ: 16.

Решение:



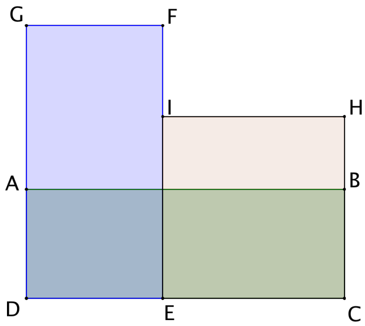
Рассмотрим точку B_1 симметричную точке B относительно прямой OA. Она так же лежит на окружности и $\angle AMB=\alpha$. Заметим, что точки B_1,M,C лежат на одной прямой, а ΔBB_1M – равнобедренный. Следовательно, вписанный угол $\angle BB_1M=90^\circ-\alpha$, а центральный угол $\angle BOC=180^\circ-2\alpha$. ΔBOC – равнобедренный и $\angle OBC=\alpha$. $\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\frac{2}{7}$. Находим основание равнобедренного треугольника по формуле $BC=2*\cos\alpha*BO=2*\frac{2}{7}*28=16$

4. **(7 баллов)** На доске записано 46 единиц. Каждую минуту Карлсон стирает два произвольных числа и записывает их сумму на доске, а затем съедает количество конфет равное произведению двух стертых чисел. Какое наибольшее количество конфет он мог съесть за 46 минут?

Ответ: 1035.

Решение: Изобразим 46 единиц как точки на плоскости. При каждом объединении чисел будем соединять отрезками соответствующие точки одной группы со всеми точками второй группы. Заметим, что если мы заменяем числа x и y на $x+y$, то группы "x" и "y" соединяются xy отрезками. Столько же конфет съедает Карлсон. Через 46 минут все точки будут соединены. Всего будет проведено $\dfrac{46\cdot(46-1)}{2}=1035$ отрезков. Следовательно, Карлсон съест 1035 конфет.

5. **(8 баллов)** Прямоугольники $ABCD, DEFG, CEIH$ имеют равные площади и целочисленные стороны. Найдите DG, если $BC=29$.



Ответ: 870

Решение: Пусть $DE=a$ и $EC=b$. Тогда площадь прямоугольников $S=29(a+b)$. По условию, S делится на a и b, то есть $S=ak$ и $S=bl$, где $k=DG$ и $l=CH$ – натуральные числа. Тогда $a=\dfrac{S}{k}$ и $b=\dfrac{S}{l}$. Получаем, что $S=\dfrac{29S}{k}+\dfrac{29S}{l}$. Следовательно, $kl=29(k+l)$ => $kl-29k-29l+841=841$ => $(k-29)(l-29)=841$. Так как $l<k$, то есть, $l-29<k-29$. Следовательно, $l-29=1$ и $k-29=841$. Таким образом, $k=DG=870$.

6. **(8 баллов)** Пусть для положительных чисел x, y, z выполняется система уравнений:

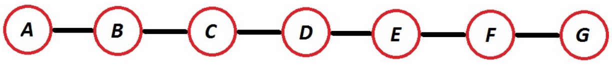
$$\begin{cases} x^2+xy+y^2=75,\\ y^2+yz+z^2=64,\\ z^2+xz+x^2=139. \end{cases}$$

Найдите значение выражения $xy+yz+xz$.

Ответ: 80

Решение: Пусть имеются три луча с вершиной O, образующих углы по 120° друг с другом. На них отложим отрезки $OA=x$, $OB=y$, $OC=z$. Тогда по теореме косинусов $AB^2=75$, $BC^2=64$, $AC^2=139$. Заметим, что треугольник ABC прямоугольный с гипотенузой AC. Сумма площадей треугольников AOB, BOC, AOC равна площади треугольника ABC. Что нам дает соотношение $\dfrac{1}{2}(xy+yz+xz)\sin 120^\circ=\dfrac{1}{2}\cdot 5\sqrt{3}\cdot 8$. Откуда получаем ответ.

7. **(10 баллов)** Семь кротовых нор A, B, C, D, E, F, G последовательно соединены шестью тоннелями. Каждую минуту крот по тоннелю перебегает в одну из соседних нор. Сколькими способами крот может добраться из норы D в B за 20 минут?



Ответ: 76096

Решение: Начиная в вершине D после четного числа минут крот может находиться только в вершинах B, D и F. Обозначим через b_k, d_k и f_k число путей длины $2k$, ведущих из D в B, в D и в F соответственно. $b_k = f_k$ из соображений симетрии. Заметим, что выполняются равенства $b_{k+1} = 2b_k + d_k$, $d_{k+1} = 2d_k + 2b_k$. Отсюда $b_{k+2} = 2b_{k+1} + d_{k+1} = 2b_{k+1} + 2d_k + 2b_k = 2b_{k+1} + 2(b_{k+1} - 2b_k) + 2b_k = 4b_{k+1} - 2b_k$.

B_0	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7
0	1	4	14	48	164	560	1912
B_8	B_9	B_{10}	B_{11}	B_{12}	B_{13}	B_{14}	B_{15}
6528	22288	76096	259808	887040	3028544	10340096	35303296

8. **(10 баллов)** В выражении $(x+y+z)^{2028}+(x-y-z)^{2028}$ раскрыли скобки и привели подобные члены. Сколько получилось одночленов $x^a y^b z^c$ с коэффициентом отличным от нуля?

Ответ: 1030225

Решение: Пусть $t = y + z$, тогда многочлен можно переписать $(x + t)^{2028} + (x - t)^{2028}$. Раскрываем обе скобки по бинома Ньютона и получаем

$$(x + t)^{2028} = x^{2028} + a_1 x^{2027} t + \ldots + a_{2027} x t^{2027} + t^{2028}$$
$$(x - t)^{2028} = x^{2028} - a_1 x^{2027} t + \ldots - a_{2027} x t^{2027} + t^{2028}$$

Складываем и получаем

$$(x + t)^{2028} + (x - t)^{2028} = 2(x^{2028} + a_2 x^{2026} t^2 + \ldots + a_{2026} x^2 t^{2026} + t^{2028})$$

Заметим, что при раскрытии разных t_1^n и t_2^n у нас будут получаться разные одночлены (так как степени при x будут различны). Так же при раскрытии t^n у нас будет получаться $n + 1$ разных одночленов, следовательно, итоговый ответ будет

$$1 + 3 + \ldots + 2027 + 2029 = 1015^2 = 1030225$$

Следующие задачи решите с обоснованием ответа

9. **(20 баллов)** Найдите все значения x и y, для которых выполняется равенство:

$$(x - 10)^2 + (y - 11)^2 + (x - y)^2 = \frac{1}{3}.$$

Ответ: $x = 10\frac{1}{3}$, $y = 10\frac{2}{3}$

Решение: Используем неравенство между средним квадратичным и средним арифметическим:

$$\sqrt{\frac{(x-10)^2 + (11-y)^2 + (x-y)^2}{3}} \geqslant \frac{|x-10| + |11-y| + |x-y|}{3} \geqslant \frac{x - 10 + 11 - y + y - x}{3} = \frac{1}{3}.$$

То есть $(x-10)^2 + (11-y)^2 + (x-y)^2 \geqslant \frac{1}{3}$. Равенство достигается только при $x - 10 = 11 - y = y - x = \frac{1}{3}$. Тогда $x = 10\frac{1}{3}$, $y = 10\frac{2}{3}$.

10. **(20 баллов)** Пусть x, y, z натуральные числа удовлетворяющие условию $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$. Докажите, что НОД$(x, y, z) \cdot xyz$ – квадрат натурального числа.

Решение: Пусть НОД$(x, y, z) = d$ и $x = dx_1, y = dy_1, z = dz_1$, причем НОД$(x_1, y_1, z_1) = 1$. Подставим и получим $\frac{1}{x_1} = \frac{1}{y_1} + \frac{1}{z_1}$ и нужно доказать, что $d^4x_1y_1z_1$ – квадрат натурального числа, следовательно достаточно доказать, что $x_1y_1z_1$ – квадрат натурального числа.
Приведем к общему знаменателю, прибавим к обеим частям x_1^2 и получим $x_1^2 = (x_1 - y_1)(x_1 - z_1)$. Далее если у чисел $x_1 - y_1$ и $x_1 - z_1$ есть общий простой множитель p, то $x_1^2 \vdots p$, следовательно $x_1 \vdots p$. Из этого получаем, что $y_1 \vdots p$ и $z_1 \vdots p$, значит они не взаимнопросты в совокупности. Противоречие.
Получаем, что множители $x_1 - y_1$ и $x_1 - z_1$ взаимнопросты, а так как их произведение квадрат, то и каждый множитель – квадрат. Далее мы знаем, что $y_1z_1 = x_1y_1 + x_1z_1$, следовательно $x_1y_1z_1 = z_1^2(y_1 - x_1)$ – квадрат натурального числа. Что и требовалось доказать.

Innopolis Open
Олимпиада по математике
Университета Иннополис

Второй отборочный (заочный) этап, 22 декабря 2018г.

11 класс, вариант 7.

1. **(5 баллов)** Найдите градусную меру угла

$$\delta = \arccos\left((\sin\ 3269^\circ + \sin\ 3270^\circ + \cdots + \sin\ 6869^\circ)^{\cos\ 3240^\circ + \cos\ 3241^\circ + \cdots + \cos\ 6840^\circ}\right)$$

Ответ: 61°

Решение: Из утверждения $\cos\ \alpha + \cos(\alpha + 180^\circ) = 0$ следует, что $\cos\ \alpha + \cos(\alpha + 1^\circ) + \cdots + \cos(\alpha + 179^\circ) = 0$. Тогда $\cos\ 3240^\circ + \cos\ 3241^\circ + \cdots + \cos\ 6839^\circ = 0$ и в показателе остается только $\cos\ 6840^\circ = 1$. Аналогично, $\sin\ \alpha + \sin(\alpha + 1^\circ) + \cdots + \sin(\alpha + 179^\circ) = 0$ и $\sin\ 3269^\circ + \sin\ 3270^\circ + \cdots + \sin\ 6868^\circ = 0$. $\sin\ 6869^\circ = \sin\ 29^\circ$. Тогда $\delta = \arccos(\sin\ 29^\circ) = 61^\circ$.

2. **(5 баллов)** Два различных натуральных числа заканчиваются 7 нулями и имеют ровно по 72 делителя. Найдите их сумму.

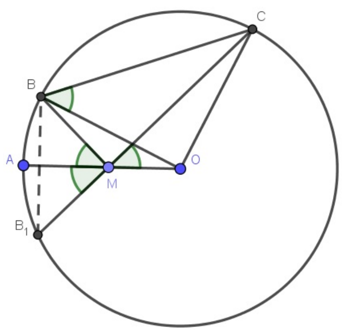
Ответ: 70000000

Решение: Раз число заканчивается 7 нулями, то оно имеет вид $N = 10^7 k$. Наименьшее из чисел такого вида 10^7 имеет 64 делителей: все делители имеют вид $2^a 5^b$, где a и b меняются от 0 до 7. Покажем, что k не имеет иных простых делителей кроме 2 и 5. В случае, когда k имеет другие простые делители, количество делителей у числа N увеличивается не менее чем вдвое: кроме первоначальных $1, 2, 5, 10, 20\ldots$ добавятся ещё $k, 2k, 5k, 10k, 20k$ и т.д. Следовательно, $10^7 k = 2^a 5^b$, и количество его делителей равно $(a+1)(b+1)$. Представить 72 в виде произведения двух сомножителей больших 7 можно единственным образом: $72 = 8 \cdot 9$. Тогда, $N = 2^7 5^8$ или $N = 2^8 5^7$. Их сумма равна 70000000.

3. **(7 баллов)** На радиусе AO окружности с центром O выбрали точку M, по одну сторону от AO на окружности выбрали точки B и C так, чтобы $\angle AMB = \angle OMC = \alpha$. Найдите длину BC, если радиус окружности равен 21, $\sin\alpha = \frac{\sqrt{40}}{7}$?

Ответ: 18.

Решение:



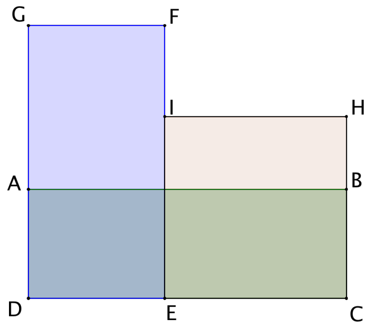
Рассмотрим точку B_1 симметричную точке B относительно прямой OA. Она так же лежит на окружности и $\angle AMB = \alpha$. Заметим, что точки B_1, M, C лежат на одной прямой, а ΔBB_1M – равнобедренный. Следовательно, вписанный угол $\angle BB_1M = 90^\circ - \alpha$, а центральный угол $\angle BOC = 180^\circ - 2\alpha$. ΔBOC – равнобедренный и $\angle OBC = \alpha$. $\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \frac{3}{7}$. Находим основание равнобедренного треугольника по формуле $BC = 2 * \cos\alpha * BO = 2 * \frac{3}{7} * 21 = 18$

4. **(7 баллов)** На доске записано 47 единиц. Каждую минуту Карлсон стирает два произвольных числа и записывает их сумму на доске, а затем съедает количество конфет равное произведению двух стертых чисел. Какое наибольшее количество конфет он мог съесть за 47 минут?

Ответ: 1081.

Решение: Изобразим 47 единиц как точки на плоскости. При каждом объединении чисел будем соединять отрезками соответствующие точки одной группы со всеми точками второй группы. Заметим, что если мы заменяем числа x и y на $x+y$, то группы "x" и "y" соединяются xy отрезками. Столько же конфет съедает Карлсон. Через 47 минут все точки будут соединены. Всего будет проведено $\dfrac{47 \cdot (47-1)}{2} = 1081$ отрезков. Следовательно, Карлсон съест 1081 конфет.

5. **(8 баллов)** Прямоугольники $ABCD, DEFG, CEIH$ имеют равные площади и целочисленные стороны. Найдите DG, если $BC = 23$.



Ответ: 552

Решение: Пусть $DE = a$ и $EC = b$. Тогда площадь прямоугольников $S = 23(a+b)$. По условию, S делится на a и b, то есть $S = ak$ и $S = bl$, где $k = DG$ и $l = CH$ – натуральные числа. Тогда $a = \dfrac{S}{k}$ и $b = \dfrac{S}{l}$. Получаем, что $S = \dfrac{23S}{k} + \dfrac{23S}{l}$. Следовательно, $kl = 23(k+l) =>$ $kl - 23k - 23l + 529 = 529 => (k-23)(l-23) = 529$. Так как $l < k$, то есть, $l - 23 < k - 23$. Следовательно, $l - 23 = 1$ и $k - 23 = 529$. Таким образом, $k = DG = 552$.

6. **(8 баллов)** Пусть для положительных чисел x, y, z выполняется система уравнений:

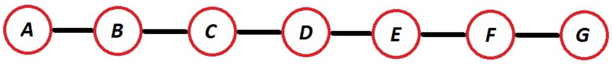
$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 108, \\ y^2 + yz + z^2 = 64, \\ z^2 + xz + x^2 = 172. \end{cases}$$

Найдите значение выражения $xy + yz + xz$.

Ответ: 96

Решение: Пусть имеются три луча с вершиной O, образующих углы по 120° друг с другом. На них отложим отрезки $OA = x$, $OB = y$, $OC = z$. Тогда по теореме косинусов $AB^2 = 108$, $BC^2 = 64$, $AC^2 = 172$. Заметим, что треугольник ABC прямоугольный с гипотенузой AC. Сумма площадей треугольников AOB, BOC, AOC равна площади треугольника ABC. Что нам дает соотношение $\dfrac{1}{2}(xy + yz + xz)\sin 120^\circ = \dfrac{1}{2} \cdot 6\sqrt{3} \cdot 8$. Откуда получаем ответ.

7. **(10 баллов)** Семь кротовых нор A, B, C, D, E, F, G последовательно соединены шестью тоннелями. Каждую минуту крот по тоннелю перебегает в одну из соседних нор. Сколькими способами крот может добраться из норы D в B за 22 минут?



Ответ: 259808

Решение: Начиная в вершине D после четного числа минут крот может находиться только в вершинах B, D и F. Обозначим через b_k, d_k и f_k число путей длины $2k$, ведущих из D в B, в D и в F соответственно. $b_k = f_k$ из соображений симетрии. Заметим, что выполняются равенства $b_{k+1} = 2b_k + d_k$, $d_{k+1} = 2d_k + 2b_k$. Отсюда $b_{k+2} = 2b_{k+1} + d_{k+1} = 2b_{k+1} + 2d_k + 2b_k = 2b_{k+1} + 2(b_{k+1} - 2b_k) + 2b_k = 4b_{k+1} - 2b_k$.

B_0	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7
0	1	4	14	48	164	560	1912
B_8	B_9	B_{10}	B_{11}	B_{12}	B_{13}	B_{14}	B_{15}
6528	22288	76096	259808	887040	3028544	10340096	35303296

8. **(10 баллов)** В выражении $(x+y+z)^{2030}+(x-y-z)^{2030}$ раскрыли скобки и привели подобные члены. Сколько получилось одночленов $x^a y^b z^c$ с коэффициентом отличным от нуля?

Ответ: 1032256

Решение: Пусть $t = y + z$, тогда многочлен можно переписать $(x + t)^{2030} + (x - t)^{2030}$. Раскрываем обе скобки по бинома Ньютона и получаем

$$(x + t)^{2030} = x^{2030} + a_1 x^{2029} t + \ldots + a_{2029} x t^{2029} + t^{2030}$$
$$(x - t)^{2030} = x^{2030} - a_1 x^{2029} t + \ldots - a_{2029} x t^{2029} + t^{2030}$$

Складываем и получаем

$$(x + t)^{2030} + (x - t)^{2030} = 2(x^{2030} + a_2 x^{2028} t^2 + \ldots + a_{2028} x^2 t^{2028} + t^{2030})$$

Заметим, что при раскрытии разных t_1^n и t_2^n у нас будут получаться разные одночлены (так как степени при x будут различны). Так же при раскрытии t^n у нас будет получаться $n+1$ разных одночленов, следовательно, итоговый ответ будет

$$1 + 3 + \ldots + 2029 + 2031 = 1016^2 = 1032256$$

Следующие задачи решите с обоснованием ответа

9. **(20 баллов)** Найдите все значения x и y, для которых выполняется равенство:

$$(x - 11)^2 + (y - 12)^2 + (x - y)^2 = \frac{1}{3}.$$

Ответ: $x = 11\frac{1}{3}$, $y = 11\frac{2}{3}$

Решение: Используем неравенство между средним квадратичным и средним арифметическим:

$$\sqrt{\frac{(x-11)^2 + (12-y)^2 + (x-y)^2}{3}} \geqslant \frac{|x-11| + |12-y| + |x-y|}{3} \geqslant \frac{x - 11 + 12 - y + y - x}{3} = \frac{1}{3}.$$

То есть $(x-11)^2 + (12-y)^2 + (x-y)^2 \geqslant \frac{1}{3}$. Равенство достигается только при $x - 11 = 12 - y = y - x = \frac{1}{3}$. Тогда $x = 11\frac{1}{3}$, $y = 11\frac{2}{3}$.

10. **(20 баллов)** Пусть x, y, z натуральные числа удовлетворяющие условию $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$. Докажите, что НОД$(x, y, z) \cdot xyz$ – квадрат натурального числа.

Решение: Пусть НОД$(x, y, z) = d$ и $x = dx_1, y = dy_1, z = dz_1$, причем НОД$(x_1, y_1, z_1) = 1$. Подставим и получим $\frac{1}{x_1} = \frac{1}{y_1} + \frac{1}{z_1}$ и нужно доказать, что $d^4 x_1 y_1 z_1$ – квадрат натурального числа, следовательно достаточно доказать, что $x_1 y_1 z_1$ – квадрат натурального числа.
Приведем к общему знаменателю, прибавим к обеим частям x_1^2 и получим $x_1^2 = (x_1 - y_1)(x_1 - z_1)$. Далее если у чисел $x_1 - y_1$ и $x_1 - z_1$ есть общий простой множитель p, то $x_1^2 \vdots p$, следовательно $x_1 \vdots p$. Из этого получаем, что $y_1 \vdots p$ и $z_1 \vdots p$, значит они не взаимнопросты в совокупности. Противоречие.
Получаем, что множители $x_1 - y_1$ и $x_1 - z_1$ взаимнопросты, а так как их произведение квадрат, то и каждый множитель – квадрат. Далее мы знаем, что $y_1 z_1 = x_1 y_1 + x_1 z_1$, следовательно $x_1 y_1 z_1 = z_1^2 (y_1 - x_1)$ – квадрат натурального числа. Что и требовалось доказать.

Innopolis Open
Олимпиада по математике
Университета Иннополис

Второй отборочный (заочный) этап, 22 декабря 2018г.

11 класс, вариант 8.

1. **(5 баллов)** Найдите градусную меру угла

$$\delta = \arccos\left(\left(\sin\ 3271^\circ + \sin\ 3272^\circ + \cdots + \sin\ 6871^\circ\right)^{\cos\ 3240^\circ + \cos\ 3241^\circ + \cdots + \cos\ 6840^\circ}\right)$$

Ответ: 59°

Решение: Из утверждения $\cos\ \alpha + \cos(\alpha + 180^\circ) = 0$ следует, что $\cos\ \alpha + \cos(\alpha + 1^\circ) + \cdots + \cos(\alpha + 179^\circ) = 0$. Тогда $\cos\ 3240^\circ + \cos\ 3241^\circ + \cdots + \cos\ 6839^\circ = 0$ и в показателе остается только $\cos\ 6840^\circ = 1$. Аналогично, $\sin\ \alpha + \sin(\alpha + 1^\circ) + \cdots + \sin(\alpha + 179^\circ) = 0$ и $\sin\ 3271^\circ + \sin\ 3272^\circ + \cdots + \sin\ 6870^\circ = 0$. $\sin\ 6871^\circ = \sin\ 31^\circ$. Тогда $\delta = \arccos(\sin\ 31^\circ) = 59^\circ$.

2. **(5 баллов)** Два различных натуральных числа заканчиваются 9 нулями и имеют ровно по 110 делителей. Найдите их сумму.

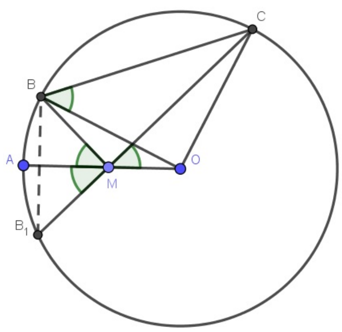
Ответ: 7000000000

Решение: Раз число заканчивается 9 нулями, то оно имеет вид $N = 10^9k$. Наименьшее из чисел такого вида 10^9 имеет 100 делителей: все делители имеют вид 2^a5^b, где a и b меняются от 0 до 9. Покажем, что k не имеет иных простых делителей кроме 2 и 5. В случае, когда k имеет другие простые делители, количество делителей у числа N увеличивается не менее чем вдвое: кроме первоначальных $1, 2, 5, 10, 20\ldots$ добавятся ещё $k, 2k, 5k, 10k, 20k$ и т.д. Следовательно, $10^9k = 2^a5^b$, и количество его делителей равно $(a+1)(b+1)$. Представить 110 в виде произведения двух сомножителей больших 9 можно единственным образом: $110 = 10 \cdot 11$. Тогда, $N = 2^9 5^1 0$ или $N = 2^1 0 5^9$. Их сумма равна 7000000000.

3. **(7 баллов)** На радиусе AO окружности с центром O выбрали точку M, по одну сторону от AO на окружности выбрали точки B и C так, чтобы $\angle AMB = \angle OMC = \alpha$. Найдите длину BC, если радиус окружности равен 14, $\sin\alpha = \frac{\sqrt{33}}{7}$?

Ответ: 16.

Решение:



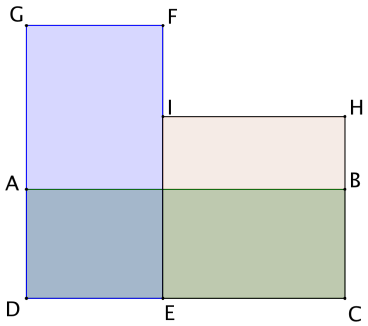
Рассмотрим точку B_1 симметричную точке B относительно прямой OA. Она так же лежит на окружности и $\angle AMB = \alpha$. Заметим, что точки B_1, M, C лежат на одной прямой, а ΔBB_1M – равнобедренный. Следовательно, вписанный угол $\angle BB_1M = 90^\circ - \alpha$, а центральный угол $\angle BOC = 180^\circ - 2\alpha$. ΔBOC – равнобедренный и $\angle OBC = \alpha$. $\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \frac{4}{7}$. Находим основание равнобедренного треугольника по формуле $BC = 2 * \cos\alpha * BO = 2 * \frac{4}{7} * 14 = 16$

4. **(7 баллов)** На доске записано 48 единиц. Каждую минуту Карлсон стирает два произвольных числа и записывает их сумму на доске, а затем съедает количество конфет равное произведению двух стертых чисел. Какое наибольшее количество конфет он мог съесть за 48 минут?

Ответ: 1128.

Решение: Изобразим 48 единиц как точки на плоскости. При каждом объединении чисел будем соединять отрезками соответствующие точки одной группы со всеми точками второй группы. Заметим, что если мы заменяем числа x и y на $x+y$, то группы "x" и "y" соединяются xy отрезками. Столько же конфет съедает Карлсон. Через 48 минут все точки будут соединены. Всего будет проведено $\dfrac{48\cdot(48-1)}{2}=1128$ отрезков. Следовательно, Карлсон съест 1128 конфет.

5. **(8 баллов)** Прямоугольники $ABCD, DEFG, CEIH$ имеют равные площади и целочисленные стороны. Найдите DG, если $BC=19$.



Ответ: 380

Решение: Пусть $DE=a$ и $EC=b$. Тогда площадь прямоугольников $S=19(a+b)$. По условию, S делится на a и b, то есть $S=ak$ и $S=bl$, где $k=DG$ и $l=CH$ – натуральные числа. Тогда $a=\dfrac{S}{k}$ и $b=\dfrac{S}{l}$. Получаем, что $S=\dfrac{19S}{k}+\dfrac{19S}{l}$. Следовательно, $kl=19(k+l)=>$ $kl-19k-19l+361=361=>(k-19)(l-19)=361$. Так как $l<k$, то есть, $l-19<k-19$. Следовательно, $l-19=1$ и $k-19=361$. Таким образом, $k=DG=380$.

6. **(8 баллов)** Пусть для положительных чисел x, y, z выполняется система уравнений:

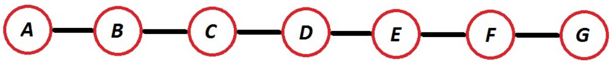
$$\begin{cases} x^2+xy+y^2=108, \\ y^2+yz+z^2=49, \\ z^2+xz+x^2=157. \end{cases}$$

Найдите значение выражения $xy+yz+xz$.

Ответ: 84

Решение: Пусть имеются три луча с вершиной O, образующих углы по 120° друг с другом. На них отложим отрезки $OA=x$, $OB=y$, $OC=z$. Тогда по теореме косинусов $AB^2=108$, $BC^2=49$, $AC^2=157$. Заметим, что треугольник ABC прямоугольный с гипотенузой AC. Сумма площадей треугольников AOB, BOC, AOC равна площади треугольника ABC. Что нам дает соотношение $\dfrac{1}{2}(xy+yz+xz)\sin 120^\circ=\dfrac{1}{2}\cdot 6\sqrt{3}\cdot 7$. Откуда получаем ответ.

7. **(10 баллов)** Семь кротовых нор A, B, C, D, E, F, G последовательно соединены шестью тоннелями. Каждую минуту крот по тоннелю перебегает в одну из соседних нор. Сколькими способами крот может добраться из норы D в B за 24 минут?



Ответ: 887040

Решение: Начиная в вершине D после четного числа минут крот может находиться только в вершинах B, D и F. Обозначим через b_k, d_k и f_k число путей длины $2k$, ведущих из D в B, в D и в F соответственно. $b_k = f_k$ из соображений симетрии. Заметим, что выполняются равенства $b_{k+1} = 2b_k + d_k$, $d_{k+1} = 2d_k + 2b_k$. Отсюда $b_{k+2} = 2b_{k+1} + d_{k+1} = 2b_{k+1} + 2d_k + 2b_k = 2b_{k+1} + 2(b_{k+1} - 2b_k) + 2b_k = 4b_{k+1} - 2b_k$.

B_0	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7
0	1	4	14	48	164	560	1912
B_8	B_9	B_{10}	B_{11}	B_{12}	B_{13}	B_{14}	B_{15}
6528	22288	76096	259808	887040	3028544	10340096	35303296

8. **(10 баллов)** В выражении $(x+y+z)^{2032}+(x-y-z)^{2032}$ раскрыли скобки и привели подобные члены. Сколько получилось одночленов $x^a y^b z^c$ с коэффициентом отличным от нуля?

Ответ: 1034289

Решение: Пусть $t = y + z$, тогда многочлен можно переписать $(x + t)^{2032} + (x - t)^{2032}$. Раскрываем обе скобки по бинома Ньютона и получаем

$$(x + t)^{2032} = x^{2032} + a_1 x^{2031} t + \ldots + a_{2031} x t^{2031} + t^{2032}$$
$$(x - t)^{2032} = x^{2032} - a_1 x^{2031} t + \ldots - a_{2031} x t^{2031} + t^{2032}$$

Складываем и получаем

$$(x + t)^{2032} + (x - t)^{2032} = 2(x^{2032} + a_2 x^{2030} t^2 + \ldots + a_{2030} x^2 t^{2030} + t^{2032})$$

Заметим, что при раскрытии разных t_1^n и t_2^n у нас будут получаться разные одночлены (так как степени при x будут различны). Так же при раскрытии t^n у нас будет получаться $n+1$ разных одночленов, следовательно, итоговый ответ будет

$$1 + 3 + \ldots + 2031 + 2033 = 1017^2 = 1034289$$

Следующие задачи решите с обоснованием ответа

9. **(20 баллов)** Найдите все значения x и y, для которых выполняется равенство:

$$(x - 12)^2 + (y - 13)^2 + (x - y)^2 = \frac{1}{3}.$$

Ответ: $x = 12\frac{1}{3}$, $y = 12\frac{2}{3}$

Решение: Используем неравенство между средним квадратичным и средним арифметическим:

$$\sqrt{\frac{(x-12)^2 + (13-y)^2 + (x-y)^2}{3}} \geqslant \frac{|x-12| + |13-y| + |x-y|}{3} \geqslant \frac{x - 12 + 13 - y + y - x}{3} = \frac{1}{3}.$$

То есть $(x-12)^2 + (13-y)^2 + (x-y)^2 \geqslant \frac{1}{3}$. Равенство достигается только при $x - 12 = 13 - y = y - x = \frac{1}{3}$. Тогда $x = 12\frac{1}{3}$, $y = 12\frac{2}{3}$.

10. **(20 баллов)** Пусть x, y, z натуральные числа удовлетворяющие условию $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$. Докажите, что НОД$(x, y, z) \cdot xyz$ – квадрат натурального числа.

Решение: Пусть НОД$(x, y, z) = d$ и $x = dx_1, y = dy_1, z = dz_1$, причем НОД$(x_1, y_1, z_1) = 1$. Подставим и получим $\frac{1}{x_1} = \frac{1}{y_1} + \frac{1}{z_1}$ и нужно доказать, что $d^4 x_1 y_1 z_1$ – квадрат натурального числа, следовательно достаточно доказать, что $x_1 y_1 z_1$ – квадрат натурального числа.
Приведем к общему знаменателю, прибавим к обеим частям x_1^2 и получим $x_1^2 = (x_1 - y_1)(x_1 - z_1)$. Далее если у чисел $x_1 - y_1$ и $x_1 - z_1$ есть общий простой множитель p, то $x_1^2 \vdots p$, следовательно $x_1 \vdots p$. Из этого получаем, что $y_1 \vdots p$ и $z_1 \vdots p$, значит они не взаимнопросты в совокупности. Противоречие.
Получаем, что множители $x_1 - y_1$ и $x_1 - z_1$ взаимнопросты, а так как их произведение квадрат, то и каждый множитель – квадрат. Далее мы знаем, что $y_1 z_1 = x_1 y_1 + x_1 z_1$, следовательно $x_1 y_1 z_1 = z_1^2 (y_1 - x_1)$ – квадрат натурального числа. Что и требовалось доказать.

Второй отборочный (заочный) этап, 22 декабря 2018г.

11 класс, вариант 9.

1. **(5 баллов)** Найдите градусную меру угла

$$\delta = \arccos\left((\sin\ 2193^\circ + \sin\ 2194^\circ + \cdots + \sin\ 5793^\circ)^{\cos\ 2160^\circ + \cos\ 2161^\circ + \cdots + \cos\ 5760^\circ}\right)$$

Ответ: 57°

Решение: Из утверждения $\cos\ \alpha + \cos(\alpha + 180^\circ) = 0$ следует, что $\cos\ \alpha + \cos(\alpha + 1^\circ) + \cdots + \cos(\alpha + 179^\circ) = 0$. Тогда $\cos\ 2160^\circ + \cos\ 2161^\circ + \cdots + \cos\ 5759^\circ = 0$ и в показателе остается только $\cos\ 5760^\circ = 1$. Аналогично, $\sin\ \alpha + \sin(\alpha + 1^\circ) + \cdots + \sin(\alpha + 179^\circ) = 0$ и $\sin\ 2193^\circ + \sin\ 2194^\circ + \cdots + \sin\ 5792^\circ = 0$. $\sin\ 5793^\circ = \sin\ 33^\circ$. Тогда $\delta = \arccos(\sin\ 33^\circ) = 57^\circ$.

2. **(5 баллов)** Два различных натуральных числа заканчиваются 8 нулями и имеют ровно по 90 делителей. Найдите их сумму.

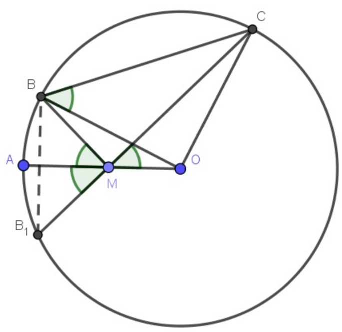
Ответ: 700000000

Решение: Раз число заканчивается 8 нулями, то оно имеет вид $N = 10^8 k$. Наименьшее из чисел такого вида 10^8 имеет 81 делителей: все делители имеют вид $2^a 5^b$, где a и b меняются от 0 до 8. Покажем, что k не имеет иных простых делителей кроме 2 и 5. В случае, когда k имеет другие простые делители, количество делителей у числа N увеличивается не менее чем вдвое: кроме первоначальных $1, 2, 5, 10, 20\ldots$ добавятся ещё $k, 2k, 5k, 10k, 20k$ и т.д. Следовательно, $10^8 k = 2^a 5^b$, и количество его делителей равно $(a+1)(b+1)$. Представить 90 в виде произведения двух сомножителей больших 8 можно единственным образом: $90 = 9 \cdot 10$. Тогда, $N = 2^8 5^9$ или $N = 2^9 5^8$. Их сумма равна 700000000.

3. **(7 баллов)** На радиусе AO окружности с центром O выбрали точку M, по одну сторону от AO на окружности выбрали точки B и C так, чтобы $\angle AMB = \angle OMC = \alpha$. Найдите длину BC, если радиус окружности равен 16, $\sin\alpha = \frac{\sqrt{55}}{8}$?

Ответ: 12.

Решение:



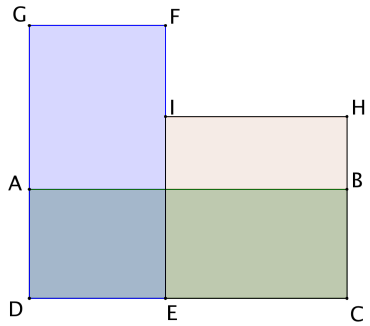
Рассмотрим точку B_1 симметричную точке B относительно прямой OA. Она так же лежит на окружности и $\angle AMB = \alpha$. Заметим, что точки B_1, M, C лежат на одной прямой, а ΔBB_1M – равнобедренный. Следовательно, вписанный угол $\angle BB_1M = 90^\circ - \alpha$, а центральный угол $\angle BOC = 180^\circ - 2\alpha$. ΔBOC – равнобедренный и $\angle OBC = \alpha$. $\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \frac{3}{8}$. Находим основание равнобедренного треугольника по формуле $BC = 2 * \cos\alpha * BO = 2 * \frac{3}{8} * 16 = 12$

4. **(7 баллов)** На доске записано 49 единиц. Каждую минуту Карлсон стирает два произвольных числа и записывает их сумму на доске, а затем съедает количество конфет равное произведению двух стертых чисел. Какое наибольшее количество конфет он мог съесть за 49 минут?

Ответ: 1176.

Решение: Изобразим 49 единиц как точки на плоскости. При каждом объединении чисел будем соединять отрезками соответствующие точки одной группы со всеми точками второй группы. Заметим, что если мы заменяем числа x и y на $x+y$, то группы "x" и "y" соединяются xy отрезками. Столько же конфет съедает Карлсон. Через 49 минут все точки будут соединены. Всего будет проведено $\dfrac{49\cdot(49-1)}{2} = 1176$ отрезков. Следовательно, Карлсон съест 1176 конфет.

5. **(8 баллов)** Прямоугольники $ABCD, DEFG, CEIH$ имеют равные площади и целочисленные стороны. Найдите DG, если $BC = 17$.



Ответ: 306

Решение: Пусть $DE = a$ и $EC = b$. Тогда площадь прямоугольников $S = 17(a+b)$. По условию, S делится на a и b, то есть $S = ak$ и $S = bl$, где $k = DG$ и $l = CH$ – натуральные числа. Тогда $a = \dfrac{S}{k}$ и $b = \dfrac{S}{l}$. Получаем, что $S = \dfrac{17S}{k} + \dfrac{17S}{l}$. Следовательно, $kl = 17(k+l) =>$ $kl - 17k - 17l + 289 = 289 =>$ $(k-17)(l-17) = 289$. Так как $l < k$, то есть, $l - 17 < k - 17$. Следовательно, $l - 17 = 1$ и $k - 17 = 289$. Таким образом, $k = DG = 306$.

6. **(8 баллов)** Пусть для положительных чисел x, y, z выполняется система уравнений:

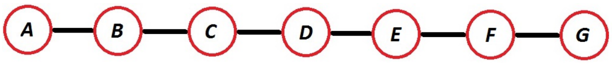
$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 108, \\ y^2 + yz + z^2 = 9, \\ z^2 + xz + x^2 = 117. \end{cases}$$

Найдите значение выражения $xy + yz + xz$.

Ответ: 36

Решение: Пусть имеются три луча с вершиной O, образующих углы по 120° друг с другом. На них отложим отрезки $OA = x$, $OB = y$, $OC = z$. Тогда по теореме косинусов $AB^2 = 108$, $BC^2 = 9$, $AC^2 = 117$. Заметим, что треугольник ABC прямоугольный с гипотенузой AC. Сумма площадей треугольников AOB, BOC, AOC равна площади треугольника ABC. Что нам дает соотношение $\dfrac{1}{2}(xy + yz + xz)\sin 120^\circ = \dfrac{1}{2}\cdot 6\sqrt{3}\cdot 3$. Откуда получаем ответ.

7. **(10 баллов)** Семь кротовых нор A, B, C, D, E, F, G последовательно соединены шестью тоннелями. Каждую минуту крот по тоннелю перебегает в одну из соседних нор. Сколькими способами крот может добраться из норы D в B за 26 минут?



Ответ: 3028544

Решение: Начиная в вершине D после четного числа минут крот может находиться только в вершинах B, D и F. Обозначим через b_k, d_k и f_k число путей длины $2k$, ведущих из D в B, в D и в F соответственно. $b_k = f_k$ из соображений симметрии. Заметим, что выполняются равенства $b_{k+1} = 2b_k + d_k$, $d_{k+1} = 2d_k + 2b_k$. Отсюда $b_{k+2} = 2b_{k+1} + d_{k+1} = 2b_{k+1} + 2d_k + 2b_k = 2b_{k+1} + 2(b_{k+1} - 2b_k) + 2b_k = 4b_{k+1} - 2b_k$.

B_0	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7
0	1	4	14	48	164	560	1912
B_8	B_9	B_{10}	B_{11}	B_{12}	B_{13}	B_{14}	B_{15}
6528	22288	76096	259808	887040	3028544	10340096	35303296

8. **(10 баллов)** В выражении $(x+y+z)^{2034}+(x-y-z)^{2034}$ раскрыли скобки и привели подобные члены. Сколько получилось одночленов $x^a y^b z^c$ с коэффициентом отличным от нуля?

Ответ: 1036324

Решение: Пусть $t = y + z$, тогда многочлен можно переписать $(x+t)^{2034} + (x-t)^{2034}$. Раскрываем обе скобки по бинома Ньютона и получаем

$$(x+t)^{2034} = x^{2034} + a_1 x^{2033} t + \ldots + a_{2033} x t^{2033} + t^{2034}$$
$$(x-t)^{2034} = x^{2034} - a_1 x^{2033} t + \ldots - a_{2033} x t^{2033} + t^{2034}$$

Складываем и получаем

$$(x+t)^{2034} + (x-t)^{2034} = 2(x^{2034} + a_2 x^{2032} t^2 + \ldots + a_{2032} x^2 t^{2032} + t^{2034})$$

Заметим, что при раскрытии разных t_1^n и t_2^n у нас будут получаться разные одночлены (так как степени при x будут различны). Так же при раскрытии t^n у нас будет получаться $n+1$ разных одночленов, следовательно, итоговый ответ будет

$$1 + 3 + \ldots + 2033 + 2035 = 1018^2 = 1036324$$

Следующие задачи решите с обоснованием ответа

9. **(20 баллов)** Найдите все значения x и y, для которых выполняется равенство:

$$(x-13)^2 + (y-14)^2 + (x-y)^2 = \frac{1}{3}.$$

Ответ: $x = 13\frac{1}{3}$, $y = 13\frac{2}{3}$

Решение: Используем неравенство между средним квадратичным и средним арифметическим:

$$\sqrt{\frac{(x-13)^2 + (14-y)^2 + (x-y)^2}{3}} \geqslant \frac{|x-13| + |14-y| + |x-y|}{3} \geqslant \frac{x - 13 + 14 - y + y - x}{3} = \frac{1}{3}.$$

То есть $(x-13)^2 + (14-y)^2 + (x-y)^2 \geqslant \frac{1}{3}$. Равенство достигается только при $x - 13 = 14 - y = y - x = \frac{1}{3}$. Тогда $x = 13\frac{1}{3}$, $y = 13\frac{2}{3}$.

10. **(20 баллов)** Пусть x, y, z натуральные числа удовлетворяющие условию $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$. Докажите, что НОД$(x, y, z) \cdot xyz$ – квадрат натурального числа.

Решение: Пусть НОД$(x, y, z) = d$ и $x = dx_1, y = dy_1, z = dz_1$, причем НОД$(x_1, y_1, z_1) = 1$. Подставим и получим $\frac{1}{x_1} = \frac{1}{y_1} + \frac{1}{z_1}$ и нужно доказать, что $d^4 x_1 y_1 z_1$ – квадрат натурального числа, следовательно достаточно доказать, что $x_1 y_1 z_1$ – квадрат натурального числа.
Приведем к общему знаменателю, прибавим к обеим частям x_1^2 и получим $x_1^2 = (x_1 - y_1)(x_1 - z_1)$. Далее если у чисел $x_1 - y_1$ и $x_1 - z_1$ есть общий простой множитель p, то $x_1^2 \vdots p$, следовательно $x_1 \vdots p$. Из этого получаем, что $y_1 \vdots p$ и $z_1 \vdots p$, значит они не взаимнопросты в совокупности. Противоречие.
Получаем, что множители $x_1 - y_1$ и $x_1 - z_1$ взаимнопросты, а так как их произведение квадрат, то и каждый множитель – квадрат. Далее мы знаем, что $y_1 z_1 = x_1 y_1 + x_1 z_1$, следовательно $x_1 y_1 z_1 = z_1^2 (y_1 - x_1)$ – квадрат натурального числа. Что и требовалось доказать.

Второй отборочный (заочный) этап, 22 декабря 2018г.

11 класс, вариант 10.

1. **(5 баллов)** Найдите градусную меру угла

$$\delta = \arccos\left((\sin\ 2195^\circ + \sin\ 2196^\circ + \cdots + \sin\ 5795^\circ)^{\cos\ 2160^\circ + \cos\ 2161^\circ + \cdots + \cos\ 5760^\circ}\right)$$

Ответ: 55°

Решение: Из утверждения $\cos\ \alpha + \cos(\alpha + 180^\circ) = 0$ следует, что $\cos\ \alpha + \cos(\alpha + 1^\circ) + \cdots + \cos(\alpha + 179^\circ) = 0$. Тогда $\cos\ 2160^\circ + \cos\ 2161^\circ + \cdots + \cos\ 5759^\circ = 0$ и в показателе остается только $\cos\ 5760^\circ = 1$. Аналогично, $\sin\ \alpha + \sin(\alpha + 1^\circ) + \cdots + \sin(\alpha + 179^\circ) = 0$ и $\sin\ 2195^\circ + \sin\ 2196^\circ + \cdots + \sin\ 5794^\circ = 0$. $\sin\ 5795^\circ = \sin\ 35^\circ$. Тогда $\delta = \arccos(\sin\ 35^\circ) = 55^\circ$.

2. **(5 баллов)** Два различных натуральных числа заканчиваются 6 нулями и имеют ровно по 56 делителей. Найдите их сумму.

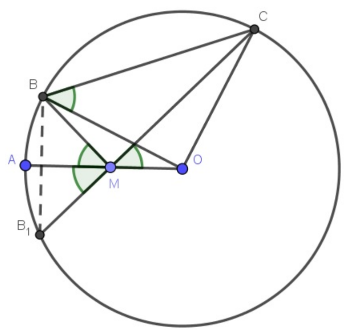
Ответ: 7000000

Решение: Раз число заканчивается 6 нулями, то оно имеет вид $N = 10^6 k$. Наименьшее из чисел такого вида 10^6 имеет 49 делителей: все делители имеют вид $2^a 5^b$, где a и b меняются от 0 до 6. Покажем, что k не имеет иных простых делителей кроме 2 и 5. В случае, когда k имеет другие простые делители, количество делителей у числа N увеличивается не менее чем вдвое: кроме первоначальных $1, 2, 5, 10, 20\ldots$ добавятся ещё $k, 2k, 5k, 10k, 20k$ и т.д. Следовательно, $10^6 k = 2^a 5^b$, и количество его делителей равно $(a+1)(b+1)$. Представить 56 в виде произведения двух сомножителей больших 6 можно единственным образом: $56 = 7 \cdot 8$. Тогда, $N = 2^6 5^7$ или $N = 2^7 5^6$. Их сумма равна 7000000.

3. **(7 баллов)** На радиусе AO окружности с центром O выбрали точку M, по одну сторону от AO на окружности выбрали точки B и C так, чтобы $\angle AMB = \angle OMC = \alpha$. Найдите длину BC, если радиус окружности равен 16, $\sin\alpha = \frac{\sqrt{39}}{8}$?

Ответ: 20.

Решение:



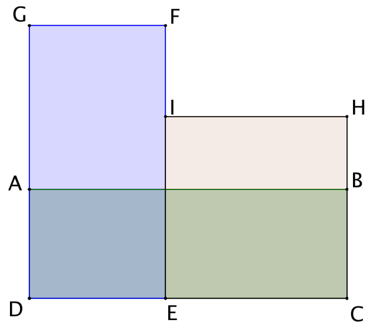
Рассмотрим точку B_1 симметричную точке B относительно прямой OA. Она так же лежит на окружности и $\angle AMB = \alpha$. Заметим, что точки B_1, M, C лежат на одной прямой, а ΔBB_1M – равнобедренный. Следовательно, вписанный угол $\angle BB_1M = 90^\circ - \alpha$, а центральный угол $\angle BOC = 180^\circ - 2\alpha$. ΔBOC – равнобедренный и $\angle OBC = \alpha$. $\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \frac{5}{8}$. Находим основание равнобедренного треугольника по формуле $BC = 2 * \cos\alpha * BO = 2 * \frac{5}{8} * 16 = 20$

4. **(7 баллов)** На доске записано 50 единиц. Каждую минуту Карлсон стирает два произвольных числа и записывает их сумму на доске, а затем съедает количество конфет равное произведению двух стертых чисел. Какое наибольшее количество конфет он мог съесть за 50 минут?

Ответ: 1225.

Решение: Изобразим 50 единиц как точки на плоскости. При каждом объединении чисел будем соединять отрезками соответствующие точки одной группы со всеми точками второй группы. Заметим, что если мы заменяем числа x и y на $x+y$, то группы "x" и "y" соединяются xy отрезками. Столько же конфет съедает Карлсон. Через 50 минут все точки будут соединены. Всего будет проведено $\dfrac{50\cdot(50-1)}{2} = 1225$ отрезков. Следовательно, Карлсон съест 1225 конфет.

5. **(8 баллов)** Прямоугольники $ABCD, DEFG, CEIH$ имеют равные площади и целочисленные стороны. Найдите DG, если $BC = 13$.



Ответ: 182

Решение: Пусть $DE = a$ и $EC = b$. Тогда площадь прямоугольников $S = 13(a+b)$. По условию, S делится на a и b, то есть $S = ak$ и $S = bl$, где $k = DG$ и $l = CH$ – натуральные числа. Тогда $a = \dfrac{S}{k}$ и $b = \dfrac{S}{l}$. Получаем, что $S = \dfrac{13S}{k} + \dfrac{13S}{l}$. Следовательно, $kl = 13(k+l) =>$ $kl - 13k - 13l + 169 = 169 => (k-13)(l-13) = 169$. Так как $l < k$, то есть, $l - 13 < k - 13$. Следовательно, $l - 13 = 1$ и $k - 13 = 169$. Таким образом, $k = DG = 182$.

6. **(8 баллов)** Пусть для положительных чисел x, y, z выполняется система уравнений:

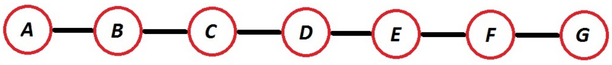
$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 147, \\ y^2 + yz + z^2 = 9, \\ z^2 + xz + x^2 = 156. \end{cases}$$

Найдите значение выражения $xy + yz + xz$.

Ответ: 42

Решение: Пусть имеются три луча с вершиной O, образующих углы по 120° друг с другом. На них отложим отрезки $OA = x$, $OB = y$, $OC = z$. Тогда по теореме косинусов $AB^2 = 147$, $BC^2 = 9$, $AC^2 = 156$. Заметим, что треугольник ABC прямоугольный с гипотенузой AC. Сумма площадей треугольников AOB, BOC, AOC равна площади треугольника ABC. Что нам дает соотношение $\dfrac{1}{2}(xy + yz + xz)\sin 120^\circ = \dfrac{1}{2}\cdot 7\sqrt{3}\cdot 3$. Откуда получаем ответ.

7. **(10 баллов)** Семь кротовых нор A, B, C, D, E, F, G последовательно соединены шестью тоннелями. Каждую минуту крот по тоннелю перебегает в одну из соседних нор. Сколькими способами крот может добраться из норы D в B за 28 минут?



Ответ: 10340096

Решение: Начиная в вершине D после четного числа минут крот может находиться только в вершинах B, D и F. Обозначим через b_k, d_k и f_k число путей длины $2k$, ведущих из D в B, в D и в F соответственно. $b_k = f_k$ из соображений симетрии. Заметим, что выполняются равенства $b_{k+1} = 2b_k + d_k$, $d_{k+1} = 2d_k + 2b_k$. Отсюда $b_{k+2} = 2b_{k+1} + d_{k+1} = 2b_{k+1} + 2d_k + 2b_k = 2b_{k+1} + 2(b_{k+1} - 2b_k) + 2b_k = 4b_{k+1} - 2b_k$.

B_0	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7
0	1	4	14	48	164	560	1912
B_8	B_9	B_{10}	B_{11}	B_{12}	B_{13}	B_{14}	B_{15}
6528	22288	76096	259808	887040	3028544	10340096	35303296

8. **(10 баллов)** В выражении $(x+y+z)^{2036}+(x-y-z)^{2036}$ раскрыли скобки и привели подобные члены. Сколько получилось одночленов $x^a y^b z^c$ с коэффициентом отличным от нуля?

Ответ: 1038361

Решение: Пусть $t = y + z$, тогда многочлен можно переписать $(x + t)^{2036} + (x - t)^{2036}$. Раскрываем обе скобки по бинома Ньютона и получаем

$$(x+t)^{2036} = x^{2036} + a_1 x^{2035} t + \ldots + a_{2035} x t^{2035} + t^{2036}$$
$$(x-t)^{2036} = x^{2036} - a_1 x^{2035} t + \ldots - a_{2035} x t^{2035} + t^{2036}$$

Складываем и получаем

$$(x+t)^{2036} + (x-t)^{2036} = 2(x^{2036} + a_2 x^{2034} t^2 + \ldots + a_{2034} x^2 t^{2034} + t^{2036})$$

Заметим, что при раскрытии разных t_1^n и t_2^n у нас будут получаться разные одночлены (так как степени при x будут различны). Так же при раскрытии t^n у нас будет получаться $n+1$ разных одночленов, следовательно, итоговый ответ будет

$$1 + 3 + \ldots + 2035 + 2037 = 1019^2 = 1038361$$

Следующие задачи решите с обоснованием ответа

9. **(20 баллов)** Найдите все значения x и y, для которых выполняется равенство:

$$(x-14)^2 + (y-15)^2 + (x-y)^2 = \frac{1}{3}.$$

Ответ: $x = 14\frac{1}{3}$, $y = 14\frac{2}{3}$

Решение: Используем неравенство между средним квадратичным и средним арифметическим:

$$\sqrt{\frac{(x-14)^2 + (15-y)^2 + (x-y)^2}{3}} \geqslant \frac{|x-14| + |15-y| + |x-y|}{3} \geqslant \frac{x - 14 + 15 - y + y - x}{3} = \frac{1}{3}.$$

То есть $(x-14)^2 + (15-y)^2 + (x-y)^2 \geqslant \frac{1}{3}$. Равенство достигается только при $x - 14 = 15 - y = y - x = \frac{1}{3}$. Тогда $x = 14\frac{1}{3}$, $y = 14\frac{2}{3}$.

10. (20 баллов) Пусть x, y, z натуральные числа удовлетворяющие условию $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$. Докажите, что НОД$(x, y, z) \cdot xyz$ – квадрат натурального числа.

Решение: Пусть НОД$(x, y, z) = d$ и $x = dx_1, y = dy_1, z = dz_1$, причем НОД$(x_1, y_1, z_1) = 1$. Подставим и получим $\frac{1}{x_1} = \frac{1}{y_1} + \frac{1}{z_1}$ и нужно доказать, что $d^4 x_1 y_1 z_1$ – квадрат натурального числа, следовательно достаточно доказать, что $x_1 y_1 z_1$ – квадрат натурального числа.
Приведем к общему знаменателю, прибавим к обеим частям x_1^2 и получим $x_1^2 = (x_1 - y_1)(x_1 - z_1)$. Далее если у чисел $x_1 - y_1$ и $x_1 - z_1$ есть общий простой множитель p, то $x_1^2 \vdots p$, следовательно $x_1 \vdots p$. Из этого получаем, что $y_1 \vdots p$ и $z_1 \vdots p$, значит они не взаимнопросты в совокупности. Противоречие.
Получаем, что множители $x_1 - y_1$ и $x_1 - z_1$ взаимнопросты, а так как их произведение квадрат, то и каждый множитель – квадрат. Далее мы знаем, что $y_1 z_1 = x_1 y_1 + x_1 z_1$, следовательно $x_1 y_1 z_1 = z_1^2 (y_1 - x_1)$ – квадрат натурального числа. Что и требовалось доказать.