Innopolis Open
Олимпиада по математике Университета Иннополис

11 класс

Задача 1 – стоимость 8 баллов

Рассмотрим квадратное уравнение $x^2 + 3x + 2 = 0$: очевидно, что это уравнение имеет два корня $x_1 = -1$ и $x_2 = -2$, оба из которых являются целыми. Однако, если произвести перестановку первого и третьего коэффициентов, то получится другое квадратное уравнение $2x^2 + 3x + 1 = 0$, корни которого равны $x_2 = -1$, $x_2 = -0.5$, то есть не являются целыми числами.

Пусть $n > 1$ – натуральное число. Существуют ли попарно различные целые числа $a_0, a_1, \dots a_n$ (ни одно из которых не равно нулю), что для всякой их перестановки $p_0, p_1, \dots p_n \in \{a_0, a_1, \dots a_n\}$ уравнение $p_n x^n + p_{n-1} x^{n-1} + \dots + p_0 = 0$ имеет исключительно целочисленные корни? Приведите пример хотя бы одной такой последовательности, если такая последовательность существует. Опишите все такие последовательности.

Решение

См. решение задачи 1 для 10 класса.

Задача 2 – стоимость 10 баллов

Что больше: число перестановок из 100 или число сочетаний из 400 по 100?

Решение

Оценим снизу число $100!$, равное числу перестановок из 100:

$$100! = 1 \times \dots \times 9 \times 10 \times \dots \times 91 \times \dots \times 99 \times 100 =$$

$$= (1 \times \dots \times 9) \times (10 \times \dots \times 19) \times \dots \times (90 \times \dots \times 99) \times 10^2 >$$

$$> (9!) \times (10^{10}) \times \dots \times (90^{10}) \times 10^2 = (9!) \times (1^{10} \times 10^{10}) \times \dots \times (9^{10} \times 10^{10}) \times 10^2 =$$

$$= (9!)^{11} \times 10^{92} = (362880)^{11} \times 10^{92} > (32 \times 10^4)^{11} \times 10^{92} = 2^{55} \times 10^{136} >$$

$$> 32 \times 10^{15} \times 10^{136} = 32 \times 10^{151}.$$

Оценим сверху число $\frac{400!}{100!300!}$, равное сочетаний из 400 по 100:

$$\frac{400!}{100! \times 300!} = \frac{301 \times \dots \times 400}{100!} < \frac{400^{100}}{32 \times 10^{151}} = \frac{2^{200} \times 10^{200}}{2^5 \times 10^{151}} = 2^{195} \times 10^{49} =$$

$$= (2^3)^{65} \times 10^{49} < 10^{65} \times 10^{49} = 10^{114}.$$

Так как сочетаний из 400 по 100 меньше 10^{114}, а число перестановок из 100 больше 32×10^{151}, то число перестановок из 100 больше числа сочетаний из 400 по 100.

Задача 3 – стоимость 10 баллов

В неком городе с населением не менее 20000 (двадцати тысяч) человек (с правом избирательного голоса) городской совет состоит из 100 депутатов, избираемых (соответственно) в 100 одномандатных избирательных округах. В каждом из избирательных округов зарегистрировано одинаковое число избирателей (не менее 100 человек). Каждый из избирателей является дисциплинированным сторонником одной из трёх партий A, B и C (и голосует только за кандидата в депутаты только от своей партии). От округа избирается тот кандидат, который набрал на выборах более 50% голосов избирателей округа. В целом по городу число сторонников партий A, B и C

соответственно 50%, 30% и 20%. Какое максимальное и минимальное число мест в городском совете может получить каждая из партий?

Решение

Важное Наблюдение: так как партия выигрывает (вернее – может выиграть) на избирательном участке, когда у неё поддержка 50% +1 голос на этом участке, то для каждой партии оптимальная стратегия – иметь как можно больше участков, где её сторонники составляют 50% избирателей, а потом – добавить на все (кроме одного) участки по одному избирателю (с этого выделенного участка); так как избирателей в городе не менее 20000, то на участке, где партия имеет 50% у нее не менее 100 сторонников, поэтому их хватит, что бы пополнить все участки (кроме одного фиксированного участка-донора) одни избирателем.

Пусть n – общее число избирателей в городе. По условию в каждом избирательном участке ровно ${}^{n}/_{100}$ избирателей. Если у партии в целом по городу процент сторонников $p\%$, то число ее сторонников в городе у неё $\frac{pn}{100}$; если k – максимальное число избирательных участков, в которых не менее 50% сторонников этой партии, то $\frac{pn}{100k} = 0.5 \times \frac{n}{100}$ откуда получаем $k = 2p$.

Так как по условию задачи у партии A – ровно 50% сторонников по городу в целом, то максимальное число участков, на которых она могла бы победить $k_A = 2 \times 50 = 100$; но так как партия A должна из одного избирательного участка-донора добавить во все остальные участки по одному избирателю, то эта партия может получить 99 мест городского собрания, и, следовательно, одна из партий B или C сможет победить на участке-доноре партии A, а другая из этих партий не получит ни одного места в городском собрании.

Так как по условию задачи у партии B – ровно 30% сторонников по городу в целом, то максимальное число участков, на которых она могла бы победить $k_B = 2 \times 30 = 60$; но так как партия B должна из одного избирательного участка-донора добавить во все остальные участки по одному избирателю, то эта партия может получить 59 мест городского собрания.

Так как по условию задачи у партии C – ровно 20% сторонников по городу в целом, то максимальное число участков, на которых она могла бы победить $k_B = 2 \times 20 = 40$; но так как партия C должна из одного избирательного участка-донора добавить во все остальные участки по одному избирателю, то эта партия может получить 39 мест городского собрания.

Следовательно, при координации партий B и C партия A может получить только два места в городском собрании.

Партия	A	B	C
Максимум мест	99	59	39
Минимум мест	2	0	0

Задача 4 – стоимость 8 баллов

Даны три отрезка L_1, L_2 и L_3, длины которых – простые числа. Опишите, как с помощью циркуля и линейки построить такой отрезок L, что длина которого равна объёму прямоугольного параллелепипеда со сторонами L_1, L_2 и L_3.

Решение

Надо построить отрезок L, что длина которого равна произведению длин отрезков L_1, L_2 и L_3. Так как длины L_1, L_2 и L_3 – простые числа, то надо построить отрезок, длина которого наименьшее общее кратное длин всех трёх отрезков, то есть – кратчайший отрезок, соизмеримый со всеми отрезками L_1, L_2 и L_3. Поэтому алгоритм построения (с помощью циркуля и линейки) отрезка L: вдоль прямой откладываем (начиная с общей точки) копии этих отрезков до первого совпадения концов копий очередных отложенных отрезков.

Задача 5 – стоимость 14 баллов

Прочитайте следующую «теорему» и её «доказательство». Верна ли эта «теорема», нет ли ошибок в «доказательстве». Если «теорема» верна, подтвердите это (и, по возможности, приведите альтернативное доказательство). А если «теорема» не верна, то приведите контрпример, исправьте формулировку теоремы и/или доказательство так, чтобы получилось истинное утверждение и корректное доказательство.

Теорема: Всякий четырёхугольник, котором три стороны равны и один из углов между равными сторонами – прямой, является квадратом.

Доказательство:

Предположим, противное, то есть пусть существует четырехугольник $ABCD$ (см. рис. 1), в котором $|AB| = |BC| = |CD|$, а угол $\angle ABC$ – прямой, но в этом четырёхугольнике есть тупой угол $\angle BCD$. Построим срединные перпендикуляры EO и FO к сторонам BC и A, где O – точка пересечения этих перпендикуляров (см. рис. 2). Соединим точку O с вершинами A, B, C и D (см. рис. 3). По построению: $\Delta OBE = \Delta OCE$, $\angle OBE = \angle OCE$ и $|OB| = |OC|$; также по построению: $\Delta OAF = \Delta ODF$ и $|OA| = |OD|$. В силу равенства трёх сторон $\Delta OBA = \Delta OCD$ и, следовательно, $\angle OBA = \angle OCD$. Поэтому $\angle ABC = \angle OBA + \angle OBE = \angle OCD + \angle OCE = \angle BCD$, то есть угол $\angle ABC$ – прямой. Теорема доказана.

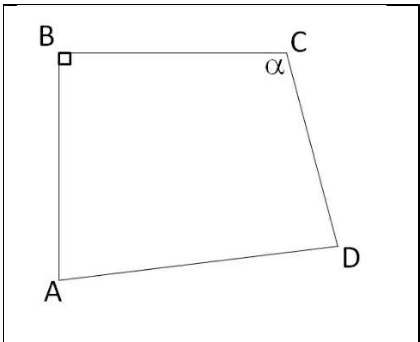

Рис. 1

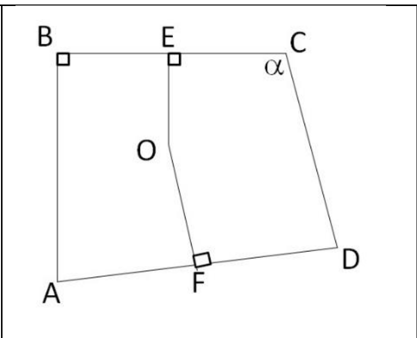

Рис. 2

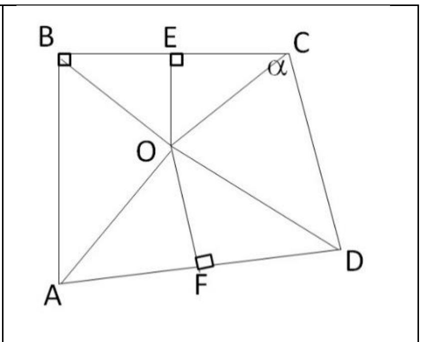

Рис. 3

Решение

«Теорема» неверна, ошибка «доказательства» - в чертеже, который предполагает, что серединные перпендикуляры к BC и AD пересекаются внутри четырёхугольника. На самом деле, мы доказываем (методом от противного), что *в построенном четырёхугольнике серединные перпендикуляры к сторонам BC и AD имеют точку пересечения вне четырёхугольника*. – Действительно, в противном случае мы приходим к выводу (см. «доказательство»), что тупой угол равен прямому.