ОТКРЫТАЯ ОЛИМПИАДА УНИВЕРСИТЕТА ИННОПОЛИС

II отборочный (заочный) этап по математике, 16 декабря 2017г.

11 класс, вариант 1.

1. **(5 баллов)** Натуральное число разделили на сумму его цифр, результат — на сумму его цифр, новый результат — на сумму его цифр. В итоге получилось число 2. Найдите исходное число.

2. **(5 баллов)** Все различные девятизначные числа, полученные из 123456789 перестановкой цифр, записали в порядке возрастания. Какое число написано на 2018-ом месте этой последовательности?

3. **(7 баллов)** Максим дважды бросил игральный кубик, грани которого пронумерованы числами от 1 до 6, и построил прямоугольник со сторонами, равными выпавшим числам. Какова вероятность, что площадь этого прямоугольника будет больше 10? Ответ округлите до сотых.

4. **(7 баллов)** Сколько решений имеет уравнение $41\{x\} + 9[x] = 2018$?

5. **(8 баллов)** В графе 6 вершин и 10 рёбер. Какое наибольшее значение может принимать сумма квадратов степеней вершин этого графа? В графе нет петель и кратных ребер.

6. **(8 баллов)** Известно, что многочлен $x^5 - 9x - 27$ делится на многочлен с целыми коэффициентами $x^3 + ax^2 + bx + c$. Найдите b.

7. **(10 баллов)** Найдите наименьшее значение выражения

$$4x^2 + 5y^2 - 4xy + 4x + 10y + 17.$$

8. **(10 баллов)** Треугольную пирамиду разрезали по боковым ребрам и развернули. Развертка оказалась квадратом со стороной 60. Найдите объем исходной пирамиды.

Следующие задачи решите с обоснованием ответа

9. **(20 баллов)** Внутри треугольника ABC отмечена точка P так, что $\angle PAC = \angle PBC$. Точки M и N — проекции точки P на стороны AC и BC соответственно, D — середина AB. Докажите, что $DM = DN$.

10. **(20 баллов)** Плоскость разбита на правильные треугольники со стороной 1. Рассмотрим множество M всех возможных расстояний между вершинами этих треугольников, т.е. $x \in M$ тогда и только тогда, когда существуют две вершины на расстоянии x друг от друга. Докажите, что если $x \in M$ и $y \in M$, то $x \cdot y \in M$.