Заключительный этап
11 класс

1. У натурального числа n взяли наименьший делитель a, отличный от 1, и следующий за ним по величине делитель b. Оказалось, что $n = a^a + b^b$. Найдите n.

2. Даны натуральные числа m и n. На столе лежат две кучи: в первой куче n камней, а во второй куче m камней. Петя и Вася играют в следующую игру. Начинает Петя. За один ход можно разбить одну из имеющихся на столе куч на несколько меньших. Проигрывает не имеющий хода. При каких m и n Петя может обеспечить себе победу вне зависимости от игры Васи?

3. На прямой ℓ отмечены точки A, B и C. Точка B лежит между точками A и C и $AB < BC$. Две окружности ω_1 и ω_2, радиусы которых больше AB, но меньше BC, лежат по разные стороны от прямой ℓ и касаются её в точке B. Пусть K — точка пересечения касательной к ω_1, проведенной из точки A, и касательной к ω_2, проведенной из точки C, а L — точка пересечения касательной к ω_2, проведенной из точки A, и касательной к ω_1, проведенной из точки C. Докажите, что четырехугольник $AKCL$ — описанный.

4. Найдите все значения параметров a и b, для которых неравенство
$$|x^2 + ax + b| \leqslant \frac{1}{8}$$
выполняется для всех значений $x \in [0; 1]$.

5. На плоскости отмечено $4n + 2$ точки, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Половина точек покрашена в красный цвет, половина — в зеленый. Докажите, что существует такая прямая, проходящая через одну красную и одну зеленую точку, с одной стороны от которой находится ровно n красных и ровно n зеленых точек.

IV олимпиада Университета Иннополис по математике INNOPOLIS OPEN 2018

Заключительный этап
11 класс

1. У натурального числа n взяли наименьший делитель a, отличный от 1, и следующий за ним по величине делитель b. Оказалось, что $n = a^a + b^b$. Найдите n.

2. Даны натуральные числа m и n. На столе лежат две кучи: в первой куче n камней, а во второй куче m камней. Петя и Вася играют в следующую игру. Начинает Петя. За один ход можно разбить одну из имеющихся на столе куч на несколько меньших. Проигрывает не имеющий хода. При каких m и n Петя может обеспечить себе победу вне зависимости от игры Васи?

3. На прямой ℓ отмечены точки A, B и C. Точка B лежит между точками A и C и $AB < BC$. Две окружности ω_1 и ω_2, радиусы которых больше AB, но меньше BC, лежат по разные стороны от прямой ℓ и касаются её в точке B. Пусть K — точка пересечения касательной к ω_1, проведенной из точки A, и касательной к ω_2, проведенной из точки C, а L — точка пересечения касательной к ω_2, проведенной из точки A, и касательной к ω_1, проведенной из точки C. Докажите, что четырехугольник $AKCL$ — описанный.

4. Найдите все значения параметров a и b, для которых неравенство
$$|x^2 + ax + b| \leqslant \frac{1}{8}$$
выполняется для всех значений $x \in [0; 1]$.

5. На плоскости отмечено $4n + 2$ точки, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Половина точек покрашена в красный цвет, половина — в зеленый. Докажите, что существует такая прямая, проходящая через одну красную и одну зеленую точку, с одной стороны от которой находится ровно n красных и ровно n зеленых точек.