ОТКРЫТАЯ ОЛИМПИАДА УНИВЕРСИТЕТА ИННОПОЛИС

II отборочный (заочный) этап по математике, 16 декабря 2017г.

11 класс, вариант 1.

1. **(5 баллов)** Натуральное число разделили на сумму его цифр, результат — на сумму его цифр, новый результат — на сумму его цифр. В итоге получилось число 2. Найдите исходное число.

Ответ: 2916

2. **(5 баллов)** Все различные девятизначные числа, полученные из 123456789 перестановкой цифр, записали в порядке возрастания. Какое число написано на 2018-ом месте этой последовательности?

Ответ: 125893476

3. **(7 баллов)** Максим дважды бросил игральный кубик, грани которого пронумерованы числами от 1 до 6, и построил прямоугольник со сторонами, равными выпавшим числам. Какова вероятность, что площадь этого прямоугольника будет больше 10? Ответ округлите до сотых.

Ответ: 0.47

4. **(7 баллов)** Сколько решений имеет уравнение $41\{x\} + 9[x] = 2018$?

5

5. **(8 баллов)** В графе 6 вершин и 10 рёбер. Какое наибольшее значение может принимать сумма квадратов степеней вершин этого графа? В графе нет петель и кратных ребер.

Ответ: 76

6. **(8 баллов)** Известно, что многочлен $x^5 - 9x - 27$ делится на многочлен с целыми коэффициентами $x^3 + ax^2 + bx + c$. Найдите b.

Ответ: 6

7. **(10 баллов)** Найдите наименьшее значение выражения

$$4x^2 + 5y^2 - 4xy + 4x + 10y + 17.$$

Ответ: 7

8. **(10 баллов)** Треугольную пирамиду разрезали по боковым ребрам и развернули. Развертка оказалась квадратом со стороной 60. Найдите объем исходной пирамиды.

Ответ: 9000.

Следующие задачи решите с обоснованием ответа

9. **(20 баллов)** Внутри треугольника ABC отмечена точка P так, что $\angle PAC = \angle PBC$. Точки M и N — проекции точки P на стороны AC и BC соответственно, D — середина AB. Докажите, что $DM = DN$.

Решение. Ясно, что точки C, M, P, N лежат на окружности ω с диаметром CP. Пусть B_1 — вторая точка пересечения прямой BP с ω. Докажем, что B_1, M и D лежат на одной прямой. Пусть K — точка пересечения прямых BP и AC. По теореме Менелая для треугольника ABK, достаточно показать, что $AM/MK = BB_1/B_1K$.

Пусть точка T симметрична K относительно B_1. Поскольку CB_1 перпендикулярно B_1B, то $\triangle CKT$ — равнобедренный, следовательно, $\angle CTB_1 = \angle B_1KC = \angle AKP$. Таким образом, треугольники CBT и PAK подобны по двум углам, B_1, M — основания высот этих треугольников из точек C, P, соответственно. Таким образом, $BB_1/B_1T = AM/MK$. С другой стороны, $BB_1/B_1T = BB_1/B_1K$, следовательно, $AM/MK = BB_1/B_1K$, и B_1, M и D лежат на одной прямой.

Определим точку C_1 аналогично точке B_1. Из равенства углов CAP и CBP следует равенство углов B_1PM и C_1PN, что влечёт равенство хорд $B_1M = C_1N$. Кроме того, по свойству секущих, $DM \cdot DB_1 = DN \cdot DC_1$. Но тогда $DM = DN$, что и требовалось доказать.

10. **(20 баллов)** Плоскость разбита на правильные треугольники со стороной 1. Рассмотрим множество M всех возможных расстояний между вершинами этих треугольников, т.е. $x \in M$ тогда и только тогда, когда существуют две вершины на расстоянии x друг от друга. Докажите, что если $x \in M$ и $y \in M$, то $x \cdot y \in M$.

Решение. Заметим, что $x \in M$ тогда и только тогда, когда существуют такие целые числа a,b, что $x^2 = a^2 + ab + b^2$. В самом деле, пусть $x \in M$. Тогда существуют такие узлы A, B треугольной сетки, что $AB = x$. Рассмотрим пересечение O прямых, образующих сетку, содержащих точки A, B, соответственно. Обозначим $a = OA$, $b = OB$. Тогда, по теореме косинусов для треугольника AOB, имеем

$$x^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha,$$

где α — либо 60°, либо 120°. Таким образом,

$$x^2 = a^2 + b^2 \pm ab.$$

При необходимости заменив a на $-a$, получим необходимое представление.

Далее, если x^2 представляется в таком виде, построим соответствующие точки A, B, отложив от точки O отрезок длины a по горизонтальной оси и отрезок b под углом 120° к горизонтальной оси. По теореме косинусов имеем $AB = a^2 + ab + b^2 = x^2$.

Осталось показать, что если x^2, y^2 представляются в виде a^2+ab+b^2 и c^2+cd+d^2, соответственно, то произведение x^2y^2 также представляется в таком виде. Предъявим искомое представление. Несложно проверить, что

$$(a^2 + ab + b^2)(c^2 + cd + d^2) =$$
$$= (ac - bd)^2 + (ac - bd)(bc + ad + bd) + (bc + ad + bd)^2,$$

что завершает решение задачи.

Комментарий. Необходимое разложение, как и непосредственное решение задачи, несложно получается из рассмотрения кольца чисел Эйзенштейна.