ОТКРЫТАЯ ОЛИМПИАДА УНИВЕРСИТЕТА ИННОПОЛИС

I отборочный (заочный) этап по математике, 3 декабря 2017г.

11 класс, вариант 1.

1. (**5 баллов**) Игральный кубик бросали 5 раз. Найдите вероятность того, что среди выпавших очков найдутся два одинаковых. Ответ округлите до сотых.

Ответ: 0.91

2. (**5 баллов**) Найдите $x_1^3+x_2^3+x_3^3$, где x_1, x_2 и x_3 корни уравнения
$$x^3+3x^2-10x-10=0.$$

Ответ: -87.

3. (**7 баллов**) Решите уравнение $16^{x^2+y}+16^{y^2+x}=1$. В ответ запишите значение переменной x.

Ответ: -0.5

4. (**7 баллов**) Найдите наименьшее натуральное значение n такое, что число $3^{2n}-1$ делится на 2^{11}.

Ответ: 256.

5. (**8 баллов**) Найдите количество способов выбрать 5 чисел из множества $\{1,\ 2,\ \ldots, 10\}$ так, чтобы среди выбранных не было трех последовательных чисел.

Ответ: 126

6. (**8 баллов**) Дан прямоугольный треугольник ABC с катетами $AC=BC=17$. На стороне AC отмечена точка D так, что $CD=7$. Впишите в треугольник ABC треугольник DEF наименьшего периметра (E лежит на стороне AB и F — на BC). В ответ напишите периметр треугольника DEF.

Ответ: 26

7. (**10 баллов**) На мероприятие в Иннополисе приехали n школьников. Оказалось, что у любых двух незнакомых между собой школьников среди участников мероприятия имеется ровно два общих знакомых, а у любых двух знакомых нет общих знакомых. Найдите наименьшее возможное n, если известно дополнительно, что количество школьников больше дюжины.

Ответ: 16

8. (**10 баллов**) В правильной четырехугольной усеченной пирамиде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведено сечение ABC_1D_1. Найдите отношение объемов полученных многогранников $\dfrac{V_{ABCDD_1C_1}}{V_{A_1B_1C_1D_1AB}}$, если $AB:A_1B_1=3$. Ответ округлите до сотых.

Ответ: 4.2.

Следующие задачи решите с обоснованием ответа

9. (**20 баллов**) M и N середины ребер AB и CD тетраэдра $ABCD$ соответственно. Через точки M и N проведено сечение, пересекающее ребра AC и BD в точках P и Q соответственно. Докажите, что
$$AP:AC=BQ:BD.$$

Решение. Пусть сечение из условия задачи пересекается с прямой BC по точке K. Из теоремы Менелая для треугольников ABC и DBC получаем
$$\frac{AM}{MB}\cdot\frac{BK}{KC}\cdot\frac{CP}{PA}=1,$$
$$\frac{DQ}{QB}\cdot\frac{BK}{KC}\cdot\frac{CN}{ND}=1.$$
Откуда получаем, что $\frac{PC}{AP}=\frac{KC}{BK}=\frac{QD}{BQ}$. Поэтому $\frac{AC}{AP}=1+\frac{PC}{AP}=1+\frac{QD}{BQ}=\frac{BD}{BQ}$, то есть $\frac{AP}{AC}=\frac{BQ}{BD}$, что и требовалось доказать.

10. (20 баллов) Найдите наименьшее значение параметра c такое, что система уравнений имеет единственное решение

$$\begin{cases} 8(x+7)^4+(y-4)^4=c, \\ (x+4)^4+8(y-7)^4=c. \end{cases}$$

Ответ: $c=24$.

Решение. По неравенству Коши-Буняковского-Шварца имеем

$$(1)\quad \left(\frac{1}{2}+1\right)^3\left(8(x+\alpha)^4+(y-\beta)^4\right)\geqslant$$
$$\geqslant\left(\left(\frac{1}{2}+1\right)\left(2(x+\alpha)^2+(y-\beta)^2\right)\right)^2\geqslant$$
$$\geqslant\left(|x+\alpha|+|y-\beta|\right)^4,$$

$$(2)\quad \left(1+\frac{1}{2}\right)^3\left(8(x+\beta)^4+(y-\alpha)^4\right)\geqslant$$
$$\geqslant\left(\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(2(x+\beta)^2+(y-\alpha)^2\right)\right)^2\geqslant$$
$$\geqslant\left(|x+\beta|+|y-\alpha|\right)^4.$$

А значит, для любого решения (x,y) системы выполнено

$$(3)\quad \frac{27}{4}c\geqslant\left(|x+\alpha|+|y-\beta|\right)^4+\left(|x+\beta|+|y-\alpha|\right)^4\geqslant$$
$$\geqslant(\alpha-\beta+x+y)^4+(\alpha-\beta-(x+y))^4=$$
$$=2(\alpha-\beta)^4+2(x+y)^4+12(\alpha-\beta)^2(x+y)^2\geqslant 2(\alpha-\beta)^4.$$

Следовательно, при $c<\frac{8}{27}(\alpha-\beta)^4$ решений у системы нет.
Ежели $c=\frac{8}{27}(\alpha-\beta)^4$, то во всех неравенствах (1)-(3) должно достигаться равенство. Следовательно $x+y=0$, числа $x+\alpha$ и $x+\beta$ должны быть разных знаков, а также

$$\frac{|x+\alpha|}{|x+\beta|}=\frac{1}{2}.$$

Из этих условий получается, что при $c=\frac{8}{27}(\alpha-\beta)^4$ имеется только одно решение $\left(-\frac{2\alpha+\beta}{3},\ \frac{2\alpha+\beta}{3}\right)$.
Замечание. Можно сразу заметить, что решение системы обладает симметрией относительно прямой $y=-x$ (две замкнутые кривые с центрами в точках $(-\alpha;\beta)$ и $(-\beta;\alpha)$). Решение будет единственно, если одна из этих кривых касается этой прямой. Это выполняется, если $c=\min f(x)$, где $f(x)=8(x+\alpha)^4+(x+\beta)^4$. $f'(x)=32(x+\alpha)^3+4(x+\beta)^3=0$ в точке $x_0=-\frac{2\alpha+\beta}{3}$. Тогда $c=f(x_0)$. https://ggbm.at/FVmUGS4Y