11 класс

1. У натурального числа n взяли наименьший делитель a, отличный от 1, и следующий за ним по величине делитель b. Оказалось, что $n = a^a + b^b$. Найдите n. *(А. Храбров)*

Ответ: $n = 2^2 + 4^4 = 260$.

Решение. Если n нечетно, то все его делители также нечетны. Тогда a и b нечетны и $a^a + b^b$ — четно. Поэтому n — четно. Тогда его наименьший делитель, отличный от 1, это 2 и, значит, $a = 2$. Стало быть, $n = 2^2 + b^b$. Следовательно, $4 = n - b^b$ делится на b. Тогда $b = 4$, поскольку $b > 2$. Таким образом, $n = 2^2 + 4^4 = 260$.■

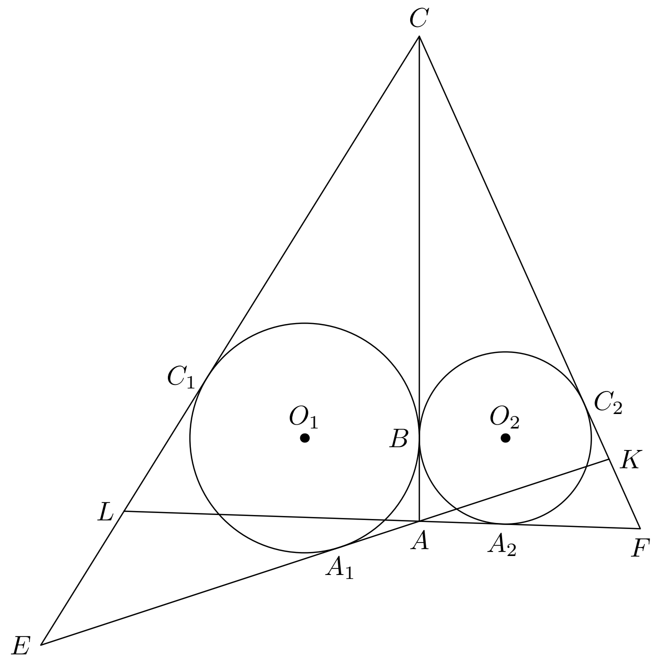
2. Даны натуральные числа m и n. На столе лежат две кучи: в первой куче n камней, а во второй куче m камней. Петя и Вася играют в следующую игру. Начинает Петя. За один ход можно разбить одну из имеющихся на столе куч на несколько меньших. Проигрывает не имеющий хода. При каких m и n Петя может обеспечить себе победу вне зависимости от игры Васи? *(А. Храбров)*

Ответ: $m \neq n$.

Решение. Если $m = n$, Вася сможет повторять ходы Пети и, значит, всегда сможет сделать ход. Пусть $m > n$. Тогда Петя разобьет кучу с m камнями на кучу с n камнями и $m - n$ куч по одному камню. С кучами по одному камню больше ничего делать нельзя, поэтому дальше игра будет происходить с двумя кучами по n камней. И здесь Петя будет повторять ходы Васи и, значит, всегда сможет сделать ход.■

3. На прямой ℓ отмечены точки A, B и C. Точка B лежит между точками A и C и $AB < BC$. Две окружности ω_1 и ω_2, радиусы которых больше AB, но меньше BC, лежат по разные стороны от прямой ℓ и касаются её в точке B. Пусть K — точка пересечения касательной к ω_1, проведенной из точки A, и касательной к ω_2, проведенной из точки C, а L — точка пересечения касательной к ω_2, проведенной из точки A, и касательной к ω_1, проведенной из точки C. Докажите, что четырехугольник $AKCL$ — описанный. (*фольклор*)

Решение.



Пусть касательные из точки A к окружностям ω_1 и ω_2 касаются их в точках A_1 и A_2 соответственно, а касательные из точки C к окружностям ω_1 и ω_2 касаются их в точках C_1 и C_2 соответственно. Обозначим точку пересечения прямых AA_1 и CC_1 через E, а точку пересечения прямых AA_2 и CC_2 через F.

Докажем, что невыпуклый четырехугольник $AECF$ — описанный. Для этого проверим, что $AE + CF = AF + CE$:

$$AE + CF = AA_1 + EA_1 + CC_2 + FC_2 = AB + EA_1 + CB + FC_2 =$$
$$= AA_2 + EA_1 + CC_1 + FC_2 = AA_2 + EC_1 + CC_1 + FA_2 = AF + CE.$$

Но тогда выпуклый четырехугольник $AKCL$ описан вокруг той же окружности.■

4. Найдите все значения параметров a и b, для которых неравенство

$$|x^2 + ax + b| \leqslant \frac{1}{8}$$

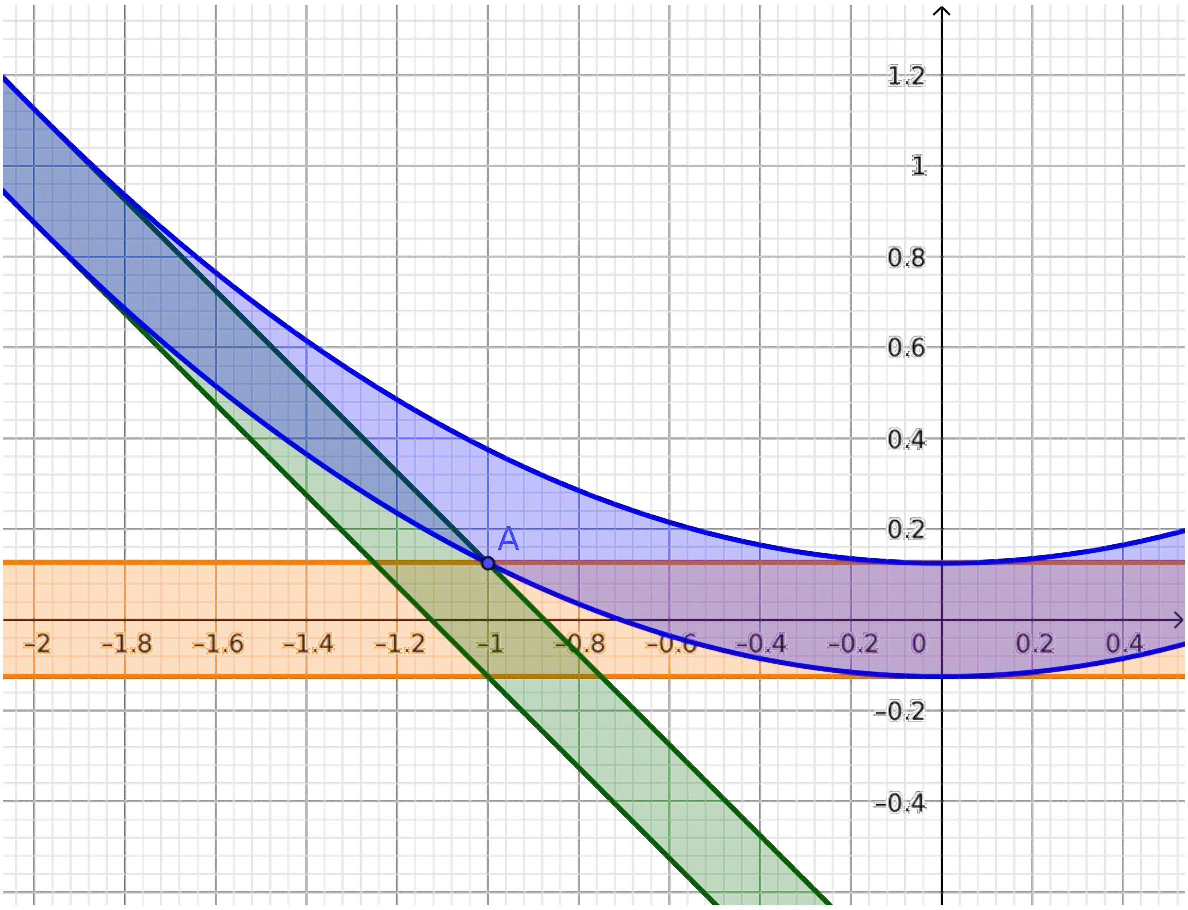
выполняется для всех значений $x \in [0; 1]$. (*Р. Алишев*)

Ответ: $a = -1$, $b = \frac{1}{8}$.

Решение. Наибольшее значение функции $f(x) = |x^2+ax+b|$ на отрезке $[0; 1]$ достигается в критических точках внутри отрезка или на концах. $f'(x) = \frac{x^2 + ax + b}{|x^2 + ax + b|} \cdot (2x + a)$, критическими являются корни уравнения $x^2 + ax + b = 0$ и $x = -0,5a$ В нуле и единице неравенство должно быть выполнено. Поэтому $f(0) = |b| \leqslant \frac{1}{8}$, $f(1) = |a+b+1| \leqslant \frac{1}{8}$. Отсюда несложно получить следующие ограничения на a и b: $-\frac{1}{8} \leqslant b \leqslant \frac{1}{8}$, $\frac{3}{4} \leqslant \frac{7}{8} + b \leqslant -a \leqslant \frac{9}{8} + b \leqslant \frac{5}{4}$, т.е. $-0,5a \in [0; 1]$. Для корней ураннения $x^2+ax+b = 0$ исходное неравенство, очевидно, будет выполняться. Все допустимые значения параметров находим из решения системы:

$$\begin{cases} -\frac{1}{8} \leqslant b \leqslant \frac{1}{8} \\ |a + b + 1| \leqslant \frac{1}{8} \\ |-\frac{a^2}{4} + b| \leqslant \frac{1}{8} \end{cases}$$

Построим на плоскости все точки, удовлетворяющие каждому из неравенств. По абсциссе отложим значения параметра a, по ординате — параметра b.



Только точка $(-1; 0,125)$ входит в решение каждого из неравенств. Докажем более строго, что нет других решений системы

$$\begin{cases} -\frac{1}{8} \leqslant b \leqslant \frac{1}{8} \\ -a - \frac{9}{8} \leqslant b \leqslant -a - \frac{7}{8} \\ \frac{a^2}{4} - \frac{1}{8} \leqslant b \leqslant \frac{a^2}{4} + \frac{1}{8}. \end{cases}$$

Если $a^2 > 1$, то из первого и третьего неравенства получим: $b \leqslant \frac{1}{8} < \frac{a^2}{4} - \frac{1}{8} \leqslant b$, что невозможно. Если же $a^2 < 1$, то $b \leqslant -a - \frac{7}{8} < \frac{a^2}{4} - \frac{1}{8} \leqslant b$, что тоже не имеет решения. При $a^2 = 1$ из третьего неравенства сразу получим $b = \frac{1}{8}$, а затем со второго $a = -1$. ■

5. На плоскости отмечено $4n + 2$ точки, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Половина точек покрашена в красный цвет, половина — в зеленый. Докажите, что существует такая прямая, проходящая через одну красную и одну зеленую точку, с одной стороны от которой находится ровно n красных и ровно n зеленых точек.

(*дискретная версия классической теоремы из топологии*)

Решение. Рассмотрим произвольную прямую ℓ, которая не параллельна никакой из прямых, соединяющих красные точки. Проведем такую параллельную ей прямую, что все точки будут лежать по одну ее сторону. Будем двигать эту прямую параллельно в сторону точек.

Каждый раз, когда она будет проходить через одну красную точку, количество точек с одной стороны от прямой будет уменьшаться на единицу, а с другой стороны от прямой увеличиваться на единицу. Тогда в какой-то момент прямая пройдет через такую красную точку, что по разные стороны от прямой будет поровну красных точек. Таким образом, в каждом направлении, за исключением конечного числа, у нас есть единственная прямая, проходящая через красную точку и делящая красные точки на две равные группы.

Рассмотрим теперь одну такую прямую. Для удобства изложение зафиксируем на ней направление. Пусть прямая проходит через красную точку R_1. Будем вращать ее по часовой стрелке относительно точки R_1 до тех пор, пока она не наткнется на новую красную точку.

Пусть левее этой прямой a зеленых точек, а правее — b зеленых точек. В процессе вращения будем следить за изменением разности $a - b$. Это количество меняется на единицу когда прямая проходит через зеленую точку и еще на единицу, когда прямая проходит дальше. Итак, пусть прямая наткнулась на красную точку R_2. Дальше будем вращать прямую по часовой стрелке относительно точки R_2 до тех пор, пока она не наткнется на новую красную точку R_3 и т.д..

Во все моменты времени по разные стороны от прямой будет поровну красных точек, а количество зеленых точек слева от прямой будет в некоторые моменты времени меняться на единицу. В какой-то момент прямая сделает полоборота. При этом в силу единственности прямой, делящей красные точки на две равные группы, она снова пройдет через точку R_1.
Тогда это будет та самая прямая, с которой началось вращение, но направление на ней будет противоположным. Поэтому левее ее будут те зеленые точки, которые раньше были правее. Следовательно, разность $a-b$ превратилась в разность $b-a$. Значит, она поменяла знак. Но поскольку все изменения были на единицу, в какой-то момент времени эта разность оказалась равна нулю. Тогда для соответствующей этому моменту времени прямой по разные стороны от нее будет поровну зеленых точек. А поскольку мы рассматриваем исключительно прямые по разные стороны от которых поровну и красных точек, мы нашли требуемую прямую.■