ОТКРЫТАЯ ОЛИМПИАДА УНИВЕРСИТЕТА ИННОПОЛИС

II отборочный (заочный) этап по математике, 17 декабря 2016г.

9 класс, полные решения.

1. **(5 баллов)** Сколько существует перестановок $\{\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n\}$ множества чисел $\{1, 2, \ldots, n\}$ таких, что $\pi_1 < \pi_2 < \ldots < \pi_{k-1} < \pi_k > \pi_{k+1} > \ldots > \pi_n$?

Решение: Так как π_k больше всех остальных чисел в нашей перестановке, то $\pi_k = n$. Остальные $n-1$ число нужно разбить на две группы по $k-1$ и $n-k$ чисел (числа, лежащие слева от π_k, и числа, лежащие справа от π_k). После разбиения порядок чисел в каждой группе однозначен (строго убывающий или строго возрастающий). Выбрать $k-1$ число мы можем $C_{n-1}^{k-1} = \dfrac{(n-1)!}{(k-1)! \cdot (n-k)!}$ способом (остальные мы отнесем к числам второй группы). ■

Ответы:

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ответ	126	462	330	252	792	924	715	1287	560	1365

2. **(5 баллов)** Найдите такое максимальное натуральное число n, что

$$m! - (m+1)! + (m+2)! \,\vdots\, 3^n$$

Решение: Вынесем $m!$ как общий множитель и раскроем скобки

$$m! - (m+1)! + (m+2)! = m! \cdot (1 - (m+1) + (m+1)\cdot(m+2)) =$$
$$= m! \cdot (m^2 + 2m + 2) = m! \cdot ((m+1)^2 + 1)$$

Так как полные квадраты при делении на 3 дают остатки 0 и 1, то число $(m+1)^2+1$ на 3 не делится. Следовательно, степень вхождения 3 в число $m!-(m+1)!+(m+2)!$ совпадает со степенью вхождения в $m!$. Известно, что степень вхождения простого числа p в $m!$ находится по формуле

$$\nu_p(m!) = \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{m}{p^i}\right]$$

В нашем случае для $p = 3$ и таких i, что $3^i > m$ величина $\left[\frac{m}{3^i}\right] = 0$, поэтому сумма конечна и легко вычисляется вручную. ■

Ответы:

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ответ	498	400	422	449	475	444	498	440	494	463

3. (7 баллов) На первом этапе олимпиады среди участников по математике было $a\%$ девочек, а среди участников по информатике $b\%$ девочек. Известно также, что никто не участвовал на олимпиаде по обоим предметам и всего среди участников первого этапа $c\%$ девочек. Найдите отношение количества девочек, участвовавших на олимпиаде по информатике, к количеству девочек, участвовавших на олимпиаде по математике ($a > c > b$).

Решение: Пусть x – всего участников олимпиады по математике, y – всего участников по информатике. Тогда

$$c = \frac{ax + by}{x + y} \Longrightarrow \frac{y}{x} = \frac{a - c}{c - b}$$

Искомое отношение равно

$$\frac{by}{ax} = \frac{b(a - c)}{a(c - b)} \quad \blacksquare$$

Ответы:

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ответ	0.3	0.2	2.5	0.3	1.7	1.5	0.8	1.2	1.8	2.5

4. **(7 баллов)** Над строкой из четырёх чисел a, b, c, d проделаем следующую операцию: между каждыми двумя соседними числами впишем число, которое получится в результате вычитания левого числа из правого. Над новой строкой проделаем ту же операцию и т.д. Найдите сумму чисел строки, которая получится после m таких операций.

Решение: Посмотрим, как изменяется сумма строки после очередной операции. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – строка к которой применяется операция. Тогда новая строка имеет вид $a_1, a_2 - a_1, a_2, a_3 - a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n - a_{n-1}, a_n$. Сумма чисел новой строки равна

$$S_m = a_1 + (a_2 - a_1) + a_2 + (a_3 - a_2) + \ldots + a_{n-1} + (a_n - a_{n-1}) + a_n =$$
$$= (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) + (a_n - a_1) = S_{m-1} + (a_n - a_1)$$

Заметим теперь, что для любой строки, полученной из строки a, b, c, d при помощи нескольких операции, выполняется $a_n = d$ и $a_1 = a$. В итоге получаем

$$S_m = S_{m-1} + (d - a) = \ldots = S_0 + m \cdot (d - a) = a + b + c + d + m \cdot (d - a) \quad \blacksquare$$

Ответы:

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ответ	7150	4110	2480	7288	5560	6144	4380	5732	8042	7454

5. **(8 баллов)** Решите уравнение $x^4-(a+b)\cdot x^3+(ab-2c)\cdot x^2+c(a+b)\cdot x+c^2=0$. В ответ напишите сумму квадратов действительных корней уравнения.

Решение: $x=0$ не является решением уравнения, поэтому можно поделить на x^2. Сгруппируем

$$\left(x^2-2c+\frac{c^2}{x^2}\right)-(a+b)\cdot\left(x-\frac{c}{x}\right)+ab=0$$

$$\left(x-\frac{c}{x}\right)^2-(a+b)\cdot\left(x-\frac{c}{x}\right)+ab=0$$

$$\left(x-\frac{c}{x}-a\right)\cdot\left(x-\frac{c}{x}-b\right)=0$$

Решаем через дискриминант два уравнения $x^2-ax-c=0$ и $x^2-bx-c=0$. Находим корни

$$x_{1,2}=\frac{a\pm\sqrt{a^2+4c}}{2} \quad \text{и} \quad x_{3,4}=\frac{b\pm\sqrt{b^2+4c}}{2}$$

Все четыре корня – действительные числа (во всех вариантах числа были подобраны таким образом, чтобы дискриминанты неотрицательны). В итоге получаем

$$\left(\frac{a-\sqrt{a^2+4c}}{2}\right)^2+\left(\frac{a+\sqrt{a^2+4c}}{2}\right)^2+\left(\frac{b-\sqrt{b^2+4c}}{2}\right)^2+\left(\frac{b+\sqrt{b^2+4c}}{2}\right)^2=$$

$$=\frac{a^2+(a^2+4c)+b^2+(b^2+4c)}{2}=a^2+b^2+4c \quad \blacksquare$$

Решение (нечестное): Если поверить, что все четыре корня уравнения являются действительными числами, то возможно найти ответ более коротким способом. По теореме Виета

$$x_1+x_2+x_3+x_4=a+b$$

$$x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4=ab-2c$$

Поэтому

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=(x_1+x_2+x_3+x_4)^2-2(x_1x_2+\ldots+x_3x_4)=$$

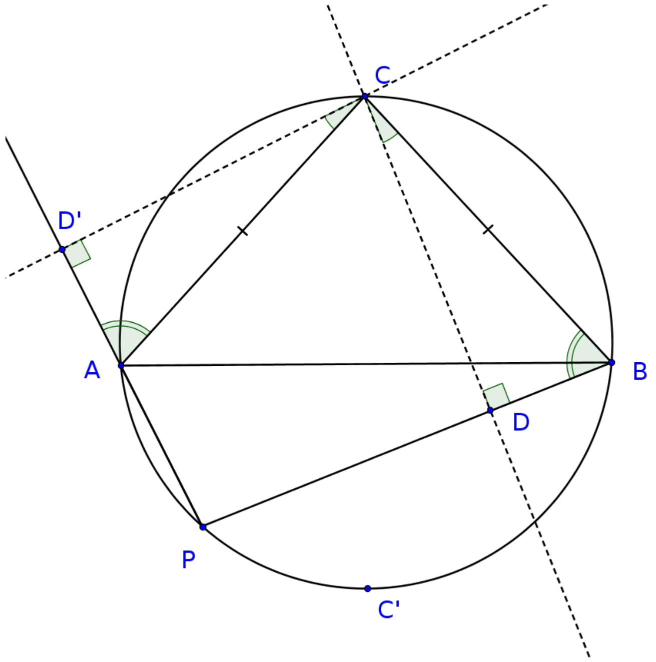
$$=(a+b)^2-2(ab-2c)=a^2+b^2+4c \quad \blacksquare$$

Ответы:

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ответ	93	88	118	150	126	158	132	189	198	137

6. **(8 баллов)** На описанной окружности равнобедренного треугольнике ABC ($AC = BC$) взята точка P (точка P лежит на дуге AB, не содержащей точку C). Точка D – основание перпендикуляра опущенного из точки C на прямую BP. Найдите длину отрезка PD, если $AP = a$ и $BP = b$.

Решение:



Во всех вариантах были даны такие параметры a и b, что $AP < BP$. Пусть точка C' – середина дуги AB, не содержащей точку C (точка C диаметрально противоположна точке C'). Следовательно, точка P лежит на дуге AC', не содержащей точку B. Получаем $\angle CBP < \angle CBC' = 90°$ и поэтому высота CD падает на отрезок BP. Аналогично $\angle CAP > \angle CAC' = 90°$ и поэтому высота CD' падает на продолжение AP за точку A.

Так как четырехугольник $ABCD$ вписанный, то $\angle CBP = \angle CAD'$. Так же известно, что $AC = BC$, следовательно, $\triangle CBD = \triangle CAD'$ (по гипотенузе и острому углу). Получаем, что $BD = AD'$ и $CD = CD'$. Треугольники $\triangle CPD$ и $\triangle CPD'$ также равны по катету ($CD = CD'$) и общей гипотенузе CP. Значит, $PD' = PD$.

В итоге получаем

$$PD = PB - DB = PB - D'A = PB - (PD' - PA) =$$

$$= b + a - PD' = b + a - PD$$

Откуда следует, что $PD = \dfrac{a+b}{2}$. ■

Ответы:

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ответ	4.9	4.9	3.95	4.8	5.15	4.65	4.55	4.95	3.9	5.35

7. **(10 баллов)** Кубический многочлен $P(x)$ с действительных коэффициентами делится на два квадратных трехчлена

$$Q(x) = x^2 + (k - a)x - k \quad \text{и} \quad R(x) = 2x^2 + (2k - (2a - 15))x + k$$

без остатка. Найдите наибольшее значение k, при котором это возможно.

Решение: Заметим, что $R(x) = 2Q(x) + 15x + 3k$. Следовательно, многочлены не могут отличаться друг от друга на некоторый действительный множитель c. Поэтому получаем, что наш кубический многочлен $P(x)$ имеет три действительных корня n, m и l. Не умоляя общности можно считать, что $Q(x) = (x - n) \cdot (x - m)$ и $R(x) = 2 \cdot (x - m) \cdot (x - l)$.

Рассмотрим выражение $R(x) = 2Q(x) + 15x + 3k$ при $x = m$. Так как m корень обоих многочленов, то $15m + 3k = 0$. Следовательно, $k = -5m$. Подставим вместо k найденное значение и рассмотрим $Q(m)$.

$$Q(m) = m^2 - 5m^2 - am + 5m = m \cdot (5 - a - 4m) = 0$$

Первый случай $m = 0$. Тогда $k = 0$.

Второй случай $m = \dfrac{5 - a}{4}$. Тогда $k = \dfrac{5a - 25}{4}$.

Во всех вариантах были подобраны параметры $a > 5$ такие, что $\dfrac{5a - 25}{4} > 0$. Осталось привести такие многочлены $P(x)$, $Q(x)$ и $R(x)$, при которых все условия выполняются:

$$Q(x) = (x - 5) \cdot \left(x + \frac{a - 5}{4}\right)$$

$$R(x) = 2 \cdot \left(x + \frac{a - 5}{4}\right) \cdot (x + 2.5)$$

$$P(x) = (x - 5) \cdot \left(x + \frac{a - 5}{4}\right) \cdot (x + 2.5) \quad \blacksquare$$

Ответы:

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ответ	28.75	36.25	26.25	33.75	27.5	37.5	30	35	32.5	31.25

8. **(10 баллов)** Действительные числа a, b, x и y таковы, что

$$\begin{cases} ax+by=r-t \\ ax^2+by^2=r \\ ax^3+by^3=r+t \\ ax^4+by^4=r+t^2 \end{cases}$$

Найдите ax^5+by^5.

Решение: Заметим, что

$$ax^3+by^3=(ax^2+by^2)\cdot(x+y)-xy\cdot(ax+by)$$
$$ax^4+by^4=(ax^3+by^3)\cdot(x+y)-xy\cdot(ax^2+by^2)$$

Получаем систему из двух уравнений:

$$\begin{cases} r\cdot(x+y)-(r-t)\cdot xy=r+t \\ (r+t)\cdot(x+y)-r\cdot xy=r+t^2 \end{cases}$$

Решаем ее относительно xy и $x+y$ и находим

$$\begin{cases} x+y=\dfrac{2r}{t}+t-r \\ xy=\dfrac{2r}{t}-r+1 \end{cases}$$

Распишем аналогично

$$ax^5+by^5=(ax^4+by^4)\cdot(x+y)-xy\cdot(ax^3+by^3)=$$
$$=(r+t^2)\cdot\left(\frac{2r}{t}+t-r\right)-\left(\frac{2r}{t}-r+1\right)\cdot(r+t)=$$
$$=\frac{2r^2}{t}+rt-r^2+2rt+t^3-t^2r-\frac{2r^2}{t}+r^2-r-2r+tr-t=$$
$$=4rt+t^3-t^2r-3r-t=3r\cdot(t-1)-rt\cdot(t-1)+t\cdot(t+1)\cdot(t-1)=$$
$$=(t-1)\cdot(t^2+t\cdot(1-r)+3r)$$

Итоговый ответ мы получили не вычисляя сами числа x, y, a и b. ■

Ответы:

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ответ	24	24	40	132	33	144	24	3	6	280

9. **(20 баллов)** Четырехзначное число $\overline{abcd}$ называется *идеальным*, если $a+b=c+d$. Сколько существует идеальных чисел представимых в виде суммы двух четырехзначных палиндромов?

Решение: Пусть число $\overline{abcd} = \overline{nmmn} + \overline{xyyx}$, тогда

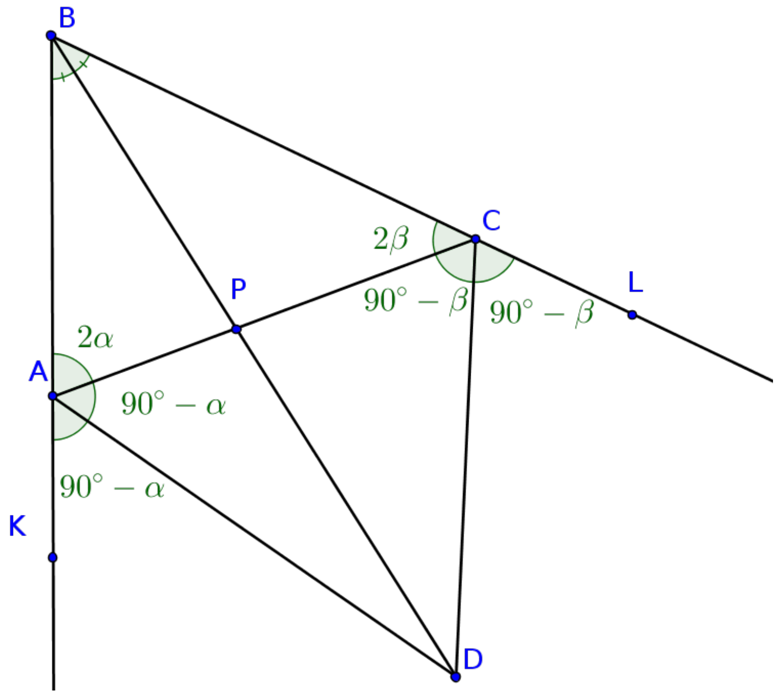
$$\overline{abcd} = 1001(n+x) + 110(m+y) \vdots 11$$

Из признака делимости на 11 следует $b+d=a+c$. Так как число $\overline{abcd}$ идеальное, то получаем $a=d$ и $b=c$, следовательно, исходное число палиндром, причем первая цифра не равна 1 (иначе оно не представляется в виде суммы двух четырехзначных чисел). Все четырехзначные палиндромы задаются первыми двумя цифрами, причем первая цифра может быть выбрана 8 способами, а вторая 10. В итоге получаем, что таких чисел всего $8 \cdot 10 = 80$. Осталось заметить, что каждое полученное число можно представить в виде $\overline{abba} = 1001 + \overline{(a-1)bb(a-1)}$. ■

Ответы: 80.

10. **(20 баллов)** Диагонали AC и BD выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке P. Найдите $\angle APB$, если $\angle BAC = 2\alpha$, $\angle BCA = 2\beta$, $\angle CAD = 90^\circ - \alpha$ и $\angle ACD = 90^\circ - \beta$.

Решение:



Очевидно, что

$$\angle LCD = 180^\circ - (90^\circ - \beta) - 2\beta = 90^\circ - \beta = \angle ACD$$

и

$$\angle KAD = 180^\circ - (90^\circ - \alpha) - 2\alpha = 90^\circ - \alpha = \angle CAD$$

Получаем, что AD и CD внешние биссектрисы треугольника ABC. Следовательно, BD – биссектриса $\angle ABC$. Поэтому

$$\angle ABP = \angle PBC = \frac{180^\circ - 2\alpha - 2\beta}{2} = 90^\circ - \alpha - \beta$$

Тогда искомый угол можно найти как внешний угол треугольника BPC

$$\angle BPA = \angle PBC + \angle BCP = 90^\circ - \alpha - \beta + 2\beta = 90^\circ - \alpha + \beta \quad \blacksquare$$

Ответы:

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ответ	70°	85°	72°	80°	74°	65°	75°	75°	80°	81°