ОТКРЫТАЯ ОЛИМПИАДА УНИВЕРСИТЕТА ИННОПОЛИС

I отборочный (заочный) этап по математике, 4 декабря 2016г.

9 класс, полные решения.

1. **(5 баллов)** Чему равно число m в пятеричной (семеричной, одиннацатеричной) системе счисления?

Ответы:

Вариант	1	2	3	4	5	6	7
Ответ	101313	33243	6323	6526	100412	101313	12265

8	9	10	11
12501	100343	12253	30434

2. **(5 баллов)** Решите в целых числах уравнение

$$x^2 - y^2 + 2(a+b)x + 2(a-b)y = p - 4ab \qquad p \in \mathbb{P}$$

В ответ напишите наименьшее значение переменной x.

Решение: Преобразуем наше уравнение к виду

$$(x^2 + 2(a+b)x + (a+b)^2) - (y^2 - 2(a-b)y + (a-b)^2) = p$$

Получаем

$$(x+a+b)^2 - (y-a+b)^2 = p$$

или

$$(x-y+2a)\cdot(x+y+2b) = p$$

Получаем четыре возможных варианта

$$\begin{cases} x-y+2a=1 \\ x+y+2b=p \end{cases} \quad \begin{cases} x-y+2a=-1 \\ x+y+2b=-p \end{cases} \quad \begin{cases} x-y+2a=p \\ x+y+2b=1 \end{cases} \quad \begin{cases} x-y+2a=-p \\ x+y+2b=-1 \end{cases}$$

Находим x и y

$$\begin{cases} x = \dfrac{p+1}{2} - a - b \\ y = \dfrac{p-1}{2} + a - b \end{cases} \quad \begin{cases} x = \dfrac{-p-1}{2} - a - b \\ y = \dfrac{1-p}{2} + a - b \end{cases} \quad \begin{cases} x = \dfrac{p+1}{2} - a - b \\ y = \dfrac{1-p}{2} + a - b \end{cases} \quad \begin{cases} x = \dfrac{-p-1}{2} - a - b \\ y = \dfrac{p-1}{2} + a - b \end{cases}$$

Минимальное значение $x = -\dfrac{p+1}{2} - a - b$. ■

Ответы:

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Ответ	-58	-59	-59	-60	-61	-62	-64	-65	-56	-57	-119

3. **(7 баллов)** Автобусный билет нумеруется шестью цифрами: от 000000 до 999999. Вы покупаете один билет. Какова вероятность того, что вам достанется билет, у которого цифры идут в порядке возрастания (убывания)?

Решение: Всего различных билетов 10^6 из них у C_{10}^6 цифры идут в порядке возрастания (убывания) (любые 6 цифр из 10 образуют ровно одно нужное нам число). Тогда вероятность равна $\dfrac{C_{10}^6}{10^6} = 0.00021$. ∎

(7 баллов) Автобусный билет нумеруется шестью цифрами: от 000000 до 999999. Вы покупаете один билет. Какова вероятность того, что вам достанется билет, у которого цифры различны?

Решение: Всего различных билетов 10^6 из них у $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$ билетов все цифры различны (на первое место цифру можно выбрать 10 способами, на вторую – 9 способами и т. д.). Тогда вероятность равна $\dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{10^6} = 0.1512$. ∎

(7 баллов) Автобусный билет нумеруется шестью цифрами: от 000000 до 999999. Вы покупаете один билет. Какова вероятность того, что вам достанется билет, у которого любые а) две; б) три; в) четыре последовательные цифры различны?

Решение: Всего различных билетов 10^6 из них у а) $10 \cdot 9^5$; б) $10 \cdot 9 \cdot 8^4$; в) $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7^3$ любые а) две; б) три; в) четыре последовательны цифры различны. Тогда вероятность равна а) $\dfrac{10 \cdot 9^5}{10^6} = 0.59049$; б) $\dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8^4}{10^6} = 0.36864$; в) $\dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7^3}{10^6} = 0.24696$. ∎

(7 баллов) Автобусный билет нумеруется шестью цифрами: от 000000 до 999999. Вы покупаете один билет. Какова вероятность того, что вам достанется билет, у которого найдутся хотя бы две одинаковые цифры?

Решение: Количество билетов, у которых найдутся хотя бы две одинаковые цифры, равно $10^6 - 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$ (из всех билетов нужно отнять те, у которых все цифры различны). Тогда вероятность равна $\dfrac{10^6 - 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{10^6} = 0.8488$. ∎

(7 баллов) Автобусный билет нумеруется шестью цифрами: от 000000 до 999999. Вы покупаете один билет. Какова вероятность того, что вам достанется билет, у которого хотя бы одна цифра а) больше 5; б) меньше 3)?

Решение: Количество билетов, у которых хотя бы одна цифра а) больше 5; б) меньше 3, равно а) $10^6 - 6^6$; б) $10^6 - 7^6$ (из всех билетов нужно отнять те, у которых все цифры а) не превосходят 5; б) не меньше 3). Тогда вероятность равна а) $\dfrac{10^6 - 6^6}{10^6} = 0.953344$; б) $\dfrac{10^6 - 7^6}{10^6} = 0.882351$. ∎

(7 баллов) Автобусный билет нумеруется шестью цифрами: от 000000 до 999999. Вы покупаете один билет. Какова вероятность того, что вам достанется билет, у которого ровно одна цифра меньше 3?

Решение: Количество билетов, у которых ровно одна цифра меньше 3, равно $6 \cdot 3 \cdot 7^5$ (6 способами можно выбрать позицию, в которой будет стоять цифра меньшая 3, а на остальных 5 позициях цифры не меньшие 3). Тогда вероятность равна $\dfrac{6 \cdot 3 \cdot 7^5}{10^6} = 0.302526$. ∎

(7 баллов) Лотерейные билеты нумеруется пятью цифрами: от 00000 до 99999. Вы покупаете один билет. Какова вероятность того, что вам достанется билет, у которого хотя бы одна цифра четная?

Решение: Количество билетов, у которых хотя бы одна цифра четная, равно $10^5 - 5^5$ (из всех билетов вычитаем те, у которых все цифры нечетные). Тогда вероятность равна $\dfrac{10^5 - 5^5}{10^5} = 0.96875$. ∎

4. **(7 баллов)** Решите уравнение

$$x+\sqrt{x+\frac{1}{2}+\sqrt{x+\frac{1}{4}}}=n^2 \qquad n>1$$

Решение: Выделим полный квадрат в подкоренном выражении

$$x+\sqrt{\left(\sqrt{x+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}\right)^2}=n^2$$

Корень опускается без модуля в виду того, что в ОДЗ $\sqrt{x+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}>0$. Поэтому

$$x+\sqrt{x+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}=n^2$$

Опять выделяем полный квадрат

$$\left(\sqrt{x+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}\right)^2=n^2$$

Так как $n>0$ и в ОДЗ $\sqrt{x+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}>0$, то

$$\sqrt{x+\frac{1}{4}}=n-\frac{1}{2}$$

К тому же мы знаем, что $n>1$, поэтому возведение в квадрат будет равносильным преобразованием

$$x+\frac{1}{4}=n^2-n+\frac{1}{4}\Longrightarrow x=n^2-n \quad \blacksquare$$

Ответы:

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Ответ	992	1056	930	870	1122	1190	1560	2450	3540	1980	9900

5. **(8 баллов)** Через стороны правильного $2n$-угольника проведены прямые. На сколько частей эти прямые делят плоскость?

Решение: Сделаем два замечания: 1) никакие три прямые не проходят через одну точку; 2) прямые будут параллельными тогда и только тогда, когда они содержать противоположные стороны правильного $2n$-угольника.

Лемма: Пусть на плоскости проведено несколько прямых, причем никакие три из них не пересекаются в одной точке. Проведем еще одну прямую, которая пересечет m уже проведенных прямых в m различных точках, тогда количество частей, на которые делится плоскость этими прямыми увеличится на $m+1$.

$\triangleright$ Обозначим на нашей прямой новые точки пересечения $L_1, L_2, \ldots, L_m$ (нумерация совпадает с расположением точек на прямой). Рассмотри все части плоскости, которые образовывались до проведения новой прямой. Если часть содержит интервал $(-\infty L_1)$, $(L_1 L_2), \ldots,$ $(L_{m-1} L_m)$, $(L_m \infty)$, то она поделится на две, иначе она останется не тронутой. Следовательно, так как интервалов у нас $m+1$, то и частей станет на $m+1$ больше. $\square$

Вернемся к решению нашей задачи. Будем проводить прямые последовательно через стороны правильного $2n$-угольника. Первая сторона образует 2 части; вторая будет пересекать только первую, поэтому добавит еще 2 части; и т. д. каждая следующая будет добавлять на одну больше, чем предыдущая. Будем продолжать такую операцию вплоть до n прямой. Начиная с $n+1$ прямой у нас будут образовываться параллельные прямые: $n+1$ прямая пересечет n предыдущих; $n+2$ – пересечет $n+1$ предыдущих; и т. д. каждая следующая на одну больше, чем предыдущая. В итоге получаем такой ответ

$$2+2+3+\ldots+n+n+(n+1)+\ldots+(2n-1)=$$
$$=1+n+\frac{2n(2n-1)}{2}=2n^2+1 \quad \blacksquare$$

Ответы:

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Ответ	1251	2451	1801	801	4051	5001	2179	3873	3043	969	1059

6. **(8 баллов)** В университете Иннополис обучается $2n$ ($n > 1$) студентов. Оказалось, что любых $2n-2$ из них можно разбить на $n-1$ пару знакомых. Какое наименьшее число пар знакомых может быть среди всех студентов.

Решение: Пусть существует студент (назовем его Бобом), у которого не больше двух знакомых. Тогда рассмотрим группу из Боба и еще $2n-3$ студентов, не знакомых с Бобом. Мы нашли группу, которая противоречит условию задачи (никто не может образовывать пару с Бобом). Значит мы доказали, что у каждого студента хотя бы 3 знакомых. Тогда пар знакомств хотя бы $\frac{3 \cdot 2n}{2} = 3n$.

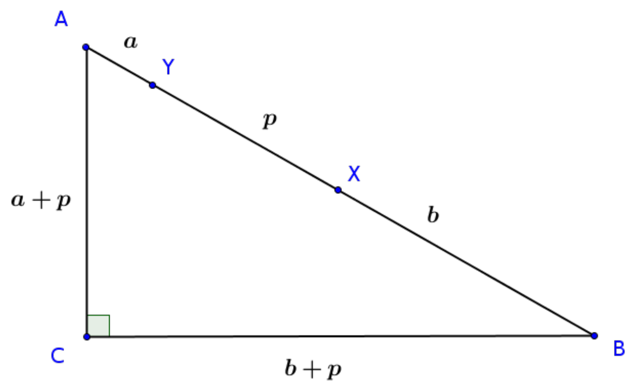
Приведем пример, когда будет ровно $3n$ знакомств. Посадим всех студентов за круглый стол и скажем, что каждый студент знаком со своими непосредственными соседями и студентом, сидящим диаметрально противоположно. Рассмотрим произвольную группу из $2n-2$ студентов. Если мы выбросим двух студентов, стоящих напротив, то оставшихся можно разбить на $n-1$ пару стоящих напротив. Пусть мы выбросим двоих, не стоящих напротив. Если на каждой из двух образованных ими дуг стоит по четному числу студентов, разобьем их на пары соседей. Если же на каждой – по нечетному числу студентов, на меньшей дуге разобьем на пары всех, кроме одного из крайних, а крайнему в пару дадим противоположного. После этого, как несложно проверить, большая дуга распадется на две из четного числа студентов, и мы сможем разбить каждую из них на пары соседей. ■

Ответы:

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Ответ	153	303	228	183	213	243	273	198	258	288	318

7. **(10 баллов)** На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC взяты точки X и Y таким образом, что $AX = AC$ и $BY = BC$. Оказалось, что $XY = p$. Найдите произведение $AY \cdot BX$.

Решение:



По неравенству треугольника $AC + CB > AB$, поэтому расположение точек X и Y на гипотенузе будет именно таким (см. рисунок).
Обозначим $AY = a$ и $BX = b$, тогда $AC = a + p$ и $BC = b + p$. Воспользуемся теоремой Пифагора

$$AC^2 + BC^2 = AC^2 \Longrightarrow (a+p)^2 + (b+p)^2 = (a+b+p)^2$$

Раскрываем скобки и приводим подобные члены

$$2ab = p^2 \Longrightarrow ab = \frac{p^2}{2} \quad \blacksquare$$

Ответы:

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Ответ	4.5	12.5	6.125	10.125	15.125	24.5	21.125	28.125	40.5	45.125	40.5

8. **(10 баллов)** Найдите коэффициент при x^m у многочлена

$$P(x) = (1+x)\cdot(2+x^2)\cdot(4+x^4)\cdot(8+x^8)\cdot\ldots\cdot(1024+x^{1024})$$

Решение: Заметим, что во всех скобках переменные x входят в степенях 2^k, где $k \in \{0, 1, \ldots, 10\}$. Следовательно, чтобы образовалось слагаемое x^m нужно во всех скобках взять x^{2^k}, где k – ненулевой бит в двоичном разложении m, и число 2^k, если k – нулевой бит.

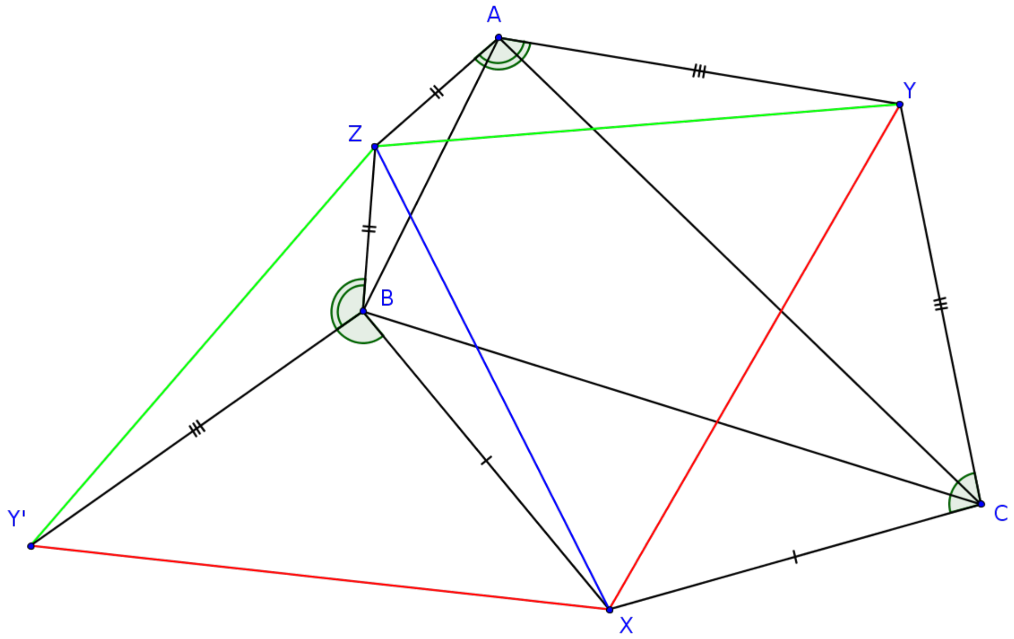
В итоге для того, чтобы найти коэффициент при x^m нужно найти двоичное одиннацатиразрядное разложение числа m (возможно с ведущими нулями). Если $b_1, b_2, \ldots, b_l$ – все нулевые биты этого двоичного разложения, то ответом будет являться число $2^{b_1+b_2+\ldots+b_l}$. ■

Ответы:

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Ответ	2048	32768	65536	32768	4096	2048	512	32768	8192	40965	945

9. **(20 баллов)** На сторонах треугольника построены во внешнюю сторону равнобедренные треугольники с углами при вершине α, β и γ, где $\alpha+\beta+\gamma=360°$. Найдите углы треугольника, образованного вершинами этих равнобедренных треугольников.

Решение:



Так как сумма внутренних углов шестиугольника равна 720°, то

$$\angle ZAY + \angle YCX + \angle XBZ = 720° - (\angle AYC + \angle CXB + \angle BZA) =$$
$$= 720° - (\alpha+\beta+\gamma) = 720° - 360° = 360°$$

Совершим поворот вокруг точки X на $\angle CXB$ против часовой стрелки. Точка C перейдет в точку B, а точка Y – в точку Y'. Следовательно, $\triangle XCY$ будет равен $\triangle XBY'$. Откуда получаем, что $XY = XY'$ и $\angle XY'B = \angle XYC$.

Посмотрим на $\triangle ZBY'$:

$$\angle ZBY' = 360° - \angle Y'BX - \angle XBZ = 360° - \angle YCX - \angle XBZ = \angle ZAY$$

Получаем, что $\triangle ZBY' = \triangle ZAY$ по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, $ZY' = ZY$ и $\angle BY'Z = \angle AYZ$. Осталось заметить, что $\triangle Y'ZX = \triangle YZX$ по трем сторонам, поэтому $\angle ZY'X = \angle ZYX$.

В итоге мы получили

$$\angle AYC = \angle AYZ + \angle ZYX + \angle XYC = \angle BY'Z + \angle ZYX + \angle XY'B =$$
$$= \angle ZY'X + \angle ZYX = 2\angle ZYX$$

Следовательно, $\angle ZYX = \dfrac{1}{2}\angle AYC = \dfrac{\alpha}{2}$. Аналогично доказыватся, что $\angle YXZ = \dfrac{\beta}{2}$ и $\angle XZY = \dfrac{\gamma}{2}$. ■

Ответы:

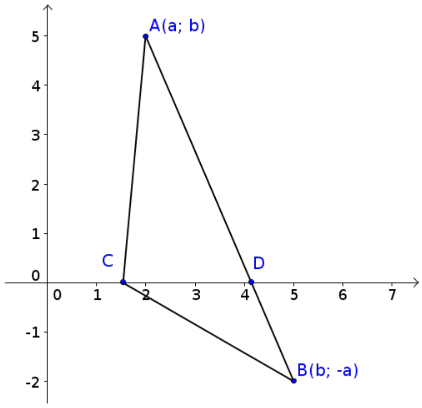
Вариант	1	2	3	4	5
Ответ	50°, 60°, 70°	50°, 55°, 75°	55°, 60°, 65°	40°, 65°, 75°	45°, 65°, 70°

6	7	8	9	10	11
40°, 60°, 80°	45°, 50°, 75°	45°, 50°, 85°	50°, 50°, 80°	40°, 70°, 70°	30°, 75°, 75°

10. (20 баллов) Найдите наименьшее значение функции

$$f(x) = \sqrt{(x-a)^2 + b^2} + \sqrt{(x-b)^2 + a^2} \qquad a, b > 0$$

Решение:



Будем решать геометрическим методом. Рассмотрим три точки $A(a, b)$, $B(b, -a)$ и $C(x, 0)$. Тогда расстояние от точки C до точки A равно $\sqrt{(x-a)^2 + b^2}$, а расстояние от точки C до точки B равно $\sqrt{(x-b)^2 + a^2}$. Следовательно, наша функция есть не что иное, как

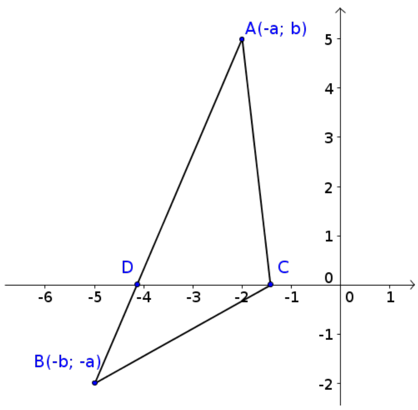
$$f(x) = \sqrt{(x-a)^2 + b^2} + \sqrt{(x-b)^2 + a^2} = CA + CB$$

сумма расстояний от переменной точки C до точек A и B. Но по неравенству треугольника $CA + CB \geqslant AB$, причем равенство, когда точка C совпадает с точкой D. Получаем, что минимальное значение функции $f(x)$ совпадает с расстоянием между точками A и B, то есть равно $\sqrt{(a-b)^2 + (b+a)^2} = \sqrt{2a^2 + 2b^2}$. ■

(20 баллов) Найдите наименьшее значение функции

$$f(x) = \sqrt{(x+a)^2 + b^2} + \sqrt{(x+b)^2 + a^2} \qquad a, b > 0$$

Решение:



Будем решать геометрическим методом. Рассмотрим три точки $A(-a, b)$, $B(-b, -a)$ и $C(x, 0)$. Тогда расстояние от точки C до точки A равно $\sqrt{(x+a)^2 + b^2}$, а расстояние от точки C до точки B равно $\sqrt{(x+b)^2 + a^2}$. Следовательно, наша функция есть не что иное, как

$$f(x) = \sqrt{(x+a)^2 + b^2} + \sqrt{(x+b)^2 + a^2} = CA + CB$$

сумма расстояний от переменной точки C до точек A и B. Но по неравенству треугольника $CA + CB \geqslant AB$, причем равенство, когда точка C совпадает с точкой D. Получаем, что минимальное значение функции $f(x)$ совпадает с расстоянием между точками A и B, то есть равно $\sqrt{(a-b)^2 + (b+a)^2} = \sqrt{2a^2 + 2b^2}$. ■

Ответы:

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Ответ	26	26	26	26	26	26	26	26	26	26	10