Условия и решения задач

9 класс

1. В однокруговом турнире по настольному теннису участвовало $2n$ парней и n девушек. К концу турнира оказалось, что число матчей, выигранных девушками, в $\frac{5}{4}$ раз больше чем число матчей, выигранных парнями (ничьих быть не могло). Докажите, что число участников турнира делится на 9.

(*М. Попов*)

Решение: Всего участвовало $3n$ человек, поэтому достаточно доказать, что $n \vdots 3$. Парни между собой сыграли $\dfrac{2n(2n-1)}{2}$ матчей, девушки между собой — $\dfrac{n(n-1)}{2}$, а матчей парень-девушка было ровно $2n^2$. Пусть m – число матчей парень-девушка, в которых выиграл парень. Следовательно, число матчей парень-девушка, в которых выиграла девушка будет $2n^2 - m$.

В итоге получаем такое соотношение

$$\frac{\frac{n(n-1)}{2} + 2n^2 - m}{\frac{2n(2n-1)}{2} + m} = \frac{5}{4} \Longrightarrow \frac{5n^2 - n - 2m}{4n^2 - 2n + 2m} = \frac{5}{4},$$

из которого следует, что

$$20n^2 - 4n - 8m = 20n^2 - 10n + 10m \Longrightarrow n = 3m.$$

Получаем $n \vdots 3$, что и требовалось доказать. ■

2. Можно ли в слове ИННОПОЛИС заменить буквы цифрами (одинаковые – одинаковыми, разные – разными) так, чтобы полученное число делилось на 1010? (*М. Попов*)

Ответ: Нельзя.

Решение: Очевидно, что буква С $= 0$, так как число 1010 делится на 10. Заменим последнюю букву на ноль и поделим на 10. Оставшееся число ИННОПОЛИ делится на 101, поэтому знакопеременная сумма двухзначных граней делится на 101. Следовательно,

$$\text{ЛИ} - \text{ПО} + \text{НО} - \text{ИН} \vdots 101.$$

Так как все эти числа не превосходят 99, то модуль этой знакопеременной суммы не превосходит 200, а следовательно, он может быть равен только 0 или 101.

Теперь посмотрим на это выражение по модулю 10

$$|\text{ЛИ} - \text{ПО} + \text{НО} - \text{ИН}| = |10(\text{Л} - \text{П}) + 9(\text{Н} - \text{И})| \equiv$$
$$\equiv |9(\text{Н} - \text{И})| \equiv |\text{Н} - \text{И}| \pmod{10}.$$

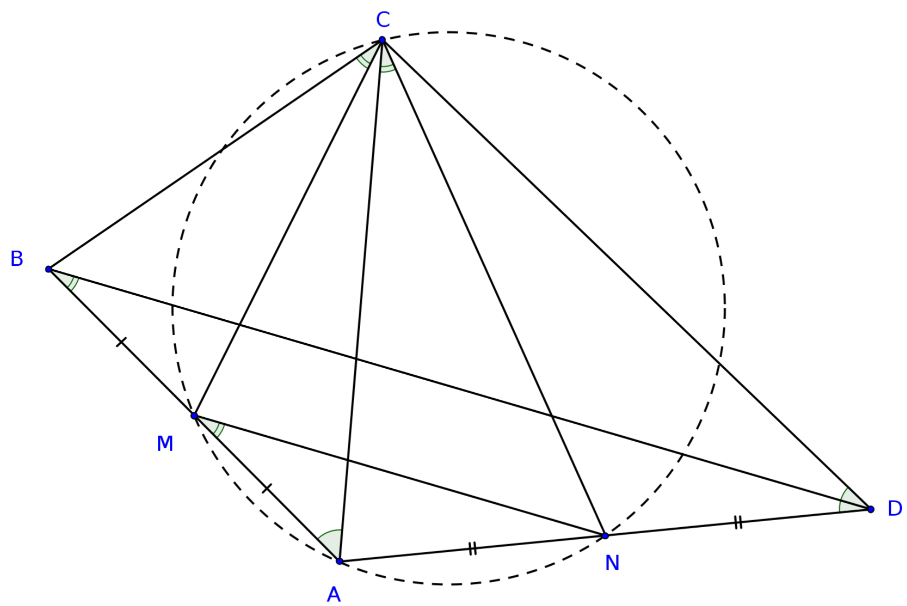
Так как разные буквы соответствуют разным цифрам, то исходный модуль не может быть равен 0. Если же он равен 101, то $|\text{Н} - \text{И}| \equiv 1 \pmod{10}$ или $|\text{Н} - \text{И}| = 1$. Но тогда

$$101 = |\text{ЛИ} - \text{ПО} + \text{НО} - \text{ИН}| \leqslant 10|\text{Л} - \text{П}| + 9|\text{Н} - \text{И}| =$$
$$= 10|\text{Л} - \text{П}| + 9 \leqslant 99.$$

Противоречие. Значит решений нет. ■

3. Точка M – середина стороны AB выпуклого четырехугольника $ABCD$. Оказалось, что $\angle BCA = \angle ACD$ и $\angle CDA = \angle BAC$. Докажите, что $\angle BCM = \angle ABD$. (*Фольклор*)

Решение:



Пусть N – середина стороны AD. Так как $\angle BCA = \angle ACD$ и $\angle BAC = \angle ADC$, то треугольники BAC и ADC подобны по двум углам. Следовательно, соответсвующие медианы в подобных треугольниках разбивают соответсвующие углы на равны части. Поэтому $\angle BCM = \angle ACN$ и $\angle ACM = \angle DCN$. Аналогично, $\angle ANC = \angle BMC$, поэтому четырехугольник

$MANC$ вписанный. Но тогда $\angle AMN = \angle ACN$. Так как MN – средняя линия треугольника ABD, то получаем

$$\angle ABD = \angle AMN = \angle ACN = \angle BCM.$$

Что и требовалось доказать. ■

4. Тройки натуральных чисел (a_i, b_i, c_i), где $i = 1, 2, \ldots, n$ удовлетворяют следующим условиям:

1) $a_i + b_i + c_i = 2017$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$;

2) если $i \neq j$, то $a_i \neq a_j$, $b_i \neq b_j$ и $c_i \neq c_j$.

Чему равно максимально возможное значение n? (*М. Попов*)

Ответ: 1343.

Решение: Заметим, что

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \geqslant \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Аналогичное неравенство записываем для сумм b_i и c_i. Складывая три полученных неравенства, получаем

$$3 \cdot \frac{n(n+1)}{2} \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i + \sum_{i=1}^{n} c_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i + c_i) = 2017n.$$

Следовательно, мы получаем оценку сверху

$$\frac{3(n+1)}{2} \leqslant 2017 \Longrightarrow n \leqslant 1343.$$

Теперь приведем пример, на котором достигается эта оценка ($n = 1343$)

a_i	b_i	c_i
1	672	1344
2	673	1342
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
672	1343	2
673	1	1343
674	2	1341
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
1343	671	3

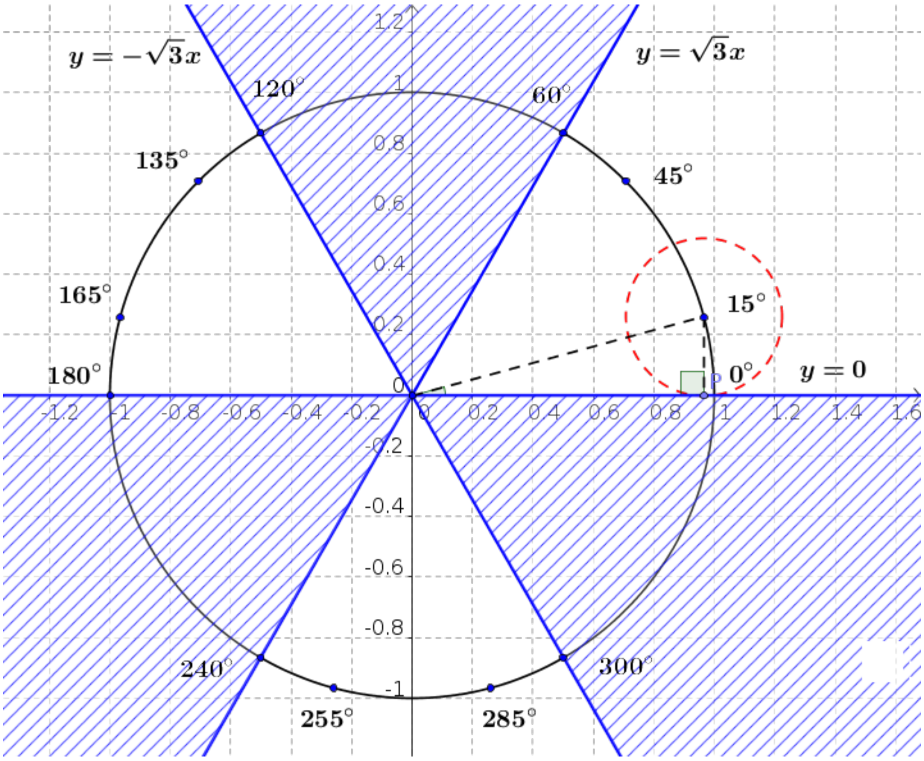
5. Найдите все значения угла α из промежутка $[0°; 360°]$ такие, что система

$$\begin{cases} y^3 \geqslant 3x^2 y, \\ (x-\cos\alpha)^2 + (y-\sin\alpha)^2 = \dfrac{2-\sqrt{3}}{4} \end{cases}$$

имеет единственное решение. (*Р. Алишев*)

Ответ: $\alpha \in \{15°, 45°, 135°, 165°, 255°, 285°\}$

Решение:



Заметим, что $\sin^2 15° = \dfrac{1-\cos 30°}{2} = \dfrac{2-\sqrt{3}}{4}$. Перепишем нашу систему

$$\begin{cases} y(y-\sqrt{3}x)(y+\sqrt{3}x) \geqslant 0, \\ (x-\cos\alpha)^2 + (y-\sin\alpha)^2 = \sin^2 15°. \end{cases}$$

Заштрихованная область удовлетворяет первому неравенству. Следовательно, если рассмотреть произвольную точку $(\cos\alpha;\ \sin\alpha)$ и провести окружность с центром в этой точке радиуса $\sin 15°$, то она должна иметь ровно одну общую точку с заштрихованной областью ($(x-\cos\alpha)^2 + (y-\sin\alpha)^2$ – расстояние от точки (x, y) до точки $(\cos\alpha;\ \sin\alpha)$).

Как видно из графика такое возможно тогда и только тогда, когда окружность касается одной из прямых $y = 0$, $y = \sqrt{3}x$ или $y = -\sqrt{3}x$ и полностью лежит вне штрихованной части. Так как радиус всех рассматриваемых окружностей равен $\sin 15°$, то касание будет происходить только для $\alpha \in \{15°, 45°, 135°, 165°, 255°, 285°\}$. ■