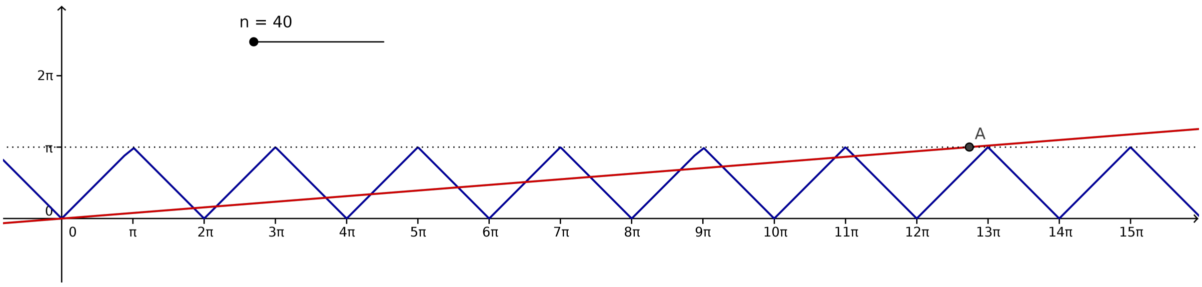
ОТКРЫТАЯ ОЛИМПИАДА УНИВЕРСИТЕТА ИННОПОЛИС

II отборочный (заочный) этап по математике, 17 декабря 2016г.

11 класс, полные решения.

1. **(5 баллов)** Сколько корней имеет уравнение
$$\arccos(\cos x) = \frac{\pi x}{n}?$$

Решение: Функция $y = \arccos(\cos x)$ принимает значения в промежутке $[0;\pi]$, причем максимум достигается в точках $\pi + 2\pi k$. А функция $y = \frac{\pi x}{n}$ равномерно возрастает, значения $[0;\pi]$ принимает на промежутке $[0;n]$.



Когда $\pi + 2\pi k < n < \pi + 2\pi(k+1)$ графики имеют $2(k+1)$ общих точек. ■

Ответы:

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ответ	642	642	636	646	644	648	652	652	642	650

2. **(5 баллов)** Известно, что

$$\text{НОК}(a; b) = m.$$

Какое наименьшее значение может принимать больший из двух чисел a и b?

Решение: Очевидно если числа a и b не взаимно просты, то можно поделить большее из них на их общий делитель. Поэтому в примере, на котором достигается наилучший результат $\text{НОД}(a; b) = 1$. И, следовательно, $\text{НОК}(a; b) = ab = m$. Осталось найти каноническую запись числа m и перебрать возможные варианты чисел a и b (их не так уж и много). ■

Ответы:

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ответ	196	56	108	135	504	324	392	180	160	80

3. **(7 баллов)** Вещественные числа $x, y \geqslant 1$ удовлетворяют уравнению

$$\log_2(x^c) \cdot \log_2(y^a) = \log_2(x^{ad} \cdot y^{bc}) - bd$$

Найдите наименьшее возможное значение $\log_2(x \cdot y)$. Числа $b \geqslant a > 0$ и $d \geqslant c > 0$.

Решение: Уравнение можно переписать следующим образом

$$c \log_2 x \cdot a \log_2 y = ad \log_2 x + bc \log_2 y - bd$$

Перенесем все влево и разложим на множители

$$(a \log_2 x - b) \cdot (c \log_2 y - d) = 0$$

Получаем два решения:

1) $x = 2^{\frac{b}{a}}$ и $y \geqslant 1$. Следовательно, минимальное значение

$$\log_2(x \cdot y) = \log_2 x + \log_2 y = \log_2(2^{\frac{b}{a}}) + \log_2 1 = \frac{b}{a}$$

2) $x \geqslant 1$ и $y = 2^{\frac{d}{c}}$. Следовательно, минимальное значение

$$\log_2(x \cdot y) = \log_2 x + \log_2 y = \log_2 1 + \log_2(2^{\frac{d}{c}}) = \frac{d}{c}$$

Осталось сравнить эти две дроби и взять меньшую из них. $\blacksquare$

Ответы:

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ответ	2.25	1.50	2.25	1.8	1.75	1.8	1.4	1.6	1.2	1.2

4. **(7 баллов)** Найдите число равнобедренных треугольников, образованных сторонами и диагоналями правильного $6k$ – угольника?

Решение: Зафиксируем одну вершину и посмотрим сколько существует равнобедренных треугольников, у которых боковые стороны примыкают к этой вершине. Всего таких треугольников будет $3k-1$. Просуммируем по всем возможным фиксированным вершинам и получим $6k\cdot(3k-1)$. В полученной сумме все равносторонние треугольники были посчитаны 3 раза. Всего равносторонних треугольников $2k$. Следовательно, равнобедренных треугольников

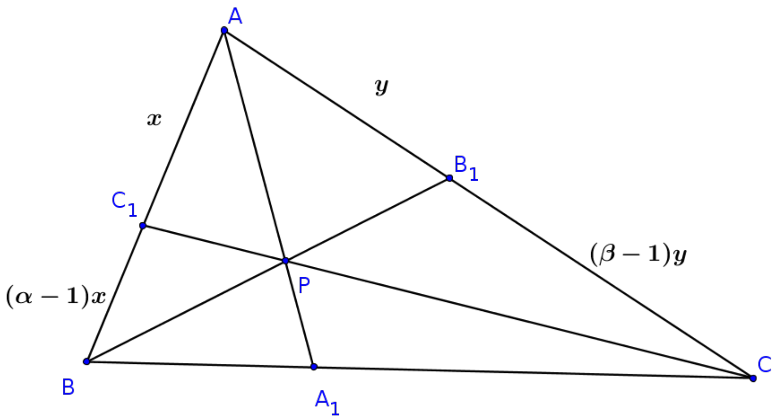
$$6k\cdot(3k-1)-2\cdot 2k=18k^2-10k \quad \blacksquare$$

Ответы:

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ответ	53900	64200	75400	87500	11000	15900	21700	28400	36000	44500

5. **(8 баллов)** На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC отмечены точки C_1, A_1 и B_1 соответственно. Отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в точке P. Найдите отношение $AP : PA_1$, если $AB : AC_1 = \alpha > 1$ и $AC : AB_1 = \beta > 1$.

Решение (теоремы Чевы и Менелая):



Так как $AB : AC_1 = \alpha$ и $AC : AB_1 = \beta$, то $\dfrac{AC_1}{C_1B} = \dfrac{1}{\alpha-1}$ и $\dfrac{AB_1}{B_1C} = \dfrac{1}{\beta-1}$.
Запишем теорему Чевы для треугольника ABC и чевиан AA_1, BB_1 и CC_1:

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$$

Следовательно,

$$\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = \frac{\alpha-1}{\beta-1}$$

Осталось воспользоваться теоремой Менелая для AA_1C и прямой BB_1:

$$\frac{BA_1}{BC} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} \cdot \frac{AP}{PA_1} = 1$$

или

$$\frac{AP}{PA_1} = \frac{BC}{BA_1} \cdot \frac{AB_1}{B_1C} = \left(1 + \frac{\beta-1}{\alpha-1}\right) \cdot \frac{1}{\beta-1} = \frac{1}{\alpha-1} + \frac{1}{\beta-1} \quad \blacksquare$$

Решение (теорема Ван-Обеля): Применим теорему Ван-Обеля:

$$\frac{AP}{PA_1} = \frac{AC_1}{C_1B} + \frac{AB_1}{B_1C} = \frac{1}{\alpha-1} + \frac{1}{\beta-1} \quad \blacksquare$$

Ответы:

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ответ	0.8	0.5	0.9	0.7	0.3	0.4	0.6	0.5	0.6	0.4

6. **(8 баллов)** Решите уравнение

$$\sqrt{a^2+c-1-2x-x^2}+\sqrt{b^2+c-1-2x-x^2}=\sqrt{x^2+2x+1-c+(a+b)^2}$$

В ответ напишите сумму квадратов всевозможных попарных разностей действительных корней уравнения. Числа $a, b, c > 0$.

Решение: Преобразуем наше уравнение и сделаем замену $t = x + 1$:

$$\sqrt{a^2+c-t^2}+\sqrt{b^2+c-t^2}=\sqrt{t^2-c+(a+b)^2}$$

Заметим, что если t – корень уравнения, то и $(-t)$ – корень. Поэтому достаточно найти все неотрицательные корни. Далее будем считать, что $t \geqslant 0$.
С ростом t функции $\sqrt{a^2+c-t^2}$ и $\sqrt{b^2+c-t^2}$ убывают, а $\sqrt{t^2-c+(a+b)^2}$ – возрастает. Следовательно, существует не более одного решения данного уравнения.
Заметим, что $t = \sqrt{c}$ – решение уравнения. Следовательно, исходное уравнение имеет ровно 2 корня: $x_{1,2} = \pm\sqrt{c} - 1$. Найдем ответ на задачу

$$(x_1 - x_2)^2 = ((\sqrt{c}-1)-(-\sqrt{c}-1))^2 = 4c \quad \blacksquare$$

Ответы:

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ответ	52	72	76	80	84	56	44	92	60	68

7. **(10 баллов)** Заочный этап олимпиады Университета Иннополис проводился среди учащихся 9, 10 и 11 классов, и среди них на очный этап прошли соответственно $a\%$, $b\%$ и $c\%$. Причем среди учащихся 9 и 10 классов вместе на очный этап прошли $k\%$, а среди 10 и 11 вместе — $l\%$. Определите процент прошедших на очный этап по всем трем классам вместе $(a < k < b < l < c)$.

Решение: Пусть x – количество учащихся 9 классов, y – учащихся 10 классов и z – учащихся 11 классов. Тогда

$$k = \frac{ax + by}{x + y} \Longrightarrow \frac{y}{x} = \frac{k - a}{b - k} \quad \text{и} \quad l = \frac{by + cz}{y + z} \Longrightarrow \frac{z}{y} = \frac{l - b}{c - l}$$

Выразим x и z через y

$$x = y \cdot \frac{b - k}{k - a} \quad \text{и} \quad z = y \cdot \frac{l - b}{c - l}$$

Процент прошедших на очный этап по всем трем классам вместе равен

$$n = \frac{ax + by + cz}{x + y + z} = \frac{ay \cdot \frac{b-k}{k-a} + by + cy \cdot \frac{l-b}{c-l}}{y \cdot \frac{b-k}{k-a} + y + y \cdot \frac{l-b}{c-l}} =$$

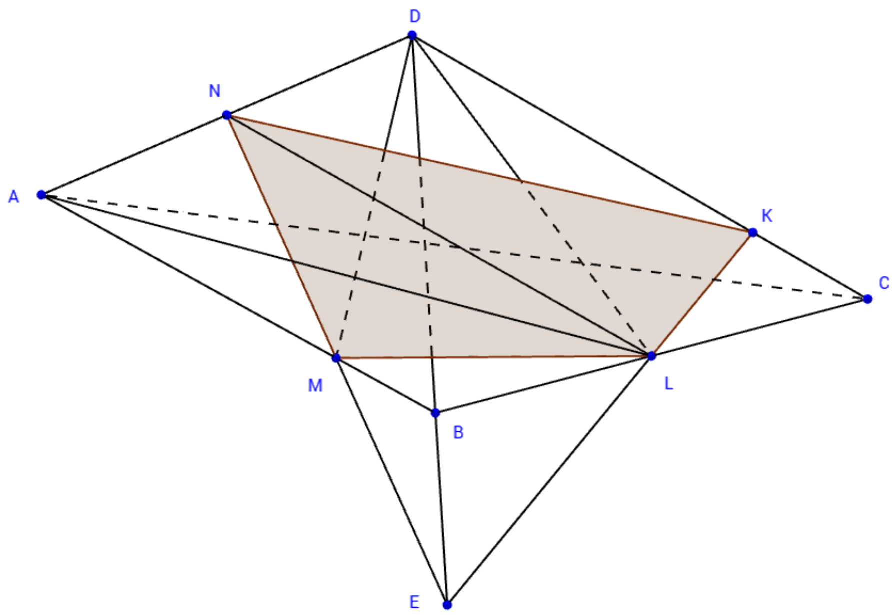
$$= \frac{a(b-k)(c-l) + b(k-a)(c-l) + c(l-b)(k-a)}{(b-k)(c-l) + (k-a)(c-l) + (l-b)(k-a)} \quad \blacksquare$$

Ответы:

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ответ	18	28	36	10	24	14.5	34	23.74	15.4	33

8. **(10 баллов)** Объем тетраэдра $ABCD$ равен $4(m+n)$. Точка M делит ребро AB в отношении $m:n$. Через точку M и середины ребер BC и AD проведено сечение. Найдите площадь этого сечения, если расстояние от точки D до него равно h.

Решение:



Пусть N и L – середины сторон AD и BC соответственно. K – точка пересечения ребра DC с плоскостью сечения. Плоскость сечения пересекается с плоскостями ABD и CBD в точке E. Запишем два раза теорему Менелая

$$\frac{EB}{ED}\cdot\frac{DN}{NA}\cdot\frac{AM}{MB}=1 \quad \text{и} \quad \frac{EB}{ED}\cdot\frac{DK}{KC}\cdot\frac{CL}{LB}=1$$

Откуда получаем

$$\frac{DK}{KC}=\frac{ED}{EB}=\frac{AM}{MB}=\frac{m}{n}$$

Следовательно, точка K делит сторону DC точно в таком же соотношение, как точка M делит сторону AB.

Заметим,

$$\frac{V_{DALB}}{V_{DALC}}=\frac{S_{ALB}}{S_{ALC}}=\frac{LB}{LC}=1;\quad \frac{V_{LDMA}}{V_{LDMB}}=\frac{S_{DMA}}{S_{DMB}}=\frac{MA}{MB}=\frac{m}{n};\quad \frac{V_{LMDN}}{V_{LMAN}}=\frac{S_{MDN}}{S_{MAN}}=\frac{DN}{AN}=1.$$

Из этих соотношений находим, что

$$V_{LMDN}=\frac{1}{2}\cdot V_{LDMA}=\frac{m}{2(m+n)}\cdot V_{DALB}=\frac{m}{4(m+n)}\cdot V_{DABC}=m$$

Аналогично, используя отношение в котором точка K делит сторону DC, можно доказать, что $V_{LKDN}=m$. Поэтому

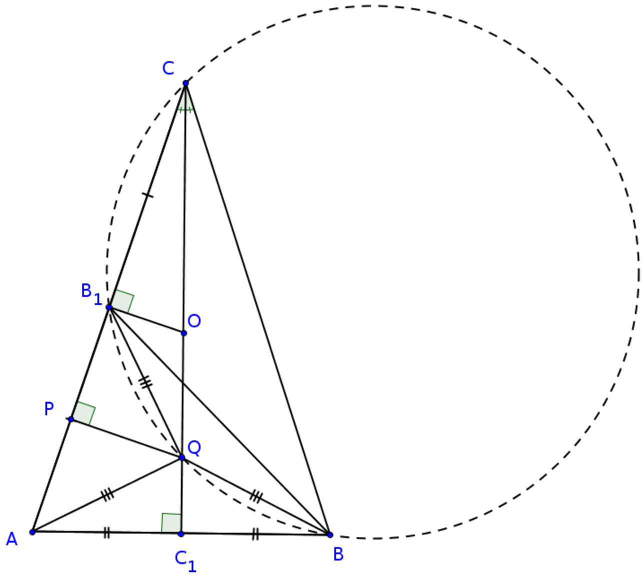
$$2m=V_{LMDN}+V_{LKDN}=V_{DKLMN}=\frac{1}{3}\cdot h\cdot S_{KLMN}\Longrightarrow S_{KLMN}=\frac{6m}{h}\quad\blacksquare$$

Ответы:

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ответ	1.2	2.4	9	18	3.6	3.6	4.5	9	18	3.6

9. **(20 баллов)** В остроугольном равнобедренном треугольнике ABC ($BC = CA$) провели две медианы BB_1 и CC_1. Окружность описанная вокруг треугольника BB_1C пересекает медиану CC_1 в точках C и Q. Найдите радиус описанной окружности треугольника ABC, если $CQ = m$.

Решение:



Так как треугольник ABC – равнобедренный, то CC_1 - высота, медиана и биссектриса. Тогда точка Q – середина дуги BB_1, не содержащей точку C. Следовательно, $B_1Q = QB$. А так как C_1C – серединный перпендикуляр к отрезку AB, то $AQ = QB$. Опустим перпендикуляр QP на сторону AC. Так как треугольник AQB_1 – равнобедренный, то

$$AP = PB_1 \Longrightarrow \frac{CB_1}{CP} = \frac{2}{3}$$

Если O – центр описанной окружности треугольника ABC, то он лежит на CC_1 и $OB_1 \perp AC$. Следовательно, $OB_1 \parallel QP$, но тогда по теореме о пропорциональных отрезках

$$R = CO = CQ \cdot \frac{CB_1}{CP} = \frac{2m}{3} \quad \blacksquare$$

Ответы:

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ответ	6	8	4	10	18	2	14	16	18	20

10. **(20 баллов)** Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} |2x+y-b| + \sqrt{5(x-2)^2+5(y-a)^2} = a+4-b, \\ (x-2)^2+(y-c)^2 = r^2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение:

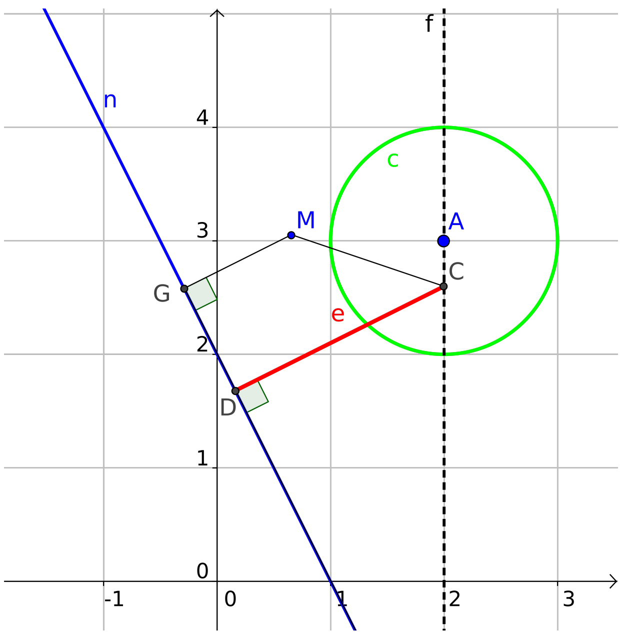
Преобразуем первое уравнение:

$$\frac{|2x+y-b|}{\sqrt{5}} + \sqrt{(x-2)^2+(y-a)^2} = \frac{2\cdot 2+a-b}{\sqrt{5}}.$$

$\dfrac{|2x+y-b|}{\sqrt{5}}$ определяет расстояние от точки $M(x;y)$ до прямой $n:\ 2x+y-b=0$, $\sqrt{(x-2)^2+(y-a)^2}$ расстояние от M до точки $C(2;a)$ и $\dfrac{2\cdot 2+a-b}{\sqrt{5}}$ — расстояние от C до прямой n (случай когда точка C находится выше прямой n). На рисунке это выглядит как

$$MG+MC=CD.$$

Это равенство выполняется тогда и только тогда, когда точка M принадлежит отрезку CD, т.е. решением первого уравнения является отрезок CD.



Второе уравнение определяет окружность с центром в точке $A(2;c)$ и радиусом r. Во всех вариантах окружность не пересекает прямую. При изменении параметра a точка C движется по прямой $x=2$, при $c-r<a<c+r$ она находится внутри круга и отрезок CD пересекает окружность. Концы промежутка проверяем непосредственно: $a=c-r$ подходит, $a=c+r$ — нет. При $a=c+\dfrac{\sqrt{5}}{2}r$ отрезок CD касается окружности сверху. Отсюда и ответ. ■

Ответы:

Вариант	1	2	3	4
Ответ	$[3;5)\cup\left\{4+\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right\}$	$[2;6)\cup\{4+\sqrt{5}\}$	$[4;6)\cup\left\{5+\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right\}$	$[3;7)\cup\{5+\sqrt{5}\}$

Вариант	5	6	7	8
Ответ	$[3;7)\cup\{5+\sqrt{5}\}$	$[2;8)\cup\left\{5+\dfrac{3\sqrt{5}}{2}\right\}$	$[3;5)\cup\left\{4+\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right\}$	$[2;4)\cup\left\{3+\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right\}$

Вариант	9	10
Ответ	$[1;5)\cup\{3+\sqrt{5}\}$	$[2;6)\cup\{4+\sqrt{5}\}$