ОТКРЫТАЯ ОЛИМПИАДА УНИВЕРСИТЕТА ИННОПОЛИС

I отборочный (заочный) этап по математике, 4 декабря 2016г.

11 класс, полные решения.

1. **(5 баллов)** Чему равно число m в фибоначчиевой системе счисления? В ответ запишите максимальное число вида $\overline{f_k f_{k-1} \ldots f_3 f_2}$, где $m = \sum\limits_{i=2}^{k} f_i \cdot F_i$, $f_i \in \{0,1\}$, $f_k = 1$ и F_i – числа Фибоначчи ($F_1 = F_2 = 1$, $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$).

Ответы:

Вариант	1	2	3	4	5	6
Ответ	1001000001	1001000101	1001010101	1010010101	1010010100	1010010010

7	8	9	10	11
1010100010	1010101010	1010101001	1010001001	10010100101

2. **(5 баллов)** Дан многочлен $P(x)$ второй степени. Причем $P(x_1) = y_1$, $P(x_2) = y_2$ и $P(x_3) = y_3$. Найдите значение $P(x_4)$.

Решение: Воспользуемся интерполяционным многочленом Лагранжа и найдем

$$P(x) = y_1\frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} + y_2\frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + y_3\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

Осталось только подставить $x = x_4$ и найти требуемое значение. ■

Ответы:

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Ответ	2.25	28	16.6	2.2	13.2	-5.275	-3.8	-61	-17	-26	35

3. **(7 баллов)** Найдите все тройки (x, y, z) попарно взаимно простых натуральных чисел, удовлетворяющих системе

$$\begin{cases}(a+b)x+ay=bz;\\(a+b)x^3+ay^3=bz^3,\end{cases}\qquad \text{где } b>a \text{ взаимно простые натуральные числа.}$$

В ответ запишите наименьшее возможное значение $x+y+z$.

Решение: Перепишем систему

$$\begin{cases}a(x+y)=b(z-x);\\a(x^3+y^3)=b(z^3-x^3);\end{cases}\quad\Longrightarrow\begin{cases}a(x+y)=b(z-x);\\a(x+y)(x^2-xy+y^2)=b(z-x)(z^2+zx+x^2).\end{cases}$$

Так как x, y, z – натуральные числа, то $a(x+y)=b(z-x)>0$. Поэтому во втором уравнении можно поделить обе части уравнения на одинаковое ненулевое число.

$$\begin{cases}a(x+y)=b(z-x);\\x^2-xy+y^2=z^2+zx+x^2;\end{cases}\quad\Longrightarrow\begin{cases}a(x+y)=b(z-x);\\(y-z)(y+z)=x(y+z);\end{cases}\quad\Longrightarrow\begin{cases}a(x+y)=b(z-x);\\y-z=x.\end{cases}$$

Заменяем в первом уравнении x на $y-z$

$$\begin{cases}a(2y-z)=b(2z-y);\\x=y-z;\end{cases}\quad\Longrightarrow\begin{cases}(2a+b)y=(a+2b)z;\\x=y-z.\end{cases}$$

Так как y и z – взаимно просты, то $y=a+2b$ и $z=2a+b$. Следовательно, $x=y-z=(a+2b)-(2a-b)=b-a$. А так как $b>a$ взаимно простые натуральные числа, то x, y, z попарно взаимно простые числа.
Осталось вычислить

$$x+y+z=(b-a)+(a+2b)+(2a+b)=2a+4b\quad\blacksquare$$

Ответы:

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Ответ	34	44	38	40	38	58	46	46	50	40	46

4. **(7 баллов)** Из множества $1, 2, \ldots, 10$ выбираются равновероятно три числа (возможно одинаковых). Какова вероятность того, что сумма этих чисел равна 10?

Решение: Нужно найти сколькими способами можно решить уравнение

$$x_1 + x_2 + x_3 = 10$$

где $x_1, x_2, x_3 \in \{1, 2, \ldots, 10\}$. Выпишем в ряд десять единиц и поставим между ними две перегородки (в разные места). Тогда x_1 это число единиц до левой перегородки, x_2 – между левой и правой, x_3 – после правой. Так как единиц всего 10, то $x_1 + x_2 + x_3 = 10$. Заметим, что мест для расположения перегородок всего 9, а нам нужно выбрать только 2. Поэтому число решений уравнения равно $C_9^2 = 36$. Тогда итоговая вероятность равна $\dfrac{36}{10^3} = 0.036$. ■

(7 баллов) Из множества $0, 1, 2, \ldots, 9$ выбираются равновероятно четыре числа (возможно одинаковых). Какова вероятность того, что сумма этих чисел равна 9?

Решение: Решается аналогично, но возникают сложности с тем, что x_i может быть равно 0. Сопоставим каждому решению $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 9$ решение $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 13$, где $y_i = x_i + 1$ и $y_1, y_2, y_3, y_4 \in \{1, 2, \ldots, 10\}$. Решений второго уравнения ровно $C_{12}^3 = 220$. Тогда итоговая вероятность равна $\dfrac{220}{10^4} = 0.022$. ■

Ответы:

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Ответ	0.036	0.036	0.036	0.036	0.036	0.036	0.036	0.036	0.036	0.036	0.022

5. **(8 баллов)** Числа $1,\ 2,\ \ldots, n$ расставили в некотором порядке в вершинах правильного n-угольника $A_1A_2\ldots A_n$. На каждой стороне n-угольника написали модуль разности чисел на концах этой стороны. Какое наибольшее значение принимает сумма всех чисел на сторонах?

Решение: Раскроем все модули, некоторые числа раскроятся со знаком плюс, а некоторые со знаком минус. В итоге получим некоторое выражение

$$S = \pm 1 \pm 1 \pm 2 \pm 2 \pm \ldots \pm n \pm n$$

причем каждое число будет использоваться два раза и число плюсов должно быть ровно таким же как и число минусов. А значит сумма будет максимальна, когда большие числа беруться со знаком плюс, а маленькие со знаком минус. Возможны два случая:

1) $n = 2k$, тогда

$$S_{max} = -1 - 1 - \ldots - k - k + (k+1) + (k+1) + \ldots + 2k + 2k =$$
$$= 2k(2k+1) - 2k(k+1) = 2k^2$$

2) $n = 2k+1$, тогда

$$S_{max} = -1 - 1 - \ldots - k - k - (k+1) + (k+1) + \ldots + (2k+1) + (2k+1) =$$
$$= (2k+1)(2k+2) - 2k(k+1) - 2(k+1) = 2k(k+1) \quad \blacksquare$$

Ответы:

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Ответ	5202	5408	5618	5832	6050	6272	6498	6728	6962	5000	5100

6. **(8 баллов)** На первый курс Университета Иннополис было принято $2n$ абитуриента, не знакомых друг с другом. Сколько пар первокурсников необходимо перезнакомить, чтобы обязательно появилась тройка попарно знакомых?

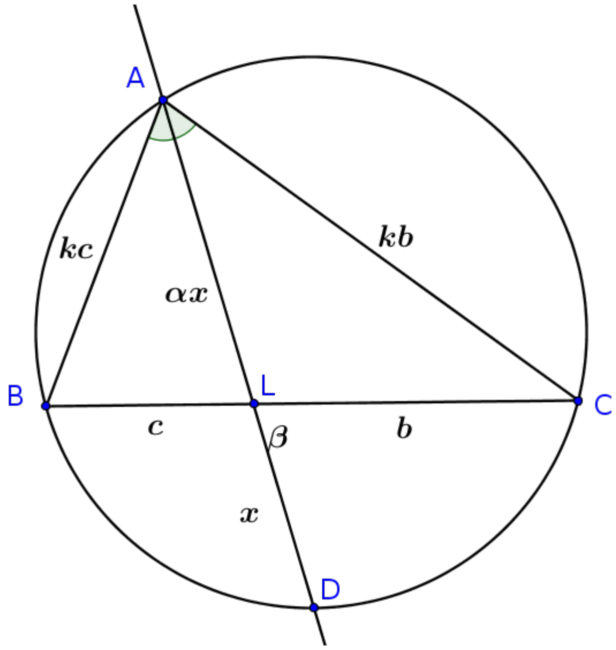
Решение: Задача решается простым применением теоремы Турана для K_3: максимальное число ребер в графе без треугольников равно n^2. Примером такого графа является полный двудольный граф $K_{n,n}$. В итоге ответом на задачу будет число $n^2 + 1$. ■

Ответы:

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Ответ	2602	2705	2810	2917	3026	3137	3250	3365	3482	2501	3601

7. **(10 баллов)** Биссектриса угла AL треугольника ABC пересекает описанную около него окружность в точке D. Оказалось, что $AL : LD = \alpha$. Найдите периметр треугольника ABC, если $BC = \beta$.

Решение:



Так как AL – биссектриса, то

$$\frac{BA}{BL} = \frac{CA}{CL} = k \quad \text{и} \quad AL^2 = BA \cdot CA - BL \cdot CL$$

Получаем

$$\alpha^2 x^2 = k^2 bc - bc = (k^2 - 1)bc$$

Заметим также, что степень точки L равна $\alpha x^2 = bc$. Тогда, получаем

$$\alpha^2 x^2 = (k^2 - 1)bc = (k^2 - 1)\alpha x^2 \Longrightarrow \alpha = k^2 - 1 \Longrightarrow k = \sqrt{\alpha + 1}$$

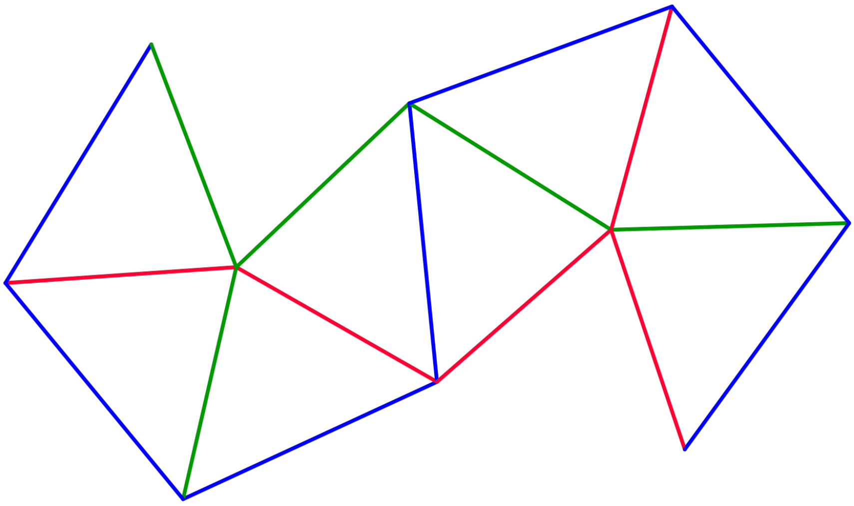
Посчитаем периметр треугольника ABC

$$P_{ABC} = kc + kb + c + b = (k+1)(c+b) = \beta(k+1) = \beta\sqrt{\alpha+1} + \beta \quad \blacksquare$$

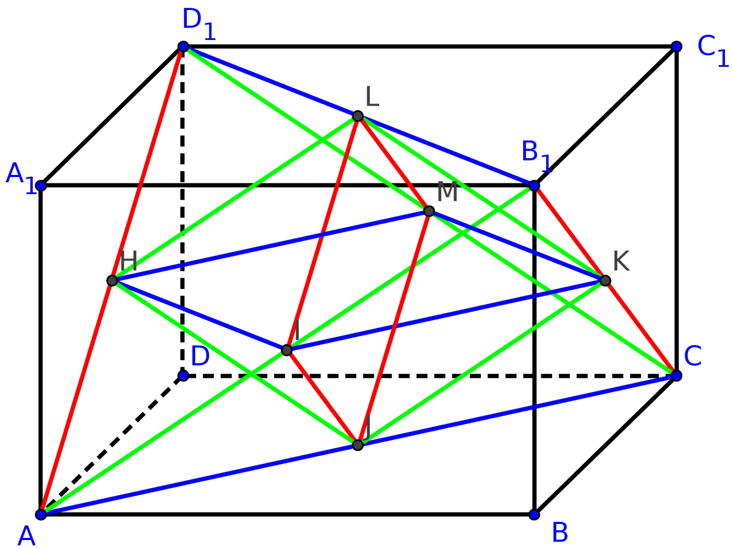
Ответы:

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Ответ	4.2	4.4	6.9	7.2	7.5	10.4	10.8	11.2	8.7	12.4	12.8

8. **(10 баллов)** На рисунке изображена развертка многогранника, все грани которого равные треугольники. Равные ребра отмечены одинаковым цветом. Найдите объем этого многогранника, если стороны каждой грани имеют длины a, b, c.



Решение: Многогранник является октаэдром. Достроим его до тетраэдра, а тетраэдр до параллелепипеда как показано на рисунке.



Противоположные ребра тетраэдра равны между собой и равны удвоенным сторонам грани октаэдра. Тогда у параллелепипеда грани являются прямоугольниками, т.е. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольный параллелепипед. Причем $V_{ABCDA_1B_1C_1D_1} = 3V_{ACB_1D_1} = 6V_0$, где V_0 — объем октаэдра. Пусть $AB = x$, $AD = y$, $AA_1 = z$. Из теоремы Пифагора получаем следующую систему:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4a^2, \\ y^2 + z^2 = 4b^2, \\ x^2 + z^2 = 4c^2; \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 = 2a^2 + 2c^2 - 2b^2, \\ y^2 = 2b^2 + 2a^2 - 2c^2, \\ z^2 = 2c^2 + 2b^2 - 2a^2. \end{cases}$$

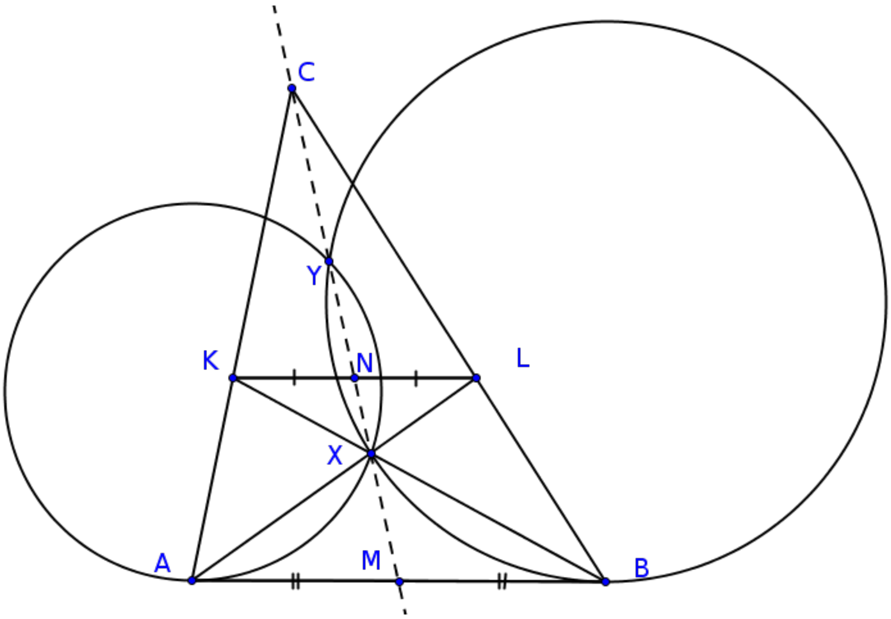
Откуда $V_0 = \dfrac{1}{6}xyz = \dfrac{1}{3}\sqrt{2(a^2+b^2-c^2)(a^2+c^2-b^2)(b^2+c^2-a^2)}$. ■

Ответы:

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Ответ	1440	672	1632	384	8	16	16	24	32	40	35328

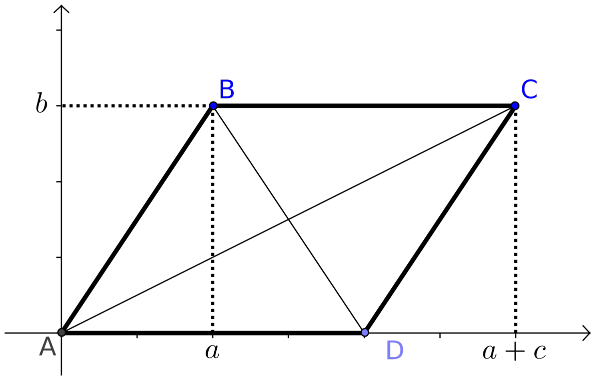
9. **(20 баллов)** В треугольнике ABC на сторонах AC и BC отмечены точки K и L таким образом, что $KL \parallel AB$. X — точка пересечения отрезков KB и AL. Окружность ω_1 проходит через точку X и касается стороны AB в точке A. Окружность ω_2 проходит через точку X и касается стороны AB в точке B. Y — вторая точка пересечения окружностей ω_1 и ω_2. Докажите, что середина отрезка AB, середина отрезка KL, точки C, X и Y лежат на одной прямой.

Решение:



Пусть M – середина отрезка AB, N – середина отрезка KL. Так как $ABLK$ – трапеция, то C, N, X и M лежат на одной прямой. Докажем, что Y тоже лежит на этой прямой. Так как MA и MB – равные касательные к окружностям ω_1 и ω_2, то точка M лежит на радикальной оси этих окружностей (то есть на прямой XY). Следовательно, точка Y лежит на прямой XM. ■

10. **(20 баллов)** Данный параллелограмм на рисунке задайте одним уравнением с двумя переменными.



Решение: Уравнение $|x| + |y| = 1$ задает квадрат с центром в начале координат и вершинами в единицах на осях. Все параллелограммы аффинно эквивалентны этому квадрату, поэтому уравнение этого параллелограмма ищем в виде

$$k|bx - (a+c)y| + |bx + (c-a)y - bc| = d.$$

Коэффициенты k и d выбираем так, чтобы вершины параллелограмма являлись решениями этого уравнения. Подходят $k = 1$ и $d = bc$. Ответ

$$|bx - (a+c)y| + |bx + (c-a)y - bc| = bc. \quad \blacksquare$$