# 11 класс

**1.** Докажите, что из любой бесконечной в обе стороны целочисленной арифметической прогрессии можно выделить бесконечную целочисленную геометрическую прогрессию.

(*Фольклор*)

**Решение:** Пусть арифметическая прогрессия имеет вид $c_k = a + bk$, где $a, b \in \mathbb{Z}$. Тогда рассмотрим геометрическую прогрессию $d_k = a(b+1)^k$ и докажем, что все ее члены принадлежат нашей арифметической прогрессии

$$d_k = a \cdot (1 + C_k^1 \cdot b + C_k^2 \cdot b^2 + \ldots + C_k^k \cdot b^k) =$$
$$= a + b \cdot (C_k^1 + C_k^2 \cdot b + \ldots + C_k^k \cdot b^{k-1}) = c_l,$$

где $l = C_k^1 + C_k^2 \cdot b + \ldots + C_k^k \cdot b^{k-1} \in \mathbb{Z}$. ■

**2.** Пусть $f(x) = x^2+6x+6$. Решите уравнение в действительных числах

$$\underbrace{f(f(\ldots f}_{2017}(x)\ldots)) = 2017.$$

(*Р. Алишев*)

**Ответ:** $x = -3 \pm \sqrt[2^{2017}]{2020}$.

**Решение:** Заметим, что $f(x) = (x+3)^2-3$ или $f(x)+3 = (x+3)^2$. Тогда

$$2020 = \underbrace{f(f(\ldots f}_{2017}(x)\ldots)) + 3 = (\underbrace{f(f(\ldots f}_{2016}(x)\ldots)) + 3)^2 =$$
$$= (\underbrace{f(f(\ldots f}_{2015}(x)\ldots)) + 3)^{2^2} = \ldots = (f(x)+3)^{2^{2016}} = (x+3)^{2^{2017}}.$$

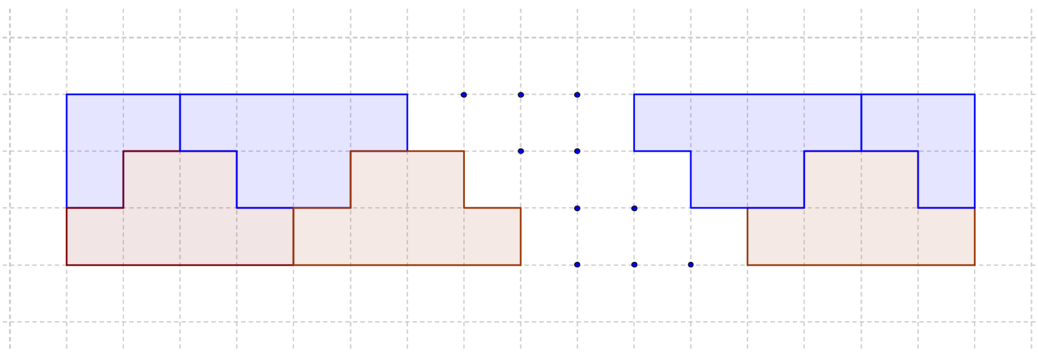
В итоге мы получили уравнение

$$(x+3)^{2^{2017}} = 2020 \Longrightarrow x_{1,2} = -3 \pm \sqrt[2^{2017}]{2020}. \quad ■$$

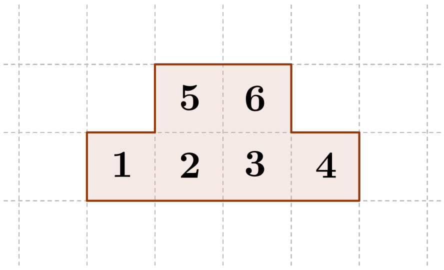
**3.** Какое наименьшее количество клеток доски $3 \times 2016$ можно закрасить так, чтобы у каждой клетки была соседняя по стороне закрашенная клетка? (*А. Храбров*)

**Ответ:** 2016.

**Решение:** Разобьем нашу доску следующим образом:



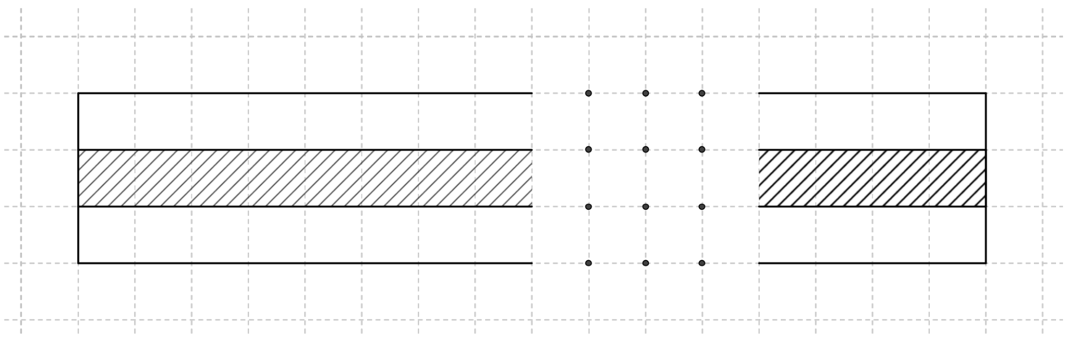
Мы получили два трехклеточных уголка и 1007 фигурок D-гексамино. В наших трехклеточных уголках должна быть закрашена хотя бы одна клетка (угловая или соседствующая с угловой). Докажем, что в каждой D-гексамино из разбиения будет закрашено хотя бы две клетки. Пронумеруем клетки произвольной D-гексамино следующим образом




Если одна из клеток 2 или 3 закрашена, то будет закрашена, соседствующая с ней клетка, принадлежащая D-гексамино. Если же ни 2, ни 3 не будут закрашены, то должны быть закрашены 1 или 5 (как сосед клетки 2) и 6 или 4 (как сосед клетки 3). В любом случае в нашем D-гексамино будет закрашено как минимум две клетки.

В итоге мы получаем оценку на число закрашенных клеток, а именно их должно быть не меньше $1007 \cdot 2 + 2 = 2016$.

Теперь приведем пример, на котором достигается эта оценка



Закрашиваем 2016 клеток, расположенных на второй горизонтали. ■

**4.** Найдите все значения параметра $a$, при которых уравнение

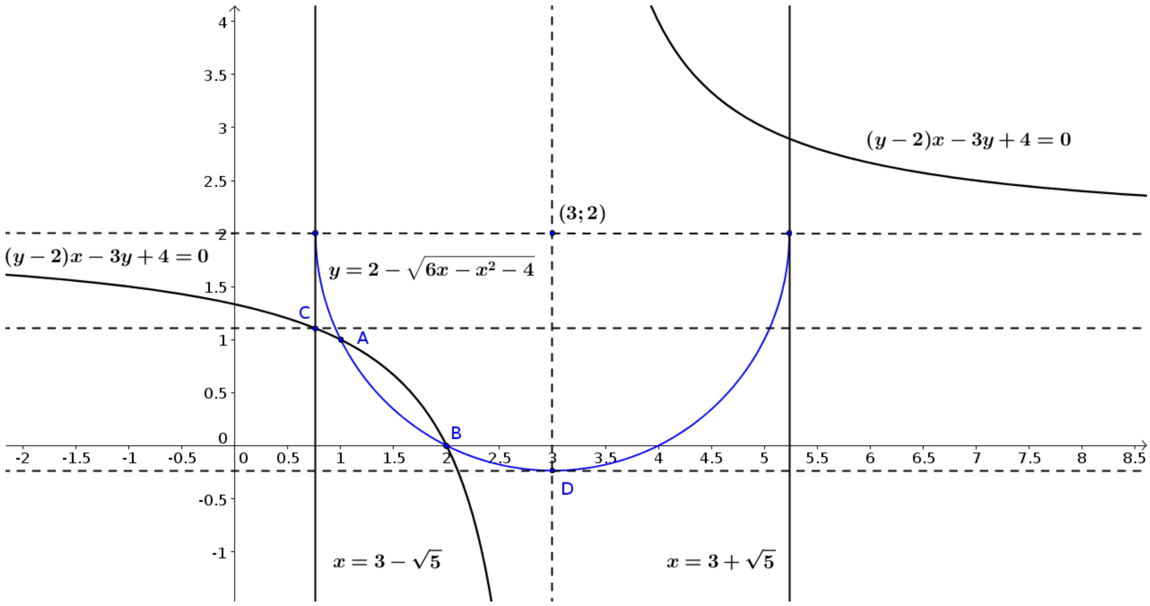
$$(\sqrt{6x - x^2 - 4} + a - 2)((a-2)x - 3a + 4) = 0$$

имеет ровно два различных действительных корня.

*(Р. Алишев)*

**Ответ:** $a \in \{2 - \sqrt{5}\} \cup \{0\} \cup \{1\} \cup \left(2 - \frac{2}{\sqrt{5}};\ 2\right]$

**Решение:** Решать задачу будем графическим методом. Заменим $a$ на $y$ и нарисуем множество решений уравнения в плоскости $Oxy$.




Исходное уравнение эквивалентно следующей системе

$$\left[\begin{array}{l} y=2-\sqrt{6x-x^2-4}, \\ (y-2)x-3y+4=0; \end{array}\right. \Longrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} (x-3)^2+(y-2)^2=5, \\ y\leqslant 2, \end{cases} \\ (x-3)(y-2)=2. \end{array}\right.$$

Первое уравнение задает полуокружность с центром в точке $(3;2)$, а второе – гиперболу с двумя асимптотами $x=3$ и $y=2$ (см. рисунок). К тому же не стоит забывать про ОДЗ: $6x-x^2-4\geqslant 0 \Longrightarrow x\in[3-\sqrt{5};\ 3+\sqrt{5}]$.

В итоге получаем, что исходное уравнение имеет ровно два решения тогда и только тогда, когда прямая $y=a$ пересекает полуокружность и гиперболу ровно в двух точках в полосе $3-\sqrt{5}\leqslant x\leqslant 3+\sqrt{5}$. Из графика видно, что возможны три случая: прямая касается полуокружности (то есть проходит через точку $D$); прямая проходит через одну из точек пересечения полуокружности с гиперболой (то есть через точку $A$ или $B$); прямая лежит строго выше прямой проходящей через точку $C$ и не строго ниже прямой $y=2$. Рассмотрим все эти три случая:

I) Найдем $y$ координату точки $D$:

$$y=2-\sqrt{6x-x^2-4}=2-\sqrt{6\cdot 3-3^2-4}=2-\sqrt{5}.$$

II) Найдем $y$ координату точек $A$ и $B$:

$$\begin{cases}(x-3)^2+(y-2)^2=5,\\(x-3)(y-2)=2,\\y\leqslant 2;\end{cases}\quad\Longrightarrow\begin{cases}(y-2)^4-5(y-2)^2+4=0,\\y\leqslant 2;\end{cases}$$

Раскладываем первое уравнение на множители или решаем как биквадратное

$$\begin{cases}(y-4)y(y-3)(y-1)=0,\\y\leqslant 2;\end{cases}\quad\Longrightarrow y=0 \text{ или } y=1.$$

III) Найдем $y$ координату точки $C$:

$$(x-3)(y-2)=2\Longrightarrow((3-\sqrt{5})-3)(y-2)=2\Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow y=2-\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Итак, ма получаем такие значения параметра

$$y\in\{2-\sqrt{5}\}\cup\{0\}\cup\{1\}\cup\left(2-\frac{2}{\sqrt{5}};\ 2\right].\quad\blacksquare$$

**5.** Медианы $AM_a$, $BM_b$ и $CM_c$ треугольника $ABC$ пересекаются в точке $M$. Окружность $\omega_a$ проходит через середину отрезка $AM$ и касается стороны $BC$ в точке $M_a$. Аналогично, окружность $\omega_b$ проходит через середину отрезка $BM$ и касается стороны $CA$ в точке $M_b$. Пусть $X$ и $Y$ – точки пересечения окружностей $\omega_a$ и $\omega_b$. Докажите, что точки $X$, $Y$ и $M_c$ лежат на одной прямой. (*М. Попов*)

**Решение: Лемма.** *Если степень точек $A$ и $B$ относительно окружности $\omega$ равны $P_\omega(A)$ и $P_\omega(B)$ соответственно, то*

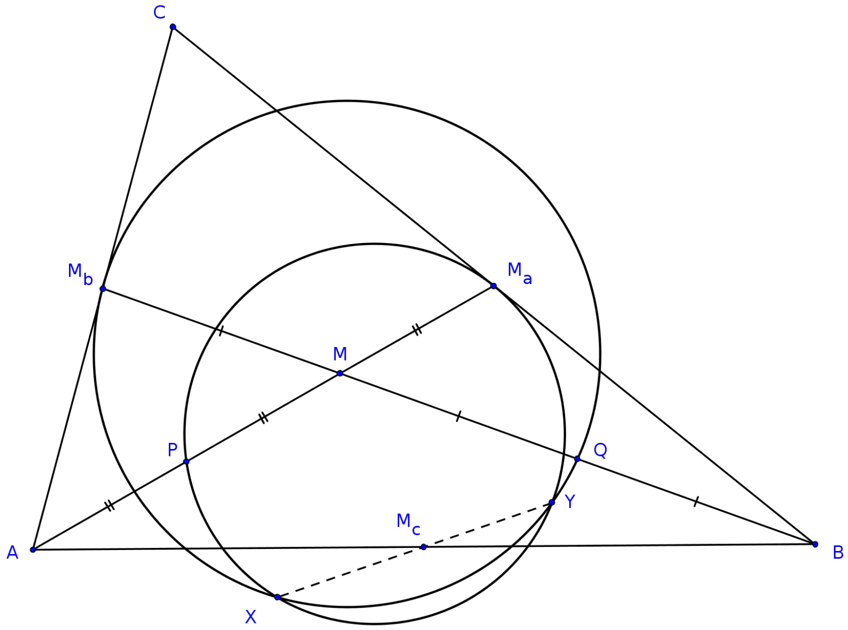
$$P_\omega(M)=\frac{2P_\omega(A)+2P_\omega(B)-AB^2}{4},$$

*где $M$ – середина отрезка $AB$.*

**Доказательство:** Пусть $\omega$ – окружность с центром в точке $O$ радиуса $R$, тогда по определению степени точки $P_\omega(A)=AO^2-R^2$ и $P_\omega(B)=BO^2-R^2$. Воспользуемся формулой длины медианы через стороны треугольника

$$MO^2 = \frac{2AO^2 + 2BO^2 - AB^2}{4} \Longrightarrow P_\omega(M) = MO^2 - R^2 = \\ = \frac{2P_\omega(A) + 2P_\omega(B) - AB^2}{4}. \quad \square$$

Перейдем к решению задачи.




Воспользуемся леммой для точек $A$ и $B$ относительно окружностей $\omega_a$ и $\omega_b$

$$P_{\omega_a}(M_c) = \frac{2P_{\omega_a}(A) + 2P_{\omega_a}(B) - AB^2}{4} = \\ = \frac{2BM_a^2 + 2AP \cdot AM_a - AB^2}{4} = \frac{\frac{a^2}{2} + \frac{2m_a^2}{3} - c^2}{4} = \\ = \frac{3a^2 + (2b^2 + 2c^2 - a^2) - 6c^2}{24} = \frac{a^2 + b^2 - 2c^2}{12}$$

и

$$P_{\omega_b}(M_c) = \frac{2P_{\omega_b}(A) + 2P_{\omega_b}(B) - AB^2}{4} = \\ = \frac{2AM_b^2 + 2BQ \cdot BM_b - AB^2}{4} = \frac{\frac{b^2}{2} + \frac{2m_b^2}{3} - c^2}{4} = \\ = \frac{3b^2 + (2a^2 + 2c^2 - b^2) - 6c^2}{24} = \frac{a^2 + b^2 - 2c^2}{12}.$$

Итак, мы получили, что $P_{\omega_a}(M_c) = P_{\omega_b}(M_c)$, а значит $M_c$ лежит на радикальной оси $\omega_a$ и $\omega_b$, то есть на прямой $XY$. $\blacksquare$