ОТКРЫТАЯ ОЛИМПИАДА УНИВЕРСИТЕТА ИННОПОЛИС

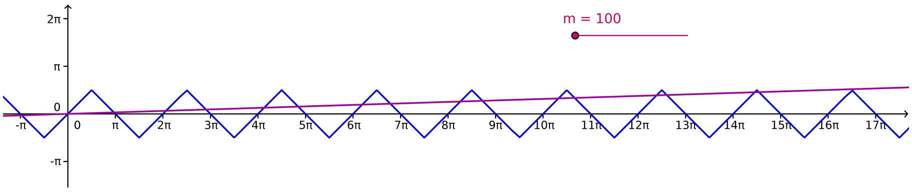
II отборочный (заочный) этап по математике, 17 декабря 2016г.

10 класс, полные решения.

1. **(5 баллов)** Сколько корней имеет уравнение

$$\arcsin(\sin x) = \frac{\pi x}{m}?$$

Решение: Ввиду нечетности функций с обеих сторон уравнения, количество положительных корней равно количеству отрицательных и нулевое решение присутствует. Функция $y = \arcsin(\sin x)$ принимает наибольшее значение $\frac{\pi}{2}$ в точках $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, прямая $y = \frac{\pi x}{m}$ равномерно растет и достигает значения $\frac{\pi}{2}$ в точке $\frac{m}{2}$.



Если $\frac{\pi}{2} + 2\pi n < \frac{m}{2} < \frac{\pi}{2} + 2\pi(n+1)$, то получится $2n+1$ положительных корней, а следовательно, $4n+3$ всего корней. (Можно было построить графики и вручную посчитать корни). ■

Ответы:

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ответ	31	63	95	127	111	79	47	59	75	43

2. **(5 баллов)** Известно, что

$$\text{НОК}(a; b) = n.$$

Какое наибольшее значение может принимать меньший из двух чисел a и b?

Решение: Очевидно, что $a \leqslant n$ и $b \leqslant n$, поэтому получаем тривиальную оценку сверху. Эта оценка достигается на числах $a = b = n$. ■

Ответы:

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ответ	10080	3780	5040	11340	12600	15120	26460	22680	34020	45360

3. **(7 баллов)** Задана последовательность действительных чисел $a_k = \dfrac{1}{k^2+k}$ для любого натурального k. Оказалось, что

$$a_m + a_{m+1} + \ldots + a_{n-1} = \frac{1}{p}, \quad \text{где } p \in \mathbb{P}$$

для некоторых натуральных m и n ($m < n$). Найдите $m + n$.

Решение: Заметим, что

$$a_k = \frac{1}{k^2+k} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

Поэтому

$$\frac{1}{p} = a_m + a_{m+1} + \ldots + a_{n-1} = \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) =$$

$$= \frac{1}{m} - \left(\frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+1}\right) - \ldots - \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n-1}\right) - \frac{1}{n} = \frac{1}{m} - \frac{1}{n}$$

Решаем полученное уравнение

$$\frac{1}{m} - \frac{1}{n} = \frac{1}{p}$$

Приводим к общему знаменателю и раскладываем на множители

$$(p-m)(n+p) = p^2$$

Во всех вариантах p – простое число, поэтому возможен только один случай разложения на множители

$$\begin{cases} p - m = 1 \\ n + p = p^2 \end{cases} \implies \begin{cases} m = p - 1 \\ n = p^2 - p \end{cases} \implies m + n = p^2 - 1 \quad \blacksquare$$

Ответы:

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ответ	960	1368	840	1848	1680	528	2208	360	2808	288

4. **(7 баллов)** Решите уравнение $x^4-(a+b)x^3+(ab+2c)x^2-c(a+b)x+c^2=0$. В ответ напишите сумму квадратов действительных корней уравнения.

Решение: $x=0$ не является решением уравнения, поэтому можно поделить на x^2. Сгруппируем

$$\left(x^2+2c+\frac{c^2}{x^2}\right)-(a+b)\cdot\left(x+\frac{c}{x}\right)+ab=0$$

$$\left(x+\frac{c}{x}\right)^2-(a+b)\cdot\left(x+\frac{c}{x}\right)+ab=0$$

$$\left(x+\frac{c}{x}-a\right)\cdot\left(x+\frac{c}{x}-b\right)=0$$

Решаем через дискриминант два уравнения $x^2-ax+c=0$ и $x^2-bx+c=0$. Во всех вариантах числа подбирались таким образом, чтобы $b^2-4c<0$ и $a^2-4c\geqslant 0$. В итоге получаем, что наше исходное уравнение имеет только два действительных корня

$$x_{1,2}=\frac{a\pm\sqrt{a^2-4c}}{2}$$

Тогда сумма квадратов равна

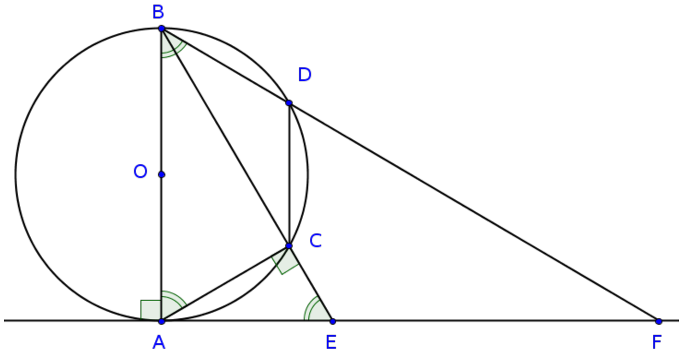
$$x_1^2+x_2^2=\left(\frac{a-\sqrt{a^2-4c}}{2}\right)^2+\left(\frac{a+\sqrt{a^2-4c}}{2}\right)^2=a^2-2c \quad \blacksquare$$

Ответы:

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ответ	33	29	42	38	55	47	74	95	135	91

5. **(8 баллов)** Хорда CD параллельна диаметру AB окружности с центром в точке O радиуса r. Касательная к этой окружности в точке A пересекает прямые BC и BD в точках E и F соответственно. Найдите $AE \cdot AF$.

Решение:



Так как во вписанном четырехугольнике $ABDC$ противоположные стороны AB и CD параллельны, то $ABDC$ – равнобедренная трапеция ($BD = AC$). Следовательно, $\angle DBA = \angle BAC$. Так как AB – диаметр, то $\angle BCA = 90°$. А так как AE – касательная, то $\angle BAE = 90°$. Получаем

$$\angle BEA = 90° - \angle EBA = 90° - \angle CBA = 90° - (90° - \angle BAC) = \angle BAC$$

Поэтому

$$\angle FBA = \angle DBA = \angle BAC = \angle BEA$$

Треугольники FBA и BEA подобны по двум углам ($\angle FBA = \angle BEA$ и $\angle FAB = \angle BAE = 90°$).

$$\frac{AB}{AE} = \frac{AF}{AB} \Longrightarrow AE \cdot AF = AB^2 = (2r)^2 = 4r^2 \quad \blacksquare$$

Ответы:

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ответ	196	256	144	324	484	400	576	676	64	100

6. **(8 баллов)** В корзине лежат $2n$ одинаковых апельсинов, $2n$ одинаковых яблок и $2n$ одинаковых груш. Сколькими способами мы можем поделить все фрукты между двумя детьми, чтобы каждому досталось по $3n$ фруктов?

Решение: Зафиксируем ребенка и обозначим за x число отданных ему апельсинов, y – яблок и z – груш. Получаем два существенно разных случая:
1) $0 \leqslant x \leqslant n$, тогда $n - x \leqslant y \leqslant 2n$ и z восстанавливается однозначно. Число таких способов

$$(n+1) + (n+2) + \ldots + (2n+1) = \frac{(2n+1)(2n+2)}{2} - \frac{n(n+1)}{2}$$

2) $n + 1 \leqslant x \leqslant 2n$, тогда $0 \leqslant y \leqslant 3n - x$ и z восстанавливается однозначно. Число таких способов

$$2n + (2n-1) + \ldots + (n+1) = \frac{2n(2n+1)}{2} - \frac{n(n+1)}{2}$$

В итоге всего способов

$$\frac{(2n+1)(2n+2)}{2} - \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2n(2n+1)}{2} - \frac{n(n+1)}{2} =$$
$$= (2n+1)(n+1) + (2n+1)n - n(n+1) = 3n^2 + 3n + 1 \quad \blacksquare$$

Ответы:

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ответ	721	919	631	817	631	1141	1027	1387	721	1519

7. **(10 баллов)** Заочный этап олимпиады Университета Иннополис проводился среди учащихся 9, 10 и 11 классов, и среди них на очный этап прошли соответственно $a\%$, $b\%$ и $c\%$. Причем среди учащихся 9 и 10 классов вместе на очный этап прошли $k\%$, а среди 10 и 11 вместе — $l\%$. Определите процент прошедших на очный этап по 9 и 11 классам вместе ($a < k < b < l < c$).

Решение: Пусть x – количество учащихся 9 класса, y – учащихся 10 класса и z – учащихся 11 класс. Тогда

$$k = \frac{ax + by}{x + y} \Longrightarrow \frac{y}{x} = \frac{k - a}{b - k} \quad \text{и} \quad l = \frac{by + cz}{y + z} \Longrightarrow \frac{z}{y} = \frac{l - b}{c - l}$$

Следовательно,

$$\frac{z}{x} = \frac{z}{y} \cdot \frac{y}{x} = \frac{(k - a)(l - b)}{(b - k)(c - l)} = \frac{m - a}{c - m},$$

где m – процент прошедших на очный этап по 9 и 11 классам вместе. Отсюда осталось выразить m и мы получим

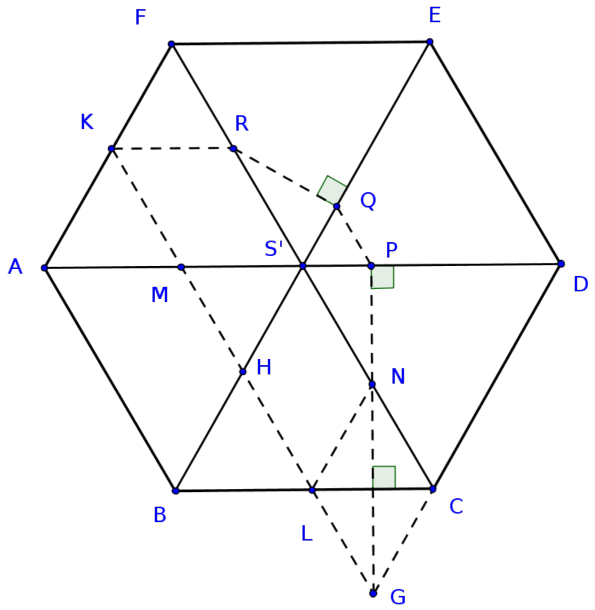
$$m = \frac{a(b - k)(c - l) + c(k - a)(l - b)}{(b - k)(c - l) + (k - a)(l - b)} \quad \blacksquare$$

Ответы:

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ответ	26.6	21.2	19.8	33.8	15.6	28.5	28.5	37.8	19.5	14.8

8. **(10 баллов)** В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ на диагонали основания AD выбрана точка M, делящая её в отношении $AM : MD = n : m$ $(n < m)$. Через точку M проведено сечение пирамиды плоскостью, параллельной грани SAB. Найдите отношение площади сечения к площади треугольника SAB.

Решение:



Спроецируем точку S и наше сечение на плоскость $ABCDEF$. Опишем как найти точки проекции сечения. Так как сечение параллельно плоскости SAB, то $KL \parallel AB$ (две параллельные плоскости пересекаются плоскостью $ABCDEF$ по двум параллельным прямым), $LN \parallel BS'$ (две параллельные плоскости пересекаются плоскостью SBC по двум параллельным прямым, проекции этих прямых также параллельны), $KR \parallel AS'$ (две параллельные плоскости пересекаются плоскостью SAF по двум параллельным прямым, проекции этих прямых также параллельны). Чтобы найти точку P проекции, рассмотрим три плоскости: наше сечение, $ABCDEF$ и SCD. Их попарно общие прямые пересекаются в одной точке G, лежащей на плоскости $ABCDEF$. Следовательно, проекции этих прямых пересекаются в одной точке. Поэтому точки G, N и P лежат на одной прямой, причем перпендикулярной AD ($LNCD$ – ромб, поэтому $CL \perp NG$, осталось заметить, что $CL \parallel AD$). Точка Q находится аналогично.

Заметим, что так как плоскости параллельны, то отношение площадей сечений будет точно таким же, как отношение площадей проекции на плоскость $ABCDEF$ (площади отличаются в $\cos\alpha$ раз, где α – двугранный угол между плоскостями). Проекция грани SBA это треугольник $S'AB$, а проекция сечения – многоугольник $KLNPQR$.

Пусть $AM = x$ и $MS' = y$, тогда нетрудно показать, что $AM = AK = KM = BH = HL = BL = S'N = S'R = 2 \cdot S'Q = 2 \cdot S'P = x$ и $MS' = HS' = KR = LN = y$. Площадь треугольника $S'AB$ равна

$$S_{S'AB} = \frac{1}{2} \cdot S'A \cdot S'B \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}(x+y)^2}{4}$$

Площадь многоугольника $KLNPQR$ найдем как сумму площадей его частей

$$S_{KLNPQR} = S_{S'MH} + S_{S'HLN} + S_{S'NP} + S_{S'PQ} + S_{S'QR} + S_{S'RKM} =$$
$$= \frac{\sqrt{3}y^2}{4} + \frac{\sqrt{3}xy}{2} + \frac{\sqrt{3}x^2}{8} + \frac{\sqrt{3}x^2}{16} + \frac{\sqrt{3}x^2}{8} + \frac{\sqrt{3}xy}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(y^2 + 4xy + \frac{5}{4}x^2\right)$$

Мы знаем, что

$$\frac{x}{2y+x} = \frac{n}{m} \Longrightarrow \frac{y}{x} = \frac{m-n}{2n}$$

Получаем отношение

$$\frac{S_{KLNPQR}}{S_{S'AB}} = \frac{4y^2+16xy+5x^2}{4(x+y)^2} = \frac{4\left(\frac{y}{x}\right)^2+16\left(\frac{y}{x}\right)+5}{4\left(1+\frac{y}{x}\right)^2} =$$

$$= \frac{4\left(\frac{m-n}{2n}\right)^2+16\left(\frac{m-n}{2n}\right)+5}{4\left(1+\frac{m-n}{2n}\right)^2} = \frac{(m-n)^2+8n(m-n)+5n^2}{(m+n)^2} = 1+\frac{n(4m-3n)}{(m+n)^2} \quad \blacksquare$$

Ответы:

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ответ	1.5568	1.4608	1.2752	1.5712	1.57	1.33	1.5328	1.52	1.48	1.5625

9. **(20 баллов)** При каких $n > 1$ существуют такие различные натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$, что

$$\text{НОК}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

Решение: Пусть существуют такие различные натуральные числа a и b, что $\text{НОК}(a, b) = a + b$. Так как

$$\text{НОК}(a, b) \vdots a \quad \text{и} \quad \text{НОК}(a, b) \vdots b$$

то

$$a + b \vdots a \quad \text{и} \quad a + b \vdots b$$

Следовательно, $a \vdots b$ и $b \vdots a$, но такого быть не может в виду того, что $a \neq b$.

Предположим теперь, что $n > 2$ и рассмотрим числа

$$a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 2 \cdot 3,\ \ldots,\ a_i = 2 \cdot 3^{i-2},\ \ldots,\ a_{n-1} = 2 \cdot 3^{n-3},\ a_n = 3^{n-2}$$

Все эти числа различны и их наименьшее общее кратное равно $2 \cdot 3^{n-2}$. Найдем теперь их сумму

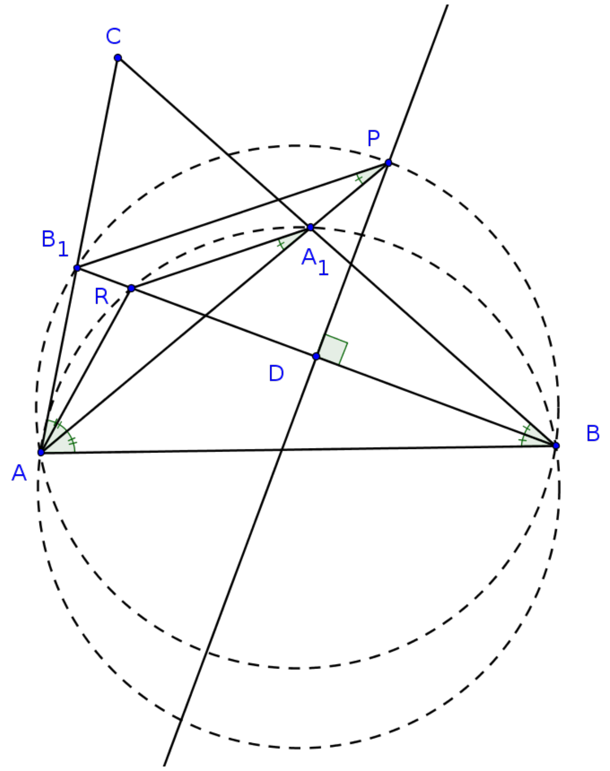
$$1 + 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + 2 \cdot 3^{n-3} + 3^{n-2} = 1 + 2 \cdot (1 + 3 + \ldots + 3^{n-3}) + 3^{n-2} =$$

$$= 1 + 2 \cdot \frac{3^{n-2} - 1}{3 - 1} + 3^{n-2} = 2 \cdot 3^{n-2} \quad \blacksquare$$

Ответ: При всех натуральных $n > 2$.

10. **(20 баллов)** AA_1 и BB_1 – биссектрисы неравнобедренного треугольника ABC. Серединный перпендикуляр к отрезку BB_1 пересекает прямую AA_1 в точке P. На отрезке BB_1 взяли такую точку R, что $PB_1 \parallel RA_1$. Докажите, что $AR = RA_1$.

Решение:



Рассмотрим описанную окружность треугольника BAB_1. Пусть P' – середина дуги BB_1, не содержащей точку A. С одной стороны P' лежит на биссектрисе AA_1 (так как середина дуги), с другой стороны $B_1P = BP$ (равные дуги стягивают равные хорды), значит P' лежит на серединном перпендикуляре к BB_1. Следовательно, $P' = P$.

Так как $ABPB_1$ вписанный четырехугольник, то $\angle ABB_1 = \angle APB_1$. Так как $PB_1 \parallel RA_1$, то $\angle APB_1 = \angle AA_1R$. В итоге мы получили

$$\angle ABR = \angle ABB_1 = \angle APB_1 = \angle AA_1R$$

Откуда следует, что четырехугольник ABA_1R вписанный, а так как BR – биссектриса $\angle A_1BA$, то R – середина дуги AA_1, не содержащей точку B. Следовательно, $AR = RA_1$ (равные дуги стягивают равные хорды). ■