ОТКРЫТАЯ ОЛИМПИАДА УНИВЕРСИТЕТА ИННОПОЛИС

I отборочный (заочный) этап по математике, 4 декабря 2016г.

10 класс, полные решения.

1. **(5 баллов)** Чему равно число m в факториальной системе счисления (в ответ запишите число $d_k d_{k-1} \dots d_2 d_1$, где $m = \sum\limits_i d_i \cdot i!$ и $0 \leqslant d_i \leqslant i$)?

Ответы:

Вариант	1	2	3	4	5	6	7
Ответ	131101	141120	243120	244000	244001	30210	410011

8	9	10	11
433311	531310	610020	1041121

2. Даны два многочлена $G(x) = x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ и $H(x) = x^2 + Ax + B$. Найдите значение $G(x_1) + G(x_2)$, где x_1, x_2 – корни многочлена $H(x)$.
Ответ: $2D - AC$.

Решение: Заметим, что
$$G(x) = x^2 \cdot H(x) + Cx + D$$
поэтому
$$G(x_1) + G(x_2) = (x_1^2 \cdot H(x_1) + Cx_1 + D) + (x_2^2 \cdot H(x_2) + Cx_2 + D) = C(x_1 + x_2) + 2D$$
Осталось заметить, что по теореме Виета $x_1 + x_2 = -A$. Следовательно,
$$G(x_1) + G(x_2) = C(x_1 + c_2) + 2D = 2D - AC \quad \blacksquare$$

Ответы:

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Ответ	45	50	23	-29	61	-14	-62	80	-19	70	323

3. **(7 баллов)** Найдите все пары натуральных чисел x и y таких, что

$$\log_2 ax + \log_2 by = \log_2(bx + ay + p_1p_2 - 1), \text{ где } p_1, p_2 \in \mathbb{P} \quad a, b > 2$$

В ответ напишите наименьшее возможное значение $x + y$.

Решение: Избавимся от логарифмов в уравнении

$$axby = bx + ay + p_1p_2 - 1$$

Преобразуем и разложим на множители

$$(ay - 1)(bx - 1) = p_1p_2$$

Так как $p_1, p_2 \in \mathbb{P}$, то получаем четыре возможных решения

$$\begin{cases} x = \dfrac{p_1p_2 + 1}{b} \\ y = \dfrac{2}{a} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{2}{b} \\ y = \dfrac{p_1p_2 + 1}{a} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{p_1 + 1}{b} \\ y = \dfrac{p_2 + 1}{a} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{p_2 + 1}{b} \\ y = \dfrac{p_1 + 1}{a} \end{cases}$$

Так как $a, b > 2$ и $x, y \in \mathbb{N}$, то первые два решения точно не подходят. Из оставшихся двух выбираем то, в котором x, y натуральные и сумма $x + y$ минимальна. ■

Ответы:

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Ответ	5	4	5	6	7	6	4	6	10	4	8

4. **(7 баллов)** Симметричную монету подбросили n раз. Найдите вероятность того, что не встретились два последовательных броска, в которых наблюдался орел?

Решение: Введем обозначения: О – орел, Р – решка. Пусть S_n – число последовательностей из О и Р длины n, в которых нет двух последовательных символов О (такие последовательности будем называть корректными). Очевидно, что $S_1 = 2$ и $S_2 = 3$. Найдем рекуррентную формулу для вычисления S_n при $n > 2$.
Рассмотрим всевозможные последовательности длины n оканчивающиеся на P. Очевидно, что такая последовательность будет корректной, тогда и только тогда, когда будет корректной последовательность без последнего символа Р. Но таких последовательностей ровно S_{n-1}.
Теперь рассмотрим все последовательности длины n оканчивающиеся на O. Очевидно, что такая последовательность будет корректной, тогда и только тогда, когда будет корректной последовательность без последних двух символов Р и О (предпоследний символ обязательно Р). Следовательно, таких последовательностей ровно S_{n-2}.
Получаем рекуррентную формулу для вычисления S_n:

$$S_1 = 2, \quad S_2 = 3, \quad S_n = S_{n-1} + S_{n-2} \quad \text{при } n > 2$$

Очевидно, что это просто смещенная последовательность Фибоначчи $S_n = f_{n+2}$. Итоговая вероятность вычисляется по формуле $\dfrac{f_{n+2}}{2^n}$. ■

Ответы:

Вариант	1	2	3	4	5	6
Ответ	0.140625	0.140625	0.173828125	0.173828125	0.21484375	0.21484375

7	8	9	10	11
0.265625	0.265625	0.328125	0.328125	0.265625

5. **(8 баллов)** Найдите наименьшее натуральное значение n такое, что при всех x выполняется неравенство $|x-1|+|x-2|+\ldots+|x-n| \geqslant m$.

Решение: $f(x)=|x-1|+|x-2|+\ldots+|x-n|$ – непрерывная кусочно-линейная функция. Найдем минимальное значение $f(x)$.
Если $k+1>x \geqslant k$, то первые k модулей раскрываются со знаком плюс, а остальные $n-k$ со знаком минус. Поэтому получаем

$$f(x)=(x-1)+(x-2)+\ldots+(x-k)+(k+1-x)+\ldots+(n-x)=$$
$$=(2k-n)x+\frac{n(n+1)}{2}-k(k+1)$$

Следовательно, если $2k-n<0$ на этом участке $f(x)$ убывает, а если $2k-n>0$, то $f(x)$ возрастает. А так как функция непрерывная, то минимальное значение будет достигаться в тот момент, когда будет происходить переход с убывания в возврастание. Далее возможны два случая
1) Если $n=2l$, то переход с убывания в возрастание будет на всем полуинтервале $[l,\ l+1)$. Минимальное значение будет равно

$$\min f(x)=\frac{n(n+1)}{2}-l(l+1)=l^2=\frac{n^2}{4}$$

2) Если $n=2l+1$, то переход с убывания в возрастание будет происходить в точке $x=l+1$. Минимальное значение будет равно

$$\min f(x)=(2l-n)(l+1)+\frac{n(n+1)}{2}-l(l+1)=l(l+1)=\frac{n^2-1}{4}$$

В итоге нужно найти такое минимальное натуральное n, что

$$n^2-I\{n-\text{нечетно}\} \geqslant 4m$$

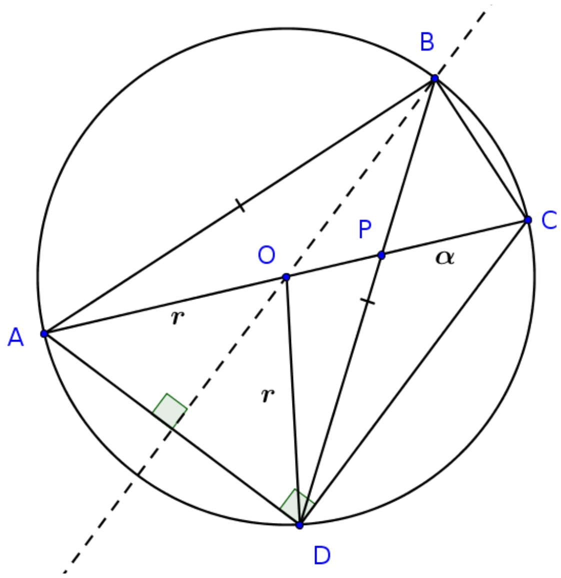
где I - индикаторная функция события. ■

Ответы:

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Ответ	90	90	90	91	91	91	92	92	110	89	89

6. **(8 баллов)** Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность радиуса r так, что диагональ AC – диаметр окружности. Диагонали четырехугольника пересекаются в точке P. Известно, что $BD = AB$ и $PC = \alpha < r$. Найдите длину стороны CD.

Решение:



Пусть O – центр описанной окружности. Очевидно, что $AO = DO$ и $AB = DB$, поэтому точки O и B лежат на серединном перпендикуляре к отрезку AD. Так как AC – диаметр, то $\angle ADC = 90°$. В итоге получаем, что $OB \parallel DC$. Следовательно, треугольник OBP подобен треугольнику CDP. В итоге получаем

$$\frac{CD}{OB} = \frac{CP}{OP} = \frac{CP}{CO - CP}$$

Отсюда уже можно найти длину отрезка CD

$$CD = \frac{OB \cdot CP}{CO - CP} = \frac{r\alpha}{r - \alpha} \quad \blacksquare$$

Ответы:

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Ответ	1.68	2.08	2.52	0.375	0.96	1.9125	0.36	2.6125	0.5	1.05	2.99

7. **(10 баллов)** Группа из m студентов называется *недружелюбной*, если любые ее два представителя не дружат друг с другом. Студент называется *суперобщительным*, если существует, по крайне мере, еще n студентов, с которыми он дружит. Какое наибольшее количество студентов может обучаться в Университете Иннополис, если известно, что нет ни одной недружелюбной группы и нет ни одного суперобщительного студента.

Решение: Построим граф, вершинами которого являются студенты, а ребрами соединяем только тех студентов, которые между собой дружат. Докажем при помощи индукции (по размеру недружелюбной группы), что в нашем графе не больше $n(m-1)$ студентов.
База $m = 2$: В нашем графе между любыми двумя вершинами должно быть ребер. Поэтому в нем как максимум n вершин (иначе бы любой студент был бы суперобщительным). База доказана.
Переход $(m-1) \longrightarrow m$: Рассмотрим произвольного студента v. Если A – множество вершин с которыми дружит v, а B – множество вершин с которыми он не дружит, то $|A| \leqslant n-1$ (иначе бы v был суперобщительным) и по предположению индукции $|B| \leqslant (m-2)n$ (если бы в множестве B нашлась недружелюбная группа из $m-1$ студента, то, добавив в нее v, мы бы получили недружелюбную группу из m студентов). Получаем, что всего вершин в графе

$$|A| + |B| + 1 \leqslant (n-1) + (m-2)n + 1 = (m-1)n$$

Переход доказан.
Осталось привести пример такого графа. Разобъем всех студентов на $m-1$ факультет по n студентов. Пусть в каждом факультете все студенты дружат друг с другом и между факультетами никто ни с кем не дружит. Тогда очевидно, что нет ни одного суперобщительного студента (степень каждой вершины $n-1$) и нет ни одной недружелюбной группы. ■

Ответы:

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Ответ	135	270	255	240	225	210	195	180	165	150	306

8. **(10 баллов)** Найдите сумму действительных корней уравнения
$$2 \cdot 3^{3x} - a \cdot 3^{2x} - 3(a+4) \cdot 3^x + 18 = 0.$$

Решение: Сделаем замену $t = 3^x$, а так как $x \in \mathbb{R}$, то $t > 0$. Получаем следующее уравнение
$$2t^3 - at^2 - 3(a+4)t + 18 = 0$$
Очевидно, что число $t_1 = -3$ является корнем уравнения и соответствующее ему x_1 не действительное. Получаем
$$(t+3)\big(2t^2 - (a+6)t + 6\big) = 0$$
Параметр a был подобран таким образом, чтобы оставшиеся два корня t_2 и t_3 были действительными и строго больше нуля. Но тогда, используя теорему Виета, получаем
$$3^{x_2+x_3} = t_2 \cdot t_3 = \frac{6}{2} = 3$$
Следовательно, $x_2 + x_3 = 1$. ■

(10 баллов) Найдите сумму действительных корней уравнения
$$2 \cdot 4^{3x} - a \cdot 4^{2x} - 4(a+6) \cdot 4^x + 32 = 0.$$

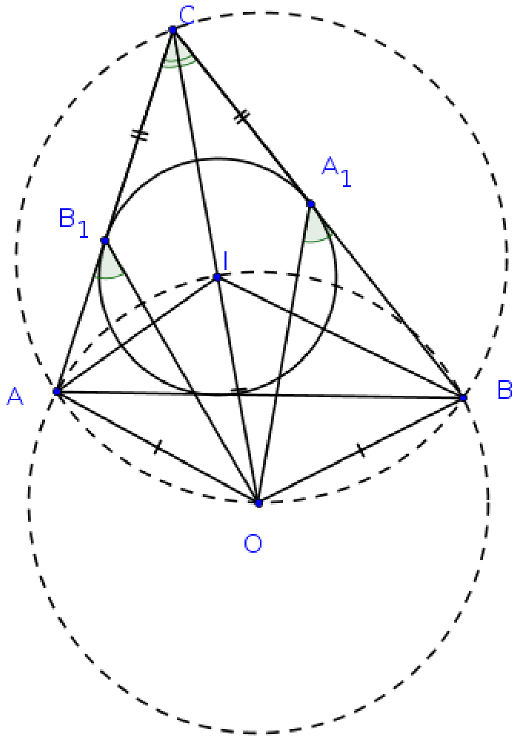
Решение: Сделаем замену $t = 4^x$, а так как $x \in \mathbb{R}$, то $t > 0$. Получаем следующее уравнение
$$2t^3 - at^2 - 4(a+6)t + 32 = 0$$
Очевидно, что число $t_1 = -4$ является корнем уравнения и соответствующее ему x_1 не действительное. Получаем
$$(t+4)\big(2t^2 - (a+8)t + 8\big) = 0$$
Параметр a был подобран таким образом, чтобы оставшиеся два корня t_2 и t_3 были действительными и строго больше нуля. Но тогда, используя теорему Виета, получаем
$$4^{x_2+x_3} = t_2 \cdot t_3 = \frac{8}{2} = 4$$
Следовательно, $x_2 + x_3 = 1$. ■

Ответы:

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Ответ	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0.5

9. **(20 баллов)** В треугольник ABC вписана окружность с центром в точке I касающаяся сторон AC и BC в точках B_1 и A_1 соответственно. Пусть O — центр описанной окружности треугольника AIB. Докажите, что $\angle OB_1A = \angle OA_1B$.

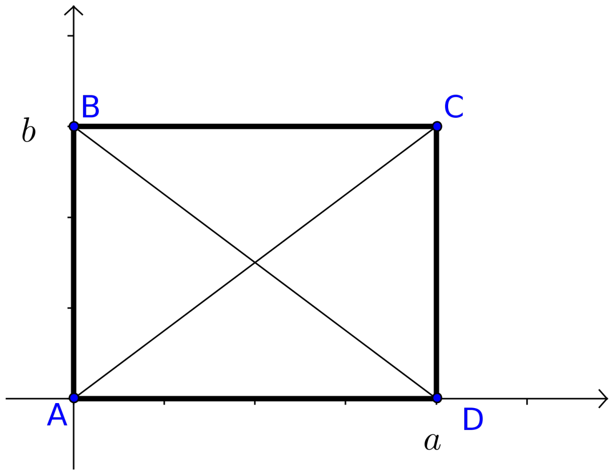
Решение:



Рассмотрим точку O' – середину дуги AB (дуга не содержит точку C), описанной окружности треугольника ABC. По лемме о трезубце получаем $O'A = O'I = O'B$. Следовательно, O' равноудаленна от всех трех вершин треугольника AIB, поэтому $O = O'$.

Так как O – середина дуги AB, то $\angle ACO = \angle BCO$. К тому же $CB_1 = CA_1$ как касательные, проведенные из одной точки. В итоге получаем, что треугольник B_1CO равен треугольнику A_1CO по двум сторонам и углу между ними. Но тогда $\angle OB_1A = \angle OA_1B$ как внешние углы равных треугольников. ■

10. **(20 баллов)** Данный прямоугольник на рисунке задайте как множество решений одного уравнения с двумя переменными.



Решение: Уравнение $|x| + |y| = 1$ задает квадрат с центром в начале координат и вершинами в единицах на осях. Все прямоугольники аффинно эквивалентны этому квадрату, поэтому уравнение этого прямоугольника ищем в виде

$$k|bx - ay| + |bx + ay - ba| = d.$$

Коэффициенты k и d выбираем так, чтобы вершины прямоугольника являлись решениями этого уравнения. Подходят $k = 1$ и $d = ba$. Ответ

$$|bx - ay| + |bx + ay - ba| = ba. \quad \blacksquare$$

Решение: Некоторые участники придумали более простое решение: уравнение

$$\sqrt{x} \cdot \sqrt{a - x} = 0$$

задает две прямые $x = 0$ и $x = a$, уравнение

$$\sqrt{y} \cdot \sqrt{b - y} = 0$$

задает две прямые $y = 0$ и $y = b$. Теперь рассмотрим уравнение

$$\sqrt{x} \cdot \sqrt{a - x} \cdot \sqrt{y} \cdot \sqrt{b - y} = 0$$

которое задает четыре прямые $x = 0$, $x = a$, $y = 0$ и $y = b$ в ОДЗ. А область допустимых значений $0 \leqslant x \leqslant a$ и $0 \leqslant y \leqslant b$. Следовательно, полученное уравнение задает наш прямоугольник. $\blacksquare$