# 10 класс

**1.** В мешке находится 20 шариков трех цветов: белые, черные и красные. Каждого цвета был хотя бы один шарик. Оказалось, что если удвоить число белых шариков в мешке, то вероятность достать белый шарик станет на $\frac{1}{5}$ меньше чем первоначальная вероятность достать красный шарик (до удвоения белых). Найдите сколько было шариков каждого цвета.

(*М. Попов*)

**Ответ:** 5 белых, 3 черных и 12 красных.

**Решение:** Пусть было $x$ шариков белого цвета, $y$ – черного и $z$ – красного. Так как всего шариков было 20, то $x + y + z = 20$. Тогда первоначальная вероятность достать красный шарик равна

$$p_1 = \frac{z}{x+y+z} = \frac{z}{20},$$

а вероятность достать белый шарик после удвоения белых равна

$$p_2 = \frac{2x}{2x+y+z} = \frac{2x}{x+20}.$$

Теперь мы можем записать уравнение

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{5} \Longrightarrow \frac{z}{20} - \frac{2x}{x+20} = \frac{1}{5}$$

или

$$z \cdot (x+20) \cdot 5 - 2x \cdot 20 \cdot 5 = 20 \cdot (x+20).$$

Делим обе части на 5 и приводим подобные члены

$$zx + 20z - 44x = 80 \Longrightarrow (x+20)(44-z) = 800.$$

Осталось заметить, что так как $x+y+z = 20$ и каждый цвет присутствовал, то $20 < x + 20 < 40$. Среди делителей 800 только 25 и 32 удовлетворяют этому неравенству. Разбираем оба этих случая:

I) Пусть $x+20 = 25$, тогда $44-z = 32$. Получаем решение $x = 5$, $z = 12$ и $y = 3$.

II) Пусть $x+20=32$, тогда $44-z=25$. Получаем $x=12$, $z=19$, но тогда их должно быть больше 20. Противоречие.

Рассмотрев оба случая, мы пришли к выводу, что решение единственно $(x,y,z)=(5,3,12)$. ■

**2.** В зимнюю школу приехало всего 40 девочек. У каждой из них есть чётное число подруг среди других приехавших. Выяснилось, что всех девочек можно расселить по двое так, чтобы в каждой комнате жили подруги. После этого две подруги, жившие в одной комнате, поссорились. Верно ли, что по-прежнему всех девочек можно расселить по двое так, чтобы в каждой комнате жили (непоссорившиеся) подруги?

(*Д. Мусатов*)

**Решение:** Нет, не верно. Пусть имеются 4 особые девочки А, Б, В и Г. Причем А дружит с Б и В, Б дружит с А и В, В дружит с А, Б и Г, Г дружит только с В. Остальные 36 девочек дружат, например, по кругу. Очевидно, что если поссорились девочки А и Б, то расселить никак не получится. ■

**3.** Найдите все натуральные числа $a$ и $b$ такие, что

$$a^3-b^3=633\cdot p$$

где $p$ – некоторое простое число. (*М. Попов*)

**Ответ:** $a=16$, $b=13$.

**Решение:** Разложим левую часть уравнения на множители

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=3\cdot 211\cdot p \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow (a-b)((a-b)^2+3ab)=3\cdot 211\cdot p.$$

Заметим, что правая часть делится на 3, следовательно хотя бы один из сомножителей делится на 3. Если

$$a-b \,\vdots\, 3 \Longrightarrow (a-b)^2+3ab \,\vdots\, 3$$

и наоборот

$$(a-b)^2+3ab \,\vdots\, 3 \Longrightarrow (a-b)^2 \,\vdots\, 3 \Longrightarrow a-b \,\vdots\, 3$$

Получаем, что левая часть уравнения делится на 9, значит $3 \cdot 211 \cdot p \vdots 9$. Получаем, что $p \vdots 3$, а так как $p \in \mathbb{P}$, то $p = 3$.

В итоге получаем такое уравнение

$$(a-b)((a-b)^2+3ab) = 3^2 \cdot 211,$$

причем оба сомножителя положительны и делятся на 3. Заметим также, что второй сомножитель больше первого, поэтому возможет только один вариант разбиения на множители

$$\begin{cases} a-b=3, \\ (a-b)^2+3ab = 3 \cdot 211. \end{cases}$$

Выражаем $a$ и подставляем во второе уравнение

$$9+3(b+3)b = 3 \cdot 211 \Longrightarrow b^2+3b-208=0.$$

Решаем квадратное уравнение и получаем корни

$$b_1 = \frac{-3-29}{2} = -16 \quad \text{и} \quad b_1 = \frac{-3+29}{2} = 13.$$

Нас интересуют только натуральные числа, поэтому $a = 16$ и $b = 13$. ■

**4.** Найдите все значения параметра $a$, при которых уравнение

$$(x^2-6x+8-a)(x-a^2+6a-8) = 0$$

имеет ровно два различных действительных корня.

(*Р. Алишев*)

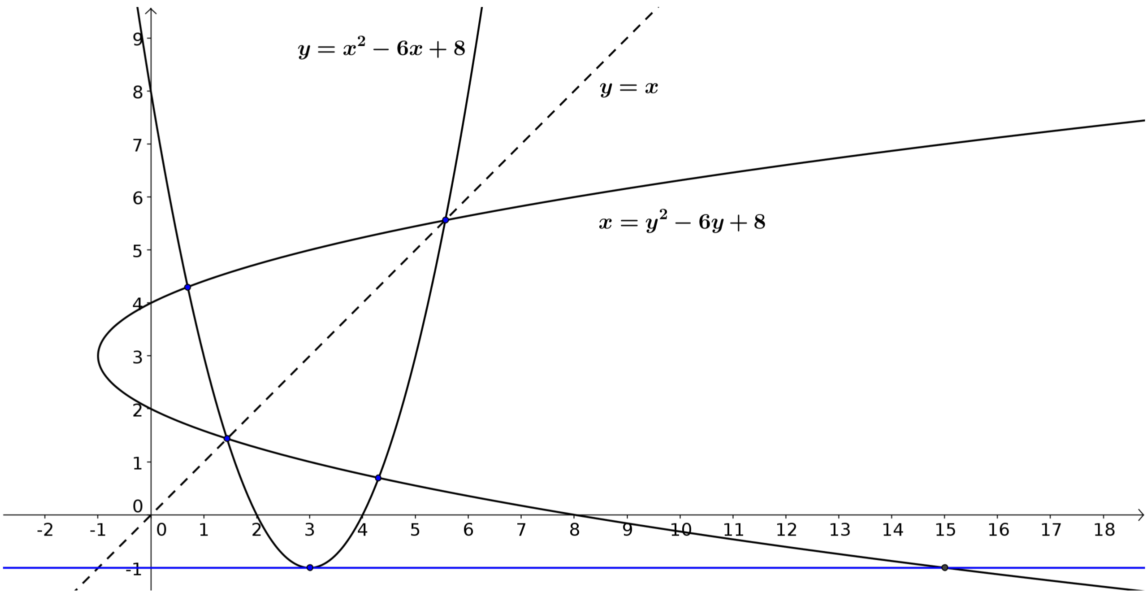
**Ответ:** $a \in \{-1\} \cup \left\{\frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{13}}{2}\right\} \cup \left\{\frac{7}{2} \pm \frac{\sqrt{17}}{2}\right\}$

**Решение:** Решать задачу будем графическим методом. Заменим $a$ на $y$ и нарисуем множество решений уравнения в плоскости $Oxy$.

Исходное уравнение эквивалентно следующей системе

$$\left[\begin{array}{l} y = x^2-6x+8, \\ x = y^2-6y+8. \end{array}\right.$$

График первого уравнения это парабола с ветвями направленными вверх, а график второго уравнения – парабола повернутая на 90° (см. рисунок). Причем при замене $x \leftrightarrow y$ первая парабола переходит во вторую и наоборот. Следовательно, они симметричны относительно прямой $y = x$, а значит две точки пересечения этих парабол лежат на этой прямой.




Перейдем теперь к решению задачи. Так как исходное уравнение должно иметь ровно два различных решения, то прямая $y = a$ должна пересекать обе наши параболы ровно в двух точках. Как видно из рисунка такое возможно только в пяти точках: когда прямая проходит через вершину первой параболы или когда прямая проходит через одну из точек пересечения парабол. Разберем оба этих случая:

I) Прямая проходит через вершину параболы. Вершина имеет координаты $(-\frac{b}{2a}; -\frac{D}{4a}) = (3; -1)$. Тогда получаем прямую $y = -1$.

II) Прямая проходит через одну из точек пересечения парабол. Точки пересечения находятся из системы

$$\begin{cases} y = x^2 - 6x + 8, \\ x = y^2 - 6y + 8. \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow y = (y^2 - 6y + 8)^2 - 6(y^2 - 6y + 8) + 8 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow y^4 - 12y^3 + 46y^2 - 61y + 24 = 0.$$

Причем две из них можно найти из условия $y = x$, то есть из уравнения

$$y = y^2 - 6y + 8 \Longrightarrow y^2 - 7y + 8 = 0.$$

Поделим многочлен четвертой степени на квадратный и получим

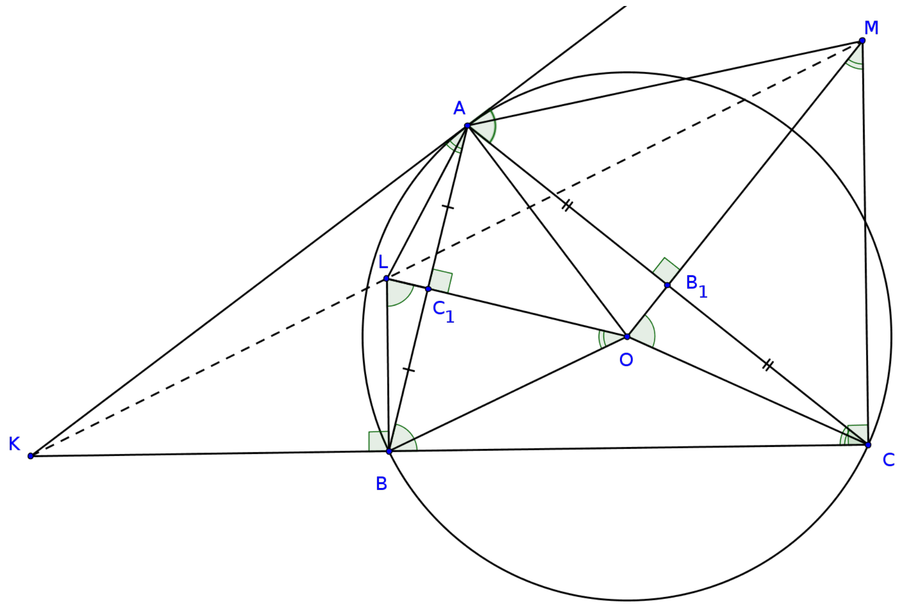
$$y^4 - 12y^3 + 46y^2 - 61y + 24 = (y^2 - 7y + 8)(y^2 - 5y + 3) = 0.$$

Теперь мы легко можем найти все четыре точки: $y = \frac{7}{2} \pm \frac{\sqrt{17}}{2}$ и $y = \frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{13}}{2}$. Итак, мы получаем пять возможных значений параметра

$$a \in \{-1\} \cup \left\{\frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{13}}{2}\right\} \cup \left\{\frac{7}{2} \pm \frac{\sqrt{17}}{2}\right\}. \quad \blacksquare$$

**5.** Касательная в точке $A$ к описанной окружности треугольника $ABC$ пересекает прямую $BC$ в точке $K$. На перпендикуляре к отрезку $BC$ в точке $B$ взята точка $L$ такая, что $AL = BL$. На перпендикуляре к отрезку $BC$ в точке $C$ взята точка $M$ такая, что $AM = CM$. Докажите, что $K$, $L$ и $M$ лежат на одной прямой. (*М. Попов*)

**Решение:**




Так как $AL = LB$ и $\angle LBC = 90°$, то $L$ – точка пересечения серединного перпендикуляра к стороне $AB$ и перпендикуляра к стороне $BC$ в точке $B$. Аналогично $M$ – точка пересечения серединного перпендикуляра к стороне $AC$ и перпендикуляра к стороне $BC$ в точке $C$. Пусть $B_1$ и $C_1$ – середины сторон $AC$ и $AB$ соответственно. Точка $O$ – центр описанной окружности треугольника $ABC$ (точка пересечения серединных перпендикуляров).

Заметим, что

$$\angle CMO = \angle CMB_1 = 90^\circ - \angle MCB_1 = \\ = \angle ACB = \frac{1}{2}\angle AOB = \angle BOL$$

и

$$\angle BLO = \angle BLC_1 = 90^\circ - \angle LBC_1 = \\ = \angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC = \angle COM$$

Получаем, что треугольники $\triangle BLO$ и $\triangle COM$ подобны по двум углам. Следовательно, у этих треугольников соответствующие стороны и высоты пропорциональны. Пусть также $R$ – радиус описанной окружности, то есть $R = OA = OB = OC$. Тогда получаем такие соотношения

$$\frac{BL}{R} = \frac{R}{CM} = \frac{BC_1}{CB_1} = \frac{BA}{CA} \Longrightarrow \left(\frac{BA}{CA}\right)^2 = \frac{BL}{R} \cdot \frac{R}{CM} = \frac{BL}{CM}$$

Так как $KA$ – касательная к описанной окружности треугольника $ABC$, то $\triangle KAB \sim \triangle KCA$. Поэтому

$$\frac{BA}{AC} = \frac{KA}{KC} = \frac{KB}{KA} \Longrightarrow \left(\frac{BA}{AC}\right)^2 = \frac{KA}{KC} \cdot \frac{KB}{KA} = \frac{KB}{KC}$$

Итак, мы получили

$$\frac{BL}{CM} = \left(\frac{BA}{AC}\right)^2 = \frac{KB}{KC}$$

Получаем, что точки $K$, $L$ и $M$ лежат на одной прямой. ■